E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

72

1837.S.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VI — ianuarie 1955

1

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)

Anul VI, Nr. 1 — ianuarie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Apelul către popoarele lumii*	1
2.	*Folosirea paşnică a energiei atomice de prof. univ. Traian Gheorghiu*	3
3.	*Cîteva proprietăţi ale poligoanelor regulate de Kiss Ernest*	5
4.	*Despre radiaţiile cosmice de E. Friedländer*	11
5.	*O teoremă de aritmetică de D. Pompeiu*	19
6.	*Caleidoscop matematic*	20
7.	*Aparat pentru verificarea legii Boyle Mariotte de N. Rădulescu*	23
8.	*Chestiuni de examen (1469—1499)*	25
9.	*Probleme rezolvate (1214; 1215; 1216; 1218; 1226; 1240; 1257; 1259; 1260; 1265; 1266; 1268; 1270; 1271; 1294)*	31
10.	*Pagina cercurilor. Din problemele propuse la cercul de matematică din Capitală (1500—1511)*	40
11.	*Olimpiada tinerilor matematicieni şi fizicieni 1955*	41
12.	*Poşta redacţiei*	45
13.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	46

ANUL VI — 1 — IANUARIE 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Spiru Haret, 12 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 1 ianuarie 1955

SESIUNEA BIROULUI CONSILIULUI MONDIAL AL PĂCII

APELUL CĂTRE POPOARELE LUMII

In prezent, anumite guverne se pregătesc să dezlănţuie un război atomic. Ele vor să convingă popoarele de inevitabilitatea acestuia.

Folosirea armei atomice ar duce la un război de exterminare.

Declarăm că guvernul care va dezlănţui războiul atomic va pierde încrederea poporului său şi va fi condamnat de toate popoarele.

Ne ridicăm împotriva acelora care pregătesc războiul atomic.

Cerem distrugerea în toate ţările a stocurilor de arme atomice şi încetarea imediată a producţiei acestora.

Viena, 19 ianuarie 1955

Frédéric Joliot-Curie (Franţa), preşedintele Consiliului Mondial al Păcii; **Gabriel d'Arboussier** (Africa Neagră), vicepreşedinte al Consiliului Mondial al Păcii, avocat; d-na **Eugénie Cotton** (Franţa), vicepreşedinte al Consiliului Mondial al Păcii, preşedinte al Federaţiei democrate internaţionale a femeilor; **Alexandr Fadeev** (U.R.S.S.), vicepreşedinte al Consiliului Mondial al Păcii, scriitor; **Leopold Infeld** (Polonia), vicepreşedinte al Consiliului Mondial al Păcii, profesor de fizică; **Go Mo-jo** (China), vicepreşedinte al Consiliului Mondial al Păcii, preşedintele Academiei de ştiinţe a Chinei; **Jorge Amado** (Brazilia), scriitor, preşedintele Asociaţiei naţionale a scriitorilor brazilieni; **Laurent Casanova** (Franţa), deputat, fost ministru; **Emmanuel d'Astier de la Vigerie** (Franţa), deputat, fost ministru; **Ilya Ehrenburg** (U.R.S.S.), scriitor, deputat; **Wilhelm Elfes** (Germania), fost primar al oraşului München-Gladbach, preşedintele Uniunii germanilor care luptă pentru unitate, pace şi libertate; **James Endicott** (Canada), preşedintele Congresului pentru apărarea păcii din Canada; **Nazim Hikmet** (Turcia), poet; **Josef Hromadka** (Cehoslovacia), decan al facultăţii de geologie din Praga; **Alexandr Korneiciuk** (U.R.S.S.), dramaturg, deputat; **Jan Mukarjovski** (Cehoslovacia), director al Universităţii Karlovy din Praga; **Dennis Noel Pritt** (Marea Britanie), jurist, preşedinte al Comitetului pentru apărarea păcii din Anglia; **Louis Saillant** (Franţa), secretar general al Federaţiei sindicale mondiale; **Emilio Sereni** (Italia), senator; d-na **Jessie**

Street (Australia), fostă reprezentantă a Australiei la conferința de la San-Francisco pentru constituirea O.N.U.; **Antoine Tabet** (Liban), arhitect; **Nikolai Tihonov** (U.R.S.S.), poet, președinte al Comitetului sovietic pentru apărarea păcii; **William Wainwright** (Marea Britanie), scriitor, secretar organizatoric al Comitetului pentru apărarea păcii din Anglia; **Jean Laffitte** (Franța), secretar general al Consiliului Mondial al Păcii, scriitor; **Isabelle Blume** (Belgia), secretar al Consiliului Mondial al Păcii, fost deputat; **Vincent Duncan Jones** (Marea Britanie), secretar al Consiliului Mondial al Păcii, publicist; **Panteleimon Guleaev** (U.R.S.S.), secretar al Consiliului Mondial al Păcii, ziarist; **Li I-man** (China), secretar al Consiliului Mondial al Păcii, economist; **Ivor Montagu** (Marea Britanie), secretar al Consiliului Mondial al Păcii, regizor de cinema; **Riccardo Lombardi** (Italia), deputat, fost ministru, membru în Biroul Consiliului Mondial al Păcii; **Abderraman Buşama** (Algeria), arhitect, președinte al Comitetului partizanilor păcii din Algeria; **Heinrich Brandweiner** (Austria), profesor de drept internațional, președinte al Consiliului partizanilor păcii din Austria; **Alberto Cavalcanti** (Brazilia), regizor de cinema; **Robert Chambeiron** (Franța), fost deputat; **Jacques Denis** (Franța), secretar general al Federației mondiale a tineretului democrat; **Ostap Dluski** (Polonia) deputat, redactor; **Ambrogio Donini** (Italia), senator; **Erwin Eckert** (Germania), deputat al Landstagului, președinte al Comitetului luptătorilor pentru pace din Germania occidentală; **Ernst Fischer** (Austria), scriitor, fost ministru; **Nino Fogliaresi** (Italia), profesor; **Ragner Forbekk** (Norvegia), pastor, capelan al catedralei din Oslo; **Serghei Gherasimov** (U.R.S.S.), regizor de cinema, deputat; **Caoru Iasui** (Japonia), profesor de drept internațional la universitatea «Hosei», secretar general al Consiliului național pentru strîngerea de semnături pe petiția prin care se cere interzicerea armei atomice și cu hidrogen; **Chincadzu Saiondzi** (Japonia) membru al camerei consilierilor, director al ziarului «Nisi Nippon simbun» **Liu Kuan-i** (China), secretar general al Comitetului popular chinez de apărare a păcii și de luptă împotriva agresiunii americane; **Liu Cian-şen** (China) vicepreședinte al Federației sindicatelor din China; **Clarenzo Menotti** (Italia), fost senator; **Paramesvaran** (India), secretar al Consiliului păcii din India; **Erwin Scharf** (Austria), scriitor, președintele Partidului muncitoresc socialist din Austria; **Zekeria Sertel** (Turcia), scriitor, ziarist; **Valentin Sorokin** (U.R.S.S.), economist; **Pandit Sunderlal** (India), scriitor; **Alfredo Varela** (Argentina), scriitor; **Paul Wandel** (Germania), deputat, fost ministru; **Heinz Willmann** (Germania), secretar general al Consiliului luptătorilor pentru pace din Germania; **Jorge Zalamea** (Columbia), scriitor, fost ministru; **Teitelboim** (Chili) scriitor; **Heinz Altschul** (Austria), secretar general al Consiliului partizanilor păcii din Austria; d-na **Janosne Bugar** (Ungaria), secretar al Consiliului păcii din Ungaria; **Nestor Granchelli** (Argentina), avocat, fost președinte al federației universitare; d-na **Rosa Hollender** (Belgia), secretar general al Asociației pentru apărarea păcii din Belgia; **Iza Ibrahim** (Indonezia), secretar al Comitetului

național al partizanilor păcii din Indonezia; **Joris Ivens** (Olanda), regizor de cinema; **Felix Iversen** (Finlanda), vicepreședinte al Federației mondiale a asociației națiunilor unite; **Anton Strend** (Suedia), secretar al Comitetului național pentru apărarea păcii din Suedia; **Suroso** (Indonezia), secretar general al Comitetului național al partizanilor păcii din Indonezia; **Luiz Vidales** (Columbia), scriitor; **Fernand Vigne** (Franța), secretar general al Consiliului național al păcii; d-na **Mirjam Vire Tuominen** (Finlanda), secretar general al Organizației «Partizanii păcii din Finlanda», **Jacob Wolf** (Olanda), ziarist; Bruno Bernini (Italia), președintele Federației mondiale a tineretului democrat; **Bertolini**, secretar al Federației mondiale a luptătorilor din rezistență, a deținuților și internaților — victime ale fascismului; **Paul Delanoue**, secretar general al Federației internaționale a sindicatelor lucrătorilor din învățământ; **Luigi Grassi**, secretar al Federației sindicale mondiale; **Zoia Ivanova**, secretar al Federației democrate internaționale a femeilor; d-na **Molly Mandel**, secretar al Federației democrate internaționale a femeilor; d-na **Hilde Neumann**, jurist, Asociația internațională a juriștilor democrați; **Se Ban Din**, vicepreședinte al Uniuni internaționale a studenților; **Taptikov**, Federața internațională a sindicatelor lucrătorilor din învățământ; **Sorin Toma** (Romînia), ziarist; **Jaroslaw Iwaszkiewiez** (Polonia), scriitor, președinte al Comitetului partizanilor păcii din Polonia; **Leon Kruczkowski**, președinte al Uniunii scriitorilor polonezi; **Wictor Klosiewicz**, președinte al Consiliului central al sindicatelor din Polonia; **Max Cosyns** (Belgia), profesor de fizică; d-na **Farge**, membru al prezidului Consiliului național al păcii din Franța; **Gheorghi Pirinski** (Bulgaria), vicepreședinte al Biroului executiv al Comitetului național pentru apărarea păcii.

FOLOSIREA PAȘNICĂ A ENERGIEI ATOMICE ȘI PERSPECTIVELE CE SE DESCHID ȘTIINȚEI PUSE ÎN SLUJBA POPORULUI

TRAIAN GHEORGHIU

Prof. univ. Membru corespondent al Academiei R.P.R.

EVENIMENTUL de importanță epocală care s-a produs zilele acestea prin hotărîrea luată de Uniunea Sovietică de a ajuta unele țări să și organizeze cercetările privitoare la folosirea pe scară largă a energiei nucleare în scopul creșterii bunei stări a oamenilor muncii, ne interesează în mod deosebit deoarece sîntem una din țările care va beneficia de ajutorul tehnico-științific multilateral pe care marea noastră prietenă înțelege să ni-l acorde în această direcție.

Sîntem hotărîți a dovedi că încrederea ce ni se arată este întemeiată făcînd toate eforturile pentru a rezolva cu succes diferitele probleme pe care le ridică opera de excepțională complexitate la care sîntem chemați să contribuim.

Este o operă în care vor fi folosiți oameni de știință din diferite ramuri, căci varietatea domeniilor în care cercetările pot fi efectuate cu ajutorul atomilor radioactivi, cere o strînsă colaborare a acestora. Bine înțeles, rolul principal și director îl va avea fizica, deoarece ea este știința experimentală cea mai înaintată și cea mai precisă, prin metodele folosite și prin rezultatele obținute. Ea este creatoarea științei despre structura materiei și despre energia cuprinsă în sîmburele atomului, ea a descoperit fenomenele care au dus mai tîrziu la studiul interiorului atomic, a imaginat aparate și metode pentru explorarea microuniversului care îi stătea în față cu toate tainele lui; sintetizînd rezultatele, a izbutit să explice și să prevadă fenomene noi, lărgind astfel, cîmpul său de cercetare și multiplicînd numărul rezultatelor experimentale.

Începînd cu descoperirea fizicianului Becquerel (1896), care a constatat că o sare de uraniu emite raze necunoscute pînă atunci, apoi cu aceea a soților Curie (1898), care au arătat că și alte corpuri emit astfel de raze, descoperind în acest fel radiul și poloniul, știința despre corpurile radioactive a făcut progrese destul de repezi. Datorită acestor cercetători precum și a altor fizicieni, ca Rutherford, Soddy, Ramsay, Geiger-Müller, Wilson, Thomson, etc. s-a putut stabili natura acestor radiații, s-au descoperit produsele care apar în urma dezintegrării atomilor radioactivi.

Încă de pe atunci s-a observat că în transformările nucleare intervin energii de milioane de ori mai mari decît cele cunoscute în reacțiile chimice obișnuite. Pentru a se ajunge însă, la stadiul de azi în ce privește realizarea practică a acestor energii a fost nevoie de munca a mii de cercetători de pe întregul glob. Soții Joliot-Curie (1933), descopăr fenomenul radioactivității artificiale, Fermi (1934) realizează primele lucrări care au dus la descoperirea fisiunii nucleare realizată în urma cercetărilor lui Hahn, Meitner, Stresmann și soții Joliot-Curie.

Savanții sovietici printre cari, Skobelțîn, Frenkel, Flerov, Petrjak, Wexler, Terlețki, Ivanenco, Kapița au contribuit din plin la desăvîrșirea acestei descoperiri, la folosirea pașnică a minunatelor rezultate cucerite de știință.

Astăzi, prin hotărîrea guvernului sovietic, ni se dă posibilitatea să abordăm cu ușurință cercetările în domeniul fizicii nucleare folosind rezultatele înaintate la care a ajuns știința și tehnica sovietică. Pentru noi, această hotărîre a Uniunii Sovietice este de o deosebită însemnătate. Reactorii nucleari vor face ca dezvoltarea noastră industrială se se realizeze într-un ritm mai rapid, iar izotopii radioactivi pe care-i vom putea produce, vor avea o largă folosință în biologie, medicină, industrie agricultură, putînd cu ajutorul lor, să realizăm imense progrese în aceste domenii.

Pentru a duce mai departe aceste măreţe realizări, tineretului nostru studios care se preocupă îndeaproape de matematică şi fizică, îi revine sarcina să adîncească cunoştinţele din aceste domenii ale ştiinţei, deoarece numai în acest fel ei vor putea la rîndul lor, să contribuie cu succes la această operă.

CÎTEVA PROPRIETĂŢI ALE POLIGOANELOR REGULATE

KISS ERNEST

Conferenţiar la Universitatea «Bolyai» — Cluj

ÎN cele ce urmează ne vom ocupa cu cîteva proprietăţi mai puţin cunoscute sau noi, ale poligoanelor regulate, într-o formă accesibilă elevilor şcolilor medii. Totodată, prin aplicarea simultană a diferitelor ramuri ale matematicilor, vom pune în evidenţă strînsele legături ce există între aritmetică, algebră, geometrie şi trigonometrie, atrăgînd atenţia elevilor asupra faptului că problemele pot fi atacate cu succes numai folosind întregul aparat matematic. Nu poate fi un bun geometru acela care nu cunoaşte celelalte ramuri ale matematicii şi invers, orice matematician trebuie să cunoască şi geometria.

Problema poligoanelor regulate este în strînsă legătură cu împărţirea cercului în părţi egale, problemă cunoscută sub numele de diviziunea cercului.

Să împărţim un cerc în n părţi egale şi să unim în continuare, cîte $1, 2, 3, \ldots, n-1$ diviziuni. În acest fel găsim poligonul regulat convex cu n laturi, precum şi poligoanele regulate stelate cu n laturi.

Să rezolvăm mai întîi, problema următoare:

I. Cîte poligoane regulate distincte cu n laturi avem?

Se observă imediat că plecînd de la un punct de diviziune şi unind în continuare $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$*) diviziuni găsim exact aceleaşi poligoane ca şi cînd am pleca de la acelaşi punct de diviziune şi am merge în acelaş sens unind în continuare $n-1, n-2, \ldots, n-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$ diviziuni, numai că în cazul al doilea, ordinea trasării laturilor este tocmai inversă faţă de primul caz. E clar că unind consecutiv $n+k$ diviziuni, sau în general, $Mn+k$ diviziuni, găsim acelaşi poligon ca şi cînd am uni cîte k diviziuni $(k<n)$.

În acest fel am redus numărul posibil al poligoanelor regulate cu n laturi la $\frac{n-1}{2}$. Se pune întrebarea dacă toate poligoanele astfel obţinute au n

---

*) În cele ce urmează se înţelege prin «a uni n diviziuni» că numărul arcelor subîntinse de coarde care uneşte punctele extreme este n.

laturi sau se poate întîmpla că unind în continuare, cîte $k \leqslant \frac{n-1}{2}$ diviziuni

să revenim la punctul de plecare înainte de a găsi n laturi şi astfel, să găsim un poligon regulat cu $l < n$ laturi.

Să cercetăm mai întîi, cazul cînd $n = p$ este un număr prim. În acest caz, toate numerele mai mici ca p sînt prime cu p. Deci, dacă adoptăm pentru notarea celui mai mare divizor comun d al numerelor a şi b, notaţia $(a, b) = d$, atunci cînd $k < p$; $l < p$, avem:

$$(k, p) = 1 \quad ; \quad (l, p) = 1.$$

Dacă s-ar întîmpla ca unind consecutiv k diviziuni, să revenim după l uniri la punctul de plecare, ar trebui să avem:

$$lk = Mp \qquad (M \text{ fiind un număr întreg oarecare}).$$

Egalitatea aceasta ar fi imposibilă, căci partea ei dreaptă este divizibilă, cu p, iar cea stîngă, pe baza condiţiilor enunţate, nu este divizibilă. Deci, în cazul cînd $n = p$ număr prim, toate poligoanele găsite au p laturi şi avem în total $\frac{p-1}{2}$ poligoane regulate cu p laturi.

Să cercetăm acum cazul cînd n este un număr compus.

Dacă unim cîte $k < n$ diviziuni cînd $(k, n) = 1$, găsim că poligonul are n laturi pentru că egalitatea

$$kx = Mn \qquad (x - \text{numărul laturilor})$$

are loc prima oară cînd $x = n$. În cazul $k < n$ şi $(k, n) = d$ avem $k = dk'$ şi $n = dn'$, iar egalitatea $kx = Mn$ se poate scrie

$$k'dx = Mdn'$$

şi simplificînd cu d găsim

$$k'x = Mn'$$

care este verificată de $x = n' = \frac{n}{d}$ corespunzător unui poligon care are $\frac{n}{d}$ laturi $\left(\frac{n}{d} < n\right)$.

În baza celor de mai sus, putem enunţa că găsim atîtea poligoane regulate distincte cu n laturi cît este jumătatea numărului numerelor mai mici ca n şi prime cu n.

Aceasta este tocmai jumătate din funcţia lui Euler.

$$\frac{\varphi(n)}{2} = \frac{n}{2p_1 p_2 \dots p_i}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1)$$

unde $p_1, p_2, \dots, p_i$ sînt factorii primi ai lui n.

(Pentru obţinerea formulei lui $\varphi(n)$ şi pentru aprofundarea chestiunii se poate studia cartea lui E. Rusu «*Bazele teoriei numerelor*» din Biblioteca S.S.M.F.).

II. Ca o a doua problemă, să arătăm că dacă cunoaştem latura unuia dintre poligoanele regulate cu n laturi, putem efectua diviziunea cercului

în n părți egale. Să notăm cu l_i latura poligonului regulat cu n laturi, care s-a obținut unind i diviziuni.

Problema este banală pentru cazul cînd cunoaștem l_1 sau l_2, l_4, ..., l_2^r.

Să presupunem că cunoștem l_k. Aceasta înseamnă că cunoaștem $\frac{2\pi}{n} \cdot k$. Trebuie să avem $(k, n) = 1$.

Se știe din Algebra de cl. VIII — X, că ecuația $nx - ky = 1$ are rădăcini întregi, dacă $(k, n) = 1$. Presupunînd că rădăcinile sînt x_1 și y_1 avem:

$$nx_1 - ky_1 = 1.$$

Înmulțind ambele părți ale egalității cu $\frac{2\pi}{n}$ găsim:

$$2\pi x_1 - \frac{2\pi}{n} ky_1 = \frac{2\pi}{n}.$$

Aceasta înseamnă că trăgînd y_1 laturi (unind în continuare cîte k diviziuni) nu vom ajunge în punctul de unde am plecat ci vom fi despărțiți de acest punct tocmai cu a n^{-a} parte a cercului. În acest fel îl cunoaștem pe l_1 și astfel problema este rezolvată.

III. Matematicianul C. F. Gauss a demonstrat că diviziunea cercului în n părți se poate efectua cu rigla și cu compasul atunci și numai atunci, cînd $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_i$ unde p_1, p_2, ..., p_i sînt numere prime la puterea întîia și de forma $p_i = 1 + 2^m$.

Acceptăm această teoremă fără demonstrație și să arătăm numai atît că, cunoscînd diviziunea cercului în p_1 și p_2 părți, putem în adevăr, efectua diviziunea cercului în $p_1 p_2$ părți (problemă rezolvată și în Elementele lui Euclid).

Ca și în cazul precedent avînd diviziunea cercului în p_1 și p_2 părți, cunoaștem $\frac{2\pi}{p_1}$ și $\frac{2\pi}{p_2}$. Avînd $(p_1, p_2) = 1$, ecuația

$$xp_1 - yp_2 = 1$$

admite soluții întregi, de exemplu, x_1, y_1. Înlocuind x și y cu x_1 și y_1 și înmulțind cu $\frac{2\pi}{p_1 p_2}$ găsim

$$\frac{2\pi}{p_2} x_1 - \frac{2\pi}{p_1} y_1 = \frac{2\pi}{p_1 p_2}$$

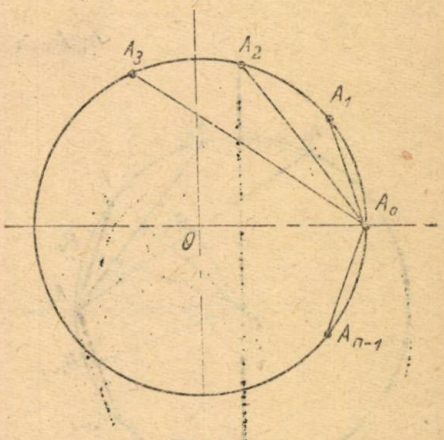


Fig. 1

și astfel avem diviziunea cercului în $p_1 p_2$ părți.

IV. În cele ce urmează să demonstrăm cu ajutorul numerelor complexe, două teoreme referitoare la diviziunea cercului.

a) Împărțind un cerc de rază $R = 1$ în n părți egale prin punctele A_0, A_1, ..., A_{n-1} (fig. 1) obținem produsul segmentelor $\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_0A_{n-1}} = n$.

b) Ducînd apotemele $\overline{OB_1}$, $\overline{OB_2}$, ..., $\overline{OB_{n-1}}$ (fig. 2) la segmentele $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_0A_2}$, ..., $\overline{A_0A_{n-1}}$ produsul lor este:

$$\overline{OB_1} \cdot \overline{OB_2} \ldots \overline{OB_{n-1}} = \begin{cases} 0 \text{ cînd } n \text{ este par} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ cînd } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Demonstraţie. Ştim că dacă $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unităţii; reprezentînd aceste numere complexe, în planul complex, obţinem tocmai diviziunea în n părţi egale a cercului de rază $R = 1$. Se cunosc identităţile

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) =$$
$$= (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{n-1})$$

deci,

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{n-1}) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

Luînd diferenţa $1 - \varepsilon_1$ găsim un număr complex al cărui modul este tocmai $\overline{A_0A_1}$; tot aşa, modulul diferenţei $1 - \varepsilon_2$ este egal cu $\overline{A_0A_2}$ şi aşa mai departe, modulul expresiei $1 - \varepsilon_{n-1}$ este egal cu $\overline{A_0A_{n-1}}$, adică

$$\overline{A_0A_1} = |1 - \varepsilon_1|$$
$$\overline{A_0A_2} = |1 - \varepsilon_2|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{A_0A_{n-1}} = |1 - \varepsilon_{n-1}|.$$

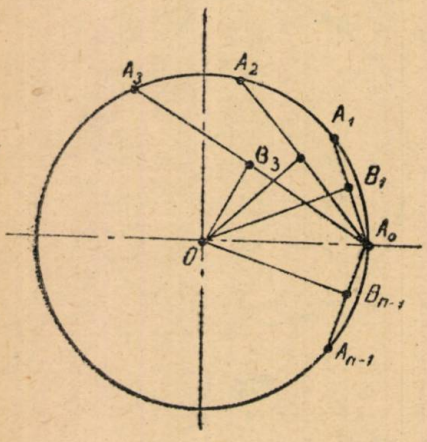


Fig. 2

În acest fel

$$\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \ldots \overline{A_0A_{n-1}} =$$
$$= |1 - \varepsilon_1| \cdot |1 - \varepsilon_2| \ldots |1 - \varepsilon_{n-1}|.$$

Însă cunoaştem că produsul modulelor este egal cu modulul produsului, deci

$$\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \ldots \overline{A_0A_{n-1}} =$$
$$= |(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\ldots(1-\varepsilon_{n-1})|.$$

Dar

$$|(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{n-1})| =$$
$$= |x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1|.$$

Înlocuind $x = 1$, avem

$$\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \ldots \overline{A_0A_{n-1}} = n.$$

b) Punctelor $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ le corespund numerele complexe

$$\frac{1+\varepsilon_1}{2}, \quad \frac{1+\varepsilon_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1+\varepsilon_{n-1}}{2}.$$

Din cele precedente:

$$(-x-\varepsilon_1)(-x-\varepsilon_2)\ldots(-x-\varepsilon_{n-1}) = (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^{n-2}x^{n-2}\ldots + 1$$

de unde rezultă

$$(x+\varepsilon_1)(x+\varepsilon_2)\ldots(x+\varepsilon_{n-1}) = x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}x + (-1)^{n-1}$$

$$\overline{OB}_1 = \left|\frac{1+\varepsilon_1}{2}\right|; \quad \overline{OB}_2 = \left|\frac{1+\varepsilon_2}{2}\right| \ldots \overline{OB}_{n-1} = \left|\frac{1+\varepsilon_{n-1}}{2}\right|$$

$$|x+\varepsilon_1|\,|x+\varepsilon_2|\ldots|x+\varepsilon_{n-1}| = |x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3}\ldots + (-1)^{n-2}x + (-1)^{n-1}|.$$

Înlocuind $x = 1$, avem:

$$\overline{OB}_1 \cdot \overline{OB}_2 \ldots \overline{OB}_{n-1} = \begin{cases} 0 \text{ cînd } n \text{ este par} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ cînd } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

V. Să enunţăm cu ajutorul utimelor două teoreme, cîteva teoreme relative la laturile poligoanelor regulate distincte cu n laturi.

1. Dacă $n = p$ (p număr prim) $l_1 l_2 \ldots \underset{2}{l_{p-1}} = \sqrt{p}$, iar $a_1 a_2 \ldots \underset{2}{a_{p-1}} = \dfrac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}}$ (l_i este latura cu i diviziuni, iar a_i apotema respectivă).

Teorema este evidentă luînd în consideraţie că $l_1 = l_{n-1}, \ldots l_k = l_{n-k}$ şi în acelaşi timp $a_1 = a_{n-1}, \ldots, a_k = a_{n-k}\ldots$

2. Dacă $n = p^k$ unde p este prim şi neegal cu 2.

$$l_1 l_2 \ldots \underset{2}{l_{\varphi(p^k)}} = \sqrt{p}; \quad a_1 \cdot a_2 \ldots \underset{2}{a_{\varphi(p^k)}} = \frac{1}{2^{\frac{\varphi(p^k)}{2}}}$$

Demonstraţia se poate întrevedea în felul următor: împărţind cercul în p^k părţi şi unind A_0 cu toate punctele de diviziune, găsim produsul egal cu p^k. Să scoatem din aceste segmente pe toate care corespund diviziunii în p^{k-1} părţi, căci acestea nu ne dau poligoane regulate cu p^k laturi. Produsul acestora este egal cu p^{k-1}, deci, produsul laturilor poligoanelor distincte cu p^k laturi este,

$$\sqrt{\frac{p^k}{p^{k-1}}} = \sqrt{p}.$$

3. Dacă $n = 2^k$; $l_1 l_2 \ldots \underset{2}{l_{\varphi(2^k)}} = \sqrt{2}$.

4. Dacă $n = p_1^{k_1} p_3^{k_2} \ldots p_i^{k_i}$ atunci produsul a cîte unor laturi de la toate poligoanele regulate distincte cu n laturi este egal cu 1. Cele două teoreme din urmă se pot demonstra în felul celor precedente.

VI. Să aplicăm cele găsite la cîteva exerciţii de calcul.

a) Se găseşte imediat latura triunghiului regulat înscris în cercul de rază $R = 1$. $L_3 = \sqrt{3}$, apotema $A_3 = \frac{1}{2}$, latura patratului înscris $L_4 = \sqrt{2}$.

b) Laturile l_1 şi l_2 şi apotemele a_1 şi a_2 a pentagoanelor regulate se pot calcula astfel:

$$l_1 l_2 = \sqrt{5} \quad ; \quad a_1 a_2 = \frac{1}{4}.$$

Scriem relaţiile evidente

$$\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + a_1^2 = 1 \quad \text{şi} \quad \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + a_2^2 = 1.$$

Eliminînd a_1 şi a_2 avem:

$$l_1^2 + l_2^2 = 5 \quad \text{şi} \quad l_1^2 l_2^2 = 5$$

de unde

$$l_1 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \quad ; \quad l_2 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Apotemele se calculează imediat.

VII. Ca încheiere să aplicăm cele găsite la calcularea unor produse trigonometrice finite.

1. Să calculăm,

$$P_1 = \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Observînd că

$$\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \ldots \overline{A_0A_{n-1}} = 2^{n-1} P_1 = n$$

găsim

$$P_1 = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2. În mod analog

$$P_2 = \cos\frac{\pi}{n} \cos\frac{2\pi}{n} \ldots \cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } n \text{ e par} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ dacă } n \text{ impar.} \end{cases}$$

(Vezi, V. A. Krecimar — *Zadacinic po algebre,* paragraf 1, problema 46).

3. Să calculăm

$$P_3 = \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \sin\frac{6\pi}{n} \ldots \sin\frac{(2n-2)\pi}{n}$$

cînd n este impar.

Din 1, şi 2. găsim

$$P_3 = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

DESPRE RADIAȚIILE COSMICE

ERWIN FRIEDLÄNDER

În ultimele două decenii fizica nucleului atomic a luat o dezvoltare uriașă. Descoperirile succesive ale neutronului, pozitronului și ale reacției de fisiune în lanț, s-au succedat într-un ritm nebănuit și au făcut ca într-un timp relativ scurt utilizarea concretă a uriașelor rezerve de energie legate de nucleele atomice să stea la îndemîna omului. Simultan, concepțiile noastre despre univers, despre structura materiei au suferit schimbări fundamentale. O importantă contribuție la această evoluție vertiginoasă a fizicii nucleare (atît teoretice cît și aplicate) au adus-o cercetările asupra radiației cosmice.

Este bine s-o spunem de la început: departe de a fi un capitol al Astronomiei sau chiar al Astrofizicei (cum se simt mulți tentați să creadă), știința despre radiația cosmică este înainte de toate un capitol (și nu cel mai puțin important), din fizica nucleară. Explicația acestui aparent paradox rezidă în faptul că particulele ce ne vin din spațiul cosmic și din a căror interacțiune cu atmosfera terestră rezultă acel ansamblu complex de fenomene pe care îl numim pe scurt «radiație cosmică», sînt înzestrate cu energii care depășesc de mii, de sute de mii și chiar milioane de ori, cele mai mari energii pe care le putem realiza în laboratoarele noastre. După cum se știe, fizica nucleară s-a dezvoltat vertiginos din momentul în care uriașele instalații pentru accelerarea particulelor încărcate (cum sînt ciclotroanele, sincrotroanele, betatroanele) au pus la îndemîna fizicienilor particule cu energii suficient de mari pentru a rupe nucleele atomice și a studia interacțiunile nucleare la energii mari. În stadiul actual, fizica nucleară cere energii din ce în ce mai mari; cele mai uriașe acceleratoare au reușit de-abia în ultima vreme să atingă energiile cele mai mici observate în radiația primară. Astfel se explică marele interes acordat astăzi de fizicieni studiului radiației cosmice. Vom încerca să sintetizăm în cadrul limitat al articolului de față principalele cunoștințe asupra acestei radiații, fără a păstra o ordine istorică în expunere *).

I. Radiația primară

Prin *radiație cosmică propriu-zisă* sau *radiație primară*, se înțelege un flux neîntrerupt de nuclee atomice (de aproape toate speciile cuprinse între hidrogen și fier) care parcurg spațiul cosmic cu viteze uriașe, apropiate de viteza luminii mișcîndu-se cu probabilitate egală în toate direcțiile posibile. Trebuie menționat că cea mai mare parte dintre aceste nuclee (peste 96%) sînt nuclee de hidrogen adică protoni, peste 3% sînt nuclee de heliu (adică particule α), iar nucleele mai grele (cu numărul de ordine $2 < Z < 50$) constituie împreună mai puțin de 1%. Am putea aproape spune, că radiația cosmică primară este constituită practic în întregime din protoni de mare energie. Unitatea de energie pe care o vom folosi de acum înainte este electron-voltul (eV) adică, energia cîștigată de o particulă cu sarcina electrică egală cu a electronului, cînd parcurge o diferență de potențial de 1 volt. Prin «mare

*) Presupunem că cititorii sînt familiarizați cu cunoștințele elementare asupra structurii atomului și nucleului. V. de ex. M. I. Korsunschi — Nucleul atomic. Editura Tehnică 1952.

energie » se înţelege energii mai mari de 10^9eV. Dacă ne gîndim că, pentru a scoate un electron dintr-un atom (de exemplu, prin efect fotoelectric) sînt necesari cîţiva eV, că pentru a rupe în două un nucleu de litiu sînt necesare particule cu energii de cîteva milioane de eV şi că reacţia de fisiune a nucleului de uraniu (cu ajutorul căreia punem în libertate energia nucleară) ne dă

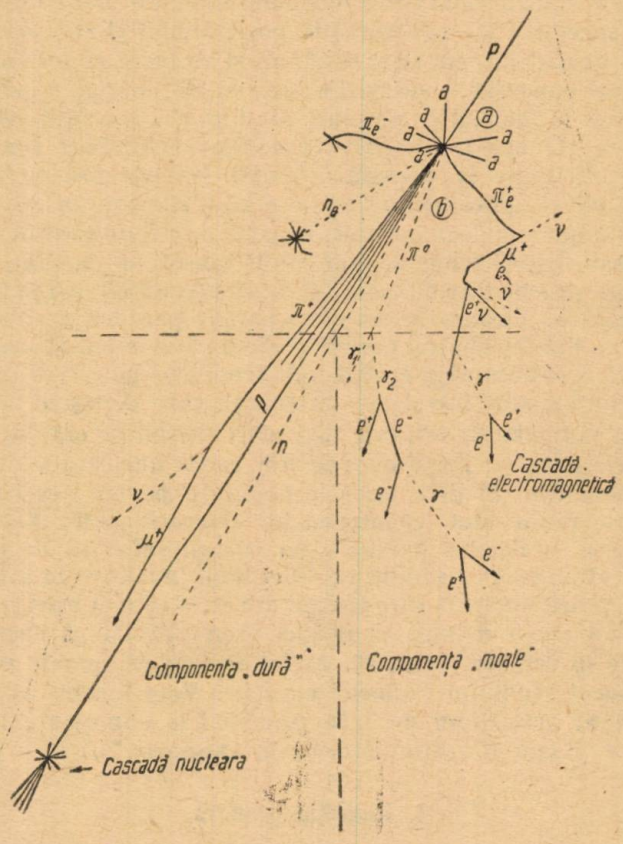


Fig. 1. — Schema evoluţiei radiaţiei cosmice în atmosferă.
P — proton primar de mare energie:
a — protoni şi particule α încete formînd « steaua »;
b — protoni, neutroni şi mezoni rapizi, formînd jerbe;
π_e^- — mezon negativ lent captat de un nucleu;
n_e — neutron lent care dezintegrează un nucleu;
$\pi_e^+ \mu_e^+$ — mezoni pozitivi lenţi;
e^- — electroni;
e^+ — pozitroni;
π^+ — mezoni π pozitivi rapizi;
μ^+ — mezoni μ pozitivi rapizi;
p, *n* — protoni şi neutroni rapizi;
(traiectorile particulelor neutre sînt redate punctat).

circa $200 \cdot 10^6$eV (sau 200 MeV) se vede limpede ce energii nebănuite ne pun la dispoziţie protonii primari.

Măsurată la scara macroscopică energia totală purtată de aceşti protoni este însă, foarte mică. La limita atmosferei (adică practic, pe la 100

km altitudine), fluxul protonilor primari este cam de 16 particule pe minut pe centimetru pătrat de suprafaţă orizontală. Energia totală transportată pe minut de toate particulele cosmice ce cad asupra pămîntului este cam de 40.000 kilocalorii, adică egală cu cea dată de arderea a circa 40 kg cărbune de bună calitate. Curentul electric total pe care l-ar produce toţi aceşti protoni dacă ar curge printr-un fir, este de numai 0,2 amperi, adică egal cu curentul ce încălzeşte firul becului unei lămpi de buzunar.

Aceste cifre ilustrează micimea energiei *totale* transportate de radiaţiacosmică. Această micime este însă, numai consecinţa numărului relativ mic de protoni primari care ajung la pămînt. Energia unei particule izolate este însă, atît de uriaşă încît ea poate străbate întreaga atmosferă ionizînd atomii pe drumul ei (numai pentru aceasta trebuie cheltuit peste un miliard de eV), să pătrundă prin straturi de mulţi metri de plumb, în fundul minelor, sub cei mai groşi gheţari şi chiar pînă la fundul oceanelor.

Felul cum particulele primare dobîndesc aceste energii a fost lămurit în cursul ultimilor ani prin lucrările teoretice ale lui Alfven, Fermi, Terlezky şi Ghinsburg. Radiaţia cosmică primară îşi are originea în atmosferele fierbinţi ale stelelor, unde nucleele atomice lipsite de electronii lor sînt accelerate de cîmpurile magnetice variabile care rezultă din mişcarea maselor de substanţă ionizată şi deci, conductoare.

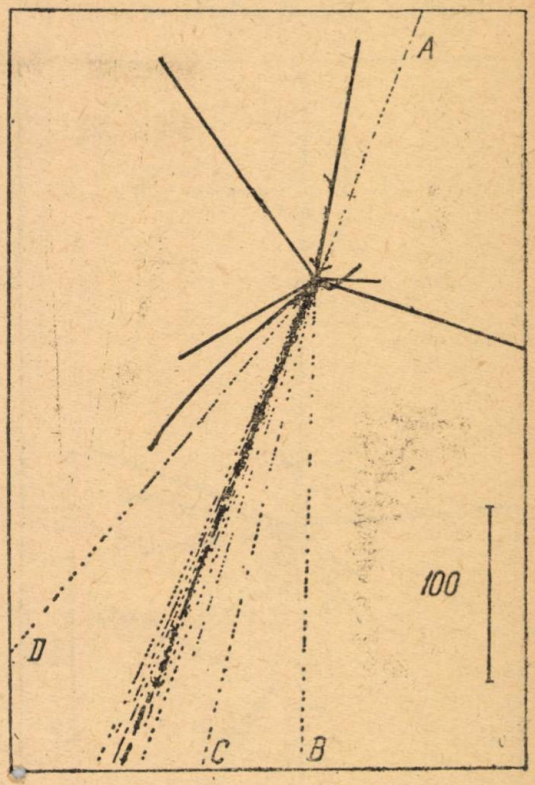


Fig. 2. — Jerbă nucleară asociată cu o «stea». Protonul primar *A* a ciocnit un nucleu de azot sau de oxigen din emulsia fotografică. Urmele scurte şi groase se datoresc protonilor lenţi în care s-a sfărîmat restul nucleului, rămas după ciocnire. Urmele subţiri şi drepte aparţin mezonilor încărcaţi şi unuia sau mai multor protoni smulşi din nucleul ciocnit.

Accelerarea are loc pe baza fenomenului de inducţie electromagnetică, care după cum se ştie, stă la baza acceleratorului de electroni numit betatron. Prin acest proces de accelerare nucleele capătă energii suficiente pentru a fi smulse din atmosfera stelei şi aruncate în spaţiul cosmic. Aci ele sînt accelerate (tot prin inducţie) mai întîi de cîmpul magnetic variabil al unor stele a căror axă magnetică nu coincide cu cea geometrică, [1]) iar apoi, de norii de materie interstelară, care şi ei sînt ionizaţi (conductori).

---

*) După cum se ştie, acest lucru se observă şi la pămînt, ai cărui poli magnetici nu coincid cu cei geografici.

Acest proces de accelerare treptată, durează însă foarte mult (milioane de ani). Cu toată densitatea extraordinar de mică a materiei interstelare (mai ales, atomi de hidrogen cu densitatea de ~1 atom/cm^3), nucleele grele primare suferă în cursul acestei lungi peregrinări, un număr suficient de mare de ciocniri nucleare, pentru a se îmbucătăţi şi a se reduce la fragmente uşoare şi mai ales, la protoni.

Protonii primari suferă, ca orice particule, acţiunea cîmpului magnetic al pămîntului. Deşi slab în valoare absolută, acest cîmp se întinde pe distanţe uriaşe şi acţiunea lui se face simţită prin aceea că deviază particulele primare din drumul lor, şi aceasta cu atît mai mult cu cît energia lor este mai mică. Aceasta duce între altele, la aşa numitul efect de latitudine, care constă în aceea că la o anumită latitudine pot atinge suprafaţa pămîntului numai protoni a căror energie este mai mare decît o anumită valoare E_λ, care depinde de latitudinea λ, conform relaţiei

$$E_\lambda = 15 \cdot 10^9 \cos^4 \lambda \text{ eV} \quad (1)$$

Se vede de aci, că la pol ($\lambda = 90$) pot fi observate particule cu orice energie, pe cînd energia minimă pe care trebuie să o aibă un proton cosmic pentru a putea fi observat la ecuator este de 15 miliarde de electron-volţi.

Trebuie să menţionăm aci că tocmai efectele geomagnetice (ca efectul de latitudine şi altele) au permis stabilirea faptului că radiaţia primară constă din particule încărcate şi a ajutat la identificarea acestor particule.

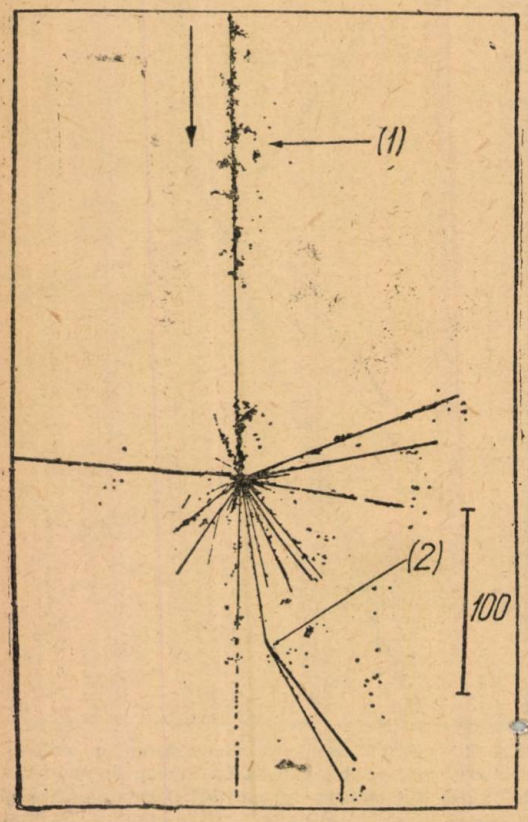


Fig. 3. – Un nucleu greu (calciu) din radiaţia primară (punctul 1) ciocneşte un nucleu din emulsie. Energia nucleului este insuficientă pentru generarea unei jerbe de mezoni, astfel că se observă numai o „stea" din care este emis, între altele, un mezon π negativ care dezintegrează în punctul (2) un nucleu al emulsiei. De remarcat diferenţa de grosime dintre urma nucleului de Ca şi protonul *A* din fig. 2.

II. Interacţiunea radiaţiei primare cu atmosfera

Radiaţia cosmică primară se absoarbe extrem de rapid în atmosferă. La o altitudine de ~7–8 km ea este practic, complet absorbită şi în locul ei apare o intensă *radiaţie secundară*, rezultat al interacţiunii dintre protonii primari şi nucleele atomilor din atmosferă. Datorită energiilor uriaşe ale protonilor primari aceste interacţiuni au însă, un caracter cu totul deosebit de cel al interacţiunilor nucleare, ale particulelor cu energii de 1–100 MeV.

După cum se ştie, bombardarea în ciclotron a nucleelor atomice cu protoni sau particule α cu energii de 1—10 MeV, duce la dezintegrarea nucleului ciocnit cu emiterea unuia sau (rareori) a mai multor fragmente ale acestui nucleu (neutroni, protoni, deutoni, particule α). La energii de cîteva sute de MeV (care se obţin cu ajutorul fazotronului şi ciclotronului) nucleele sînt de obicei, rupte în mai multe fragmente. Asemenea dezintegrări pot fi observate cel mai bine în emulsii fotografice groase special destinate studiilor de fizică nucleară, în care fiecare particulă ionizată lasă pe drumul ei un şirag de grăunţe negre de argint care pot fi studiate la microscop. Aspectul acestei «traiectorii» a particulei permite tragerea unor concluzii foarte importante cu privire la masa, sarcina şi viteza ei. Dezintegrările de care am vorbit mai sus, apar în aceste emulsii sub forma unor «stele» caracteristice, desenate de protonii, deutonii şi fragmentele încărcate mai grele, emise din nucleu. Asemenea «stele» pot fi observate în număr foarte mare în plăci expuse radiaţiei cosmice la altitudini mari (10—30 km) şi ele sînt o dovadă convingătoare despre existenţa unor protoni şi neutroni cu energii de $\sim 10^8$ eV în radiaţia secundară. «Stelele» generate de protoni primari prezintă însă o deosebire esenţială. Particulele cu energii mai mari de 10^9 eV nu numai că sfarmă un nucleu în bucăţi, ci din uriaşa lor energie iau naştere un număr mai mic sau mai mare de

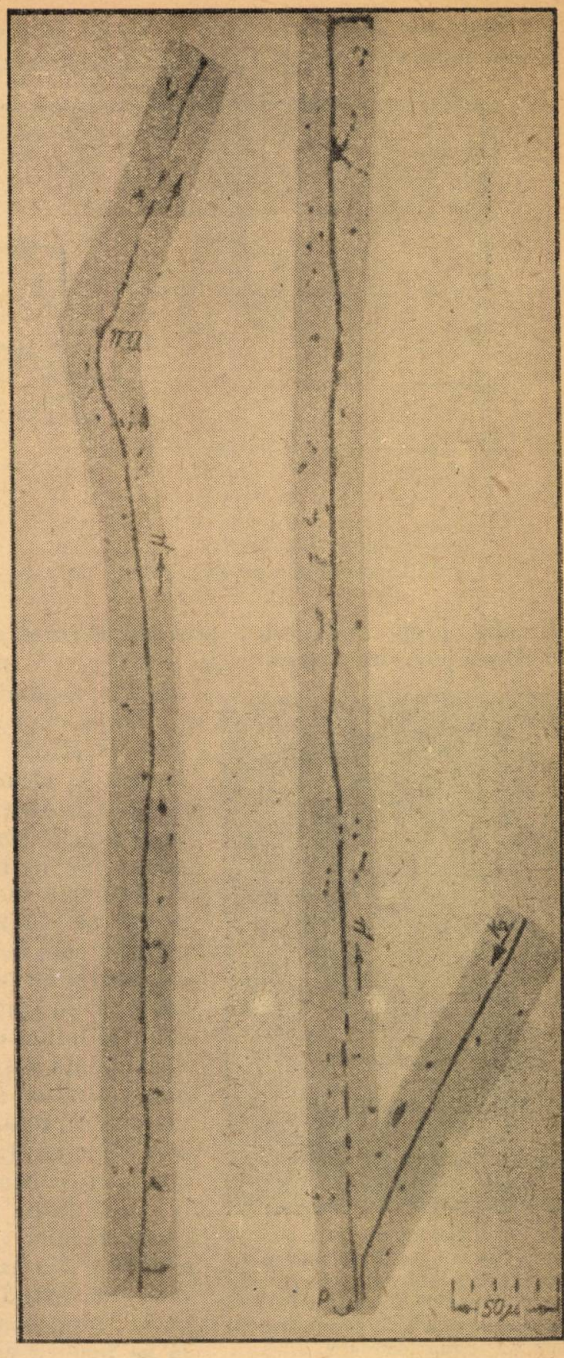


Fig. 4. — Dezintegrarea succesivă, (în punctul *P*) a unui mezon greu (*K*) într-un mezon μ care apoi dă prin dezintegrare, un electron (în punctul *Q*).

particule noi instabile, numite *mezoni* care se mişcă cu viteze uriaşe sub forma unui « mănunchi » de particule, care a căpătat numele de « jerbă » după

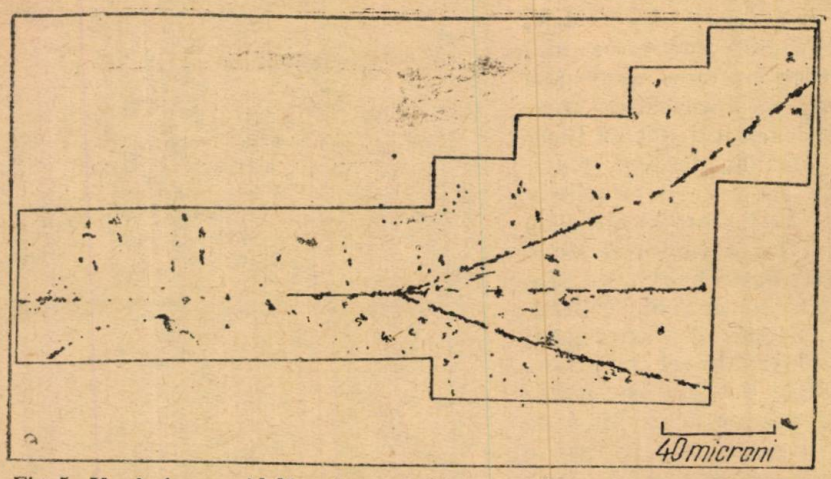


Fig. 5. Un electron rapid dă naştere prin frînare, unei perechi electron-pozitron.

direcţii apropiate de cea a protonului primar. Pentru a înţelege mecanismul acestor « jerbe nucleare » trebuie să facem o scurtă incursiune în aşa numita « teorie mezonică a forţelor nucleare ».

Fig. 6. — Fotoni de mare energie frînaţi în cîmpul unor nuclee de plumb dau naştere unor perechi electron-pozitron care sînt deviate în sensuri opuse de acţiunea unui cîmp magnetic.

După cum se ştie, există o strînsă legătură între electroni şi radiaţiile celectromagnetice. Emisia şi absorbţia luminii este condiţionată de modificarea stării energetice a electronilor în atomi. Frînarea bruscă a electronilor rapizi pe un bloc de metal, duce la emiterea de raze X. Frînarea unui foton de raze γ în cîmpul unui nucleu sau al unui electron, duce la apariţia unei perechi de particule de semne opuse: un electron şi un pozitron. Invers, întîlnirea dintre un electron şi un pozitron duce la emisia a doi sau trei fotoni de mare energie. Această interdependenţă între electroni şi fotoni a permis teoreticienilor să descrie interacţiunile electromagnetice, ca de exemplu atracţia şi respingerea sarcinilor electrice, — cu ajutorul unui model conform căruia, de exemplu, doi electroni schimbă între ei fotoni (care sînt respectiv emişi de unul din electroni şi absorbiţi de celălalt). Un asemenea model a dus la rezultate excelente în electromagnetism şi era firesc ca în momentul descoperirii forţelor nucleare să se încerce crearea unui model asemănător pentru interacţiunea protonilor şi a neutronilor. Deosebirea dintre fotonii « electromagnetici » şi fotonii « nucleari » (care au primit numele de mezoni) constă însă în următoarele: un foton nu poate fi

imaginat în repaos şi deci, nu posedă o masă de repaos; el se mişcă cu viteza luminii iar energiei sale $\mathcal{E}$ îi corespunde, conform teoriei relativităţii, o masă

$$m = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \qquad (2)$$

Mezonii însă, sînt particule « grele » (mult mai grele decît electronul), la viteze oricît de mici. Această proprietate a lor a fost prezisă încă înaintea descoperirii lor de către Yukawa, care a construit pe baza lor un model al forţelor nucleare.

Cercetările ultimilor ani, în care au jucat un rol important lucrările savanţilor sovietici de sub conducerea acad. D. V. Scobelţin şi S. N. Vermov, au arătat că principalul efect provocat de protonii primari la ciocnirea lor cu nucleele atmosferei este emisia unui număr de mezoni (cu atît mai mare cu cît energia protonului primar era mai mare). Aceşti mezoni devin apoi, direct sau indirect, sursa celei mai mari părţi din radiaţia secundară.

Se cunosc astăzi, multe tipuri de mezoni (cel puţin 8), unii prezentîndu-se chiar sub mai multe forme (încărcaţi de ambele semne, neutri). Principalele atribute ale diferiţilor mezoni sînt masa lor (care variază de la un tip la altul între circa 200 şi 2000 mase electronice) şi timpul lor mediu de viaţă. Intr-adevăr, după cum am spus mai sus, mezonii sînt instabili tocmai ca nucleele elementelor radioactive şi se transformă fie în alţi mezoni, fie în particule uşoare (electroni, pozitroni, fotoni, neutroni). Nu vom intra aci în amănunte asupra acestor particule, ci vom aminti numai cele mai frecvente (şi mai uşoare) tipuri de mezoni şi anume:

a) mezonii π de circa 276 ori mai grei decît electronul. Aceşti mezoni sînt cei mai frecvenţi în jerbele nucleare. Durata lor de viaţă este extrem de mică. Mezonii π încărcaţi se dezintegrează după 10^{-8} secunde emiţînd un mezon μ şi o particulă uşoară neutră (cu masa mult mai mică decît a electronului). Mezonii μ neutri se dezintegrează şi mai repede ($\sim 10^{-14}$ secunde) în doi fotoni de mare energie.

b) mezonii μ de circa 207 ori mai grei decît electronii, care se dezintegrează după $\sim 10^{-6}$ secunde, într-un electron şi doi neutroni.

Toţi mezonii mai grei dau — în cele din urmă — prin dezintegrarea lor, mezoni π sau μ. Numărul lor este însă mic în comparaţie cu cel al mezonilor μ şi de aceea tabloul general al radiaţiei cosmice poate fi înţeles în primă aproximaţie, fără a ţine seama de ei. Evoluţia radiaţiei cosmice în atmosferă poate fi înţeleasă cel mai bine urmărind rezultatele unei ciocniri dintre un proton primar de mare energie şi un nucleu.

Protonul primar străbate nucleul ciocnit şi smulge din el mai mulţi protoni şi neutroni. Uriaşa energie concentrată în această mică îndesare de substanţă duce la apariţia simultană a mai multor mezoni π încărcaţi şi neutri (şi eventual şi a unor particule mai grele). Restul nucleului ciocnit « fierbe », adică emite un număr de particule grele, lente, care formează, de exemplu într-o emulsie fotografică nucleară, o « stea ».

Mezonii π şi nucleonii, adică protonii şi neutronii smulşi din nucleu, se despart numaidecît formînd aşa numita « jerbă nucleară ». După cîteva zeci de metri, mezonii încărcaţi se dezintegrează *) şi în locul lor apar mezoni μ

*) Trebue amintit că mezonii π şi negativi lenţi, sînt de obicei captaţi de nuclee atomice pe care le dezintegrează dînd « stele ».

de mare energie, care pot străbate întreaga atmosferă şi pătrunde chiar la zeci de metri sub pămînt. Aceşti mezoni constituie aşa numita componentă «dură» sau «penetrantă» a radiaţiei cosmice.

Mezonii π neutri se dezintegrează după cum am spus, la cîţiva milimetri de locul ciocnirii, în doi fotoni de mare energie. Soarta acestor fotoni este deosebit de interesantă. Ei sînt frînaţi în cîmpul nucleelor din atmosferă şi

Fig. 7. — Dezvoltarea «cascadei electromagnetice» în plăci de plumb.

dau naştere unor perechi electron-pozitron. Aceştia din urmă, frînaţi, dau naştere unor fotoni (anolog emisiei de raze X). Apoi, fenomenul se repetă de zeci de ori, astfel încît numărul electronilor şi fotonilor creşte în progresie geometrică, atingînd (la energii mari) numărul uriaş de $\sim 10^6 - 10^7$ particule. Acest proces se numeşte «cascadă electromagnetică» şi componenta electrono-fotonică care ia astfel naştere este numită şi componenta «moale» datorită faptului că se absoarbe uşor în plumb.

Un proces analog de cascadă «nucleară» are însă loc paralel cu cel electromagnetic datorită protonilor, neutronilor şi unora dintre mezonii din jerbă (cei mai energici) care pot ciocni fiecare alte nuclee atomice dînd naştere unor noi jerbe nucleare. Acest proces de cascadă, descoperit de Cocconi şi Zaţepin, duce la formarea unor «jerbe atmosferice largi», fascicule imense cuprinzînd milioane de particule şi acoperind mulţi kilometri pătraţi.

Acesta este tabloul de ansamblu al radiaţiei cosmice. O succesiune de transformări ale unor particule în altele, însoţite de dispariţia unora şi apariţia altora. Studiul acestor transformări ne-a adus şi ne aduce mereu noi informaţii despre proprietăţile particulelor elementare, despre forţele nucleare şi ne permite să facem paşi uriaşi înainte în folosirea acestor forţe pentru a asigura omenirii un viitor luminos.

O TEOREMĂ DE ARITMETICĂ *)

D. POMPEIU

1. SCOPUL rîndurilor de faţă este legatura dintre formulele literare ale Algebrei şi particularizarea lor în numere întregi pentru a obţine teoreme de Aritmetică.

Dăm aci încă un exempiu care conduce la o interesantă propoziţie de Aritmetică.

2. Mai întîi identitatea algebrică.

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

particularizată

$$(B-1)^3 = B^3 - 3B^3 + 3B - 1 \qquad (1)$$

iar acum să presupunem pe B: un număr întreg oarecare. Să luăm acest număr ca bază a unui sistem de numeraţie şi să grupăm membrul al doilea al identităţii (1) în felul următor:

$$(B-1)^3 = (B-3)\,B^2 + 2B + (B-1). \qquad (3)$$

Dacă B este baza sistemului de numeraţie adoptat, atunci, în membrul al doilea al identităţii (3), avem puterile bazei B:

$$B^2,\ B,\ 1$$

şi coeficienţii (cifrele):

$$B-3;\ 2 \text{ şi } B-1$$

ceea ce ne permite a formula următoarea propoziţie de Aritmetică:

Oricare ar fi baza B, mai mare ca 3, a unui sistem de numeraţie, cubul numărului B — 1 are trei cifre, iar cifra a doua este totdeauna 2.

Caz particular, cazul clasic

$$B = 10$$

atunci, $9^3 = 729$, adică,

$$(10-1)^3 = (10-3)\,10^2 + 2\cdot 10 + (10-1).$$

---

*) Această notă a apărut în Gazeta Matematică şi Fizică seria A în numărul 4—aprilie 1951.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

I

1. Îţi ghicesc numărul la care te-ai gîndit. Spuneţi unei persoane să se gîndească la un număr şi să efectuieze asupra lui următoarele operaţii:

1. Să multiplice cu 5, numărul la care s-a gîndit.
2. Să adune 6 la rezultat.
3. Să multiplice cu 4, suma obţinută.
4. Să adune 9 la produs.
5. Să multiplice cu 5 noua sumă.

Cereţi rezultatul. Scădeţi din el 165 şi suprimaţi cele două zerouri de la dreapta diferenţei. Comunicaţi persoanei că numărul la care s-a gîndit este ultimul rezultat.

Explicaţia matematică este simplă. Dacă notăm cu N numărul căutat şi efectuăm cele cinci operaţii indicate obţinem succesiv:

1) $5N$ 2) $5N + 6$ 3) $20N + 24$ 4) $20N + 33$

5) $100N + 165$.

Astfel rezultatul pe care vi-l comunică, această persoană este $100N + 165$. Scăzînd 165 din rezultat, obţineţi $100N$. Aşa dar dacă suprimaţi cele două zerouri din dreapta diferenţei, găsiţi numărul N.

2. O demonstraţie a teoremei lui Pitagora. Consideraţi un triunghi dreptunghi ABC. Ridicaţi în C o perpendiculară pe ipotenuză a cărei lungime să fie $CD = a$. Prelungiţi cateta AC pînă la întretăierea ei cu paralela din D la cealaltă catetă AB, în punctul E.

Unind punctele B şi D, se formează un trapez dreptunghic $ABED$ descompus în trei triunghiuri, dintre care ECD este egal cu ABC. Scrieţi că aria trapezului este egală cu suma ariilor celor trei triunghiuri. Obţineţi:

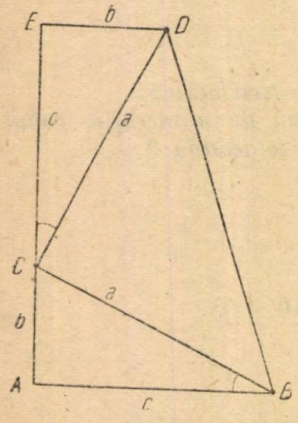


Fig. 1

$$\frac{(AB+ED)\cdot AE}{2} = \text{aria } ABC + \text{aria } CED + \text{aria } BCD$$

sau

$$\frac{(b+c)^2}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

ceea ce înseamnă că $b^2 + c^2 = a^2$.

3. O identitate de expresii algebrice care foloseşte la efectuarea rapidă a unor înmulţiri. Dacă $b + c = 10$, se poate verifica uşor egalitatea: $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$.

Această identitate aplicată la numere întregi şi pozitive ne dă proprietatea că produsul a două numere care au acelaşi număr de zeci (a) şi ale căror unităţi b şi c au suma 10, se obţine alăturînd la dreapta produsului $a(a + 1)$ rezultatul înmulţirii cifrelor b şi c.

De exemplu:

$$38 \cdot 32 = 100 \cdot 3 \cdot (3 + 1) + 8 \cdot 2 = 1216$$

$$127 \cdot 123 = 100 \cdot 12 \cdot (12 + 1) + 7 \cdot 3 = 15621$$

$$75^2 = 75 \cdot 75 = 100 \cdot 7 \cdot (7 + 1) + 5 \cdot 5 = 5625$$

$$115^2 = 115 \cdot 115 = 100 \cdot 11\,(11 + 1) + 5 \cdot 5 = 13225.$$

4. **Măsurarea unor înălțimi vizibile, dar inaccesibile, cu ajutorul unei oglinzi.** Uneori trebuie să măsurăm o anumită înălțime la care nu putem ajunge. De pildă, să măsurăm înălțimea unui copac AB așezat pe celălalt mal al unei ape. Dacă terenul este neted, așezăm o oglindă în C și ne depărtăm de ea pînă ce ochiul nostru M zărește în oglindă imaginea B a vîrfului copacului. Repetăm operația așezînd oglinda în altă poziție C' și ne depărtăm din nou pînă ce ochiul din poziția M' va vedea din nou vîrful B. Vom avea grije ca pozițiile oglinzii din C și C' să fie în linie dreaptă cu piciorul A al copacului. Procedînd așa cum am arătat se formează pe baza legilor reflexiei razelor care cad pe o oglindă plană, unghiurile egale $\sphericalangle BCA = \sphericalangle MCI$ și $\sphericalangle BC'A = \sphericalangle M'C'I'$. Scriind proporționalitatea laturilor din triunghiurile asemenea $(BCA \sim MCI)$ și $(BC'A \sim M'C'I)$ avem

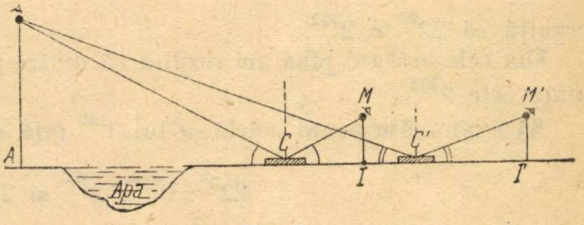


Fig. 2

$$\frac{AB}{MI} = \frac{AC}{CI} \quad \text{și} \quad \frac{AB}{M'I' \text{ (egal } MI)} = \frac{AC'}{C'I'}$$

de unde rezultă

$$\frac{AB}{MI} = \frac{AC}{CI} = \frac{AC'}{C'I'} = \frac{AC' - AC}{C'I' - CI} = \frac{CC'}{C'I' - CI}.$$

Și prin urmare

$$AB = MI \cdot \frac{CC'}{C'I' - CI}.$$

Am găsit astfel o formulă care ne dă înălțimea căutată AB cu ajutorul unor elemente cunoscute: MI (înălțimea observatorului pînă la ochi), CC' (distanța dintre cele două poziții ale oglinzii), $C'I'$ (distanța de la poziția a doua a oglinzii pînă la piciorul observatorului) și CI (distanța de la poziția întîi a oglinzii pînă la piciorul observatorului).

Măsurările trebuie făcute cu multă grije pentru ca să nu mai apară și alte erori în afară de cele inerente într-o astfel de operație.

5. Care este cel mai mare număr ce se poate scrie cu patru cifre 2 fără a folosi niciunul din semnele de operaţii aritmetice ?

Sînt posibile opt combinaţii:

$$2222;\ 222^2;\ 22^{22};\ 2^{222};\ 22^{2^2};\ 2^{22^2};\ 2^{2^{22}};\ 2^{2^{2^2}}.$$

Care din aceste numere este cel mai mare? Primul — 2222 — este evident mai mic decît următoarele trei numere. Pentru a compara 222^2 cu 22^{22} îl transformăm pe acesta din urmă astfel:

$$22^{22} = 22^{2\cdot 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Numărul $22^{22} = 484^{11}$ este mai mare decît 222^2 pentru că atît baza puterii (484) cît şi exponentul (11) sînt respectiv mai mari decît baza şi exponentul lui 222^2.

Pentru a compara 22^{22} cu 2^{222}, observăm că avem:

$$22^{22} < 32^{22}, \text{ iar } 32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110} \text{ şi cum } 2^{110} < 2^{222}$$

rezultă că $22^{22} < 2^{222}$.

Din cele arătate pînă aci rezultă că dintre primele patru numere cel mai mare este 2^{222}.

Să examinăm acum mărimea lui 2^{222} faţă de ultimele patru numere:

$$22^{2^2};\ 2^{22^2};\ 2^{2^{22}} \text{ şi } 2^{2^{2^2}}$$

Ultimul, $2^{2^{2^2}}$, din acestea din urmă se elimină din comparaţie fiind egal cu $2^{16} < 2^{222}$.

Numărul 22^{2^2} este egal cu 22^4, iar acesta este mai mic decît $32^4 = (2^5)^4 = 2^{20}$ şi cum 2^{20} este mai mic decît fiecare din numerele 2^{222}, 2^{22^2} şi $2^{2^{22}}$ rezultă că şi 22^{2^2} se elimină.

Rămîne să examinăm 2^{222}; 2^{22^2} şi $2^{2^{22}}$ care avînd toate baza 2 este mai uşor să cercetăm mărimea exponenţilor lor: 222; 22^2 şi 2^{22}.

Dintre acestea $222 < 22^2 = 484$, iar $22^2 < 2^{22}$ pentru că $22^2 = 484$ şi $2^{22} > 2^{10} = 1024$.

Rezultă că cel mai mare număr dintre cele opt combinaţii scrise la început este $2^{2^{22}}$.

Pentru a ne da seama de mărimea acestuia facem următoarele observaţii:

Numărul 2^{10} este mai mare decît 1000, iar $2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 = (2^{10})^2 \cdot 2^2$ este deci mai mare decît $1000^2 \cdot 4 = 4 \cdot 10^6$, astfel încît $2^{2^{22}} > 2^{4000000} = (2^{10})^{400000} > 1000^{400000}$.

Şi cum $1000^{400000} = (10^3)^{400000} = 10^{1200000}$ rezultă că $2^{2^{22}} > 10^{1200000}$ şi deci numărul $2^{2^{22}}$ *are mai mult de un milion două sute mii de cifre.*

6. Cum poate fi ridicată la orice putere, pe cale grafică, lungimea unui segment. Să luăm un segment a cărui lungime este a şi să construim segmen-

tele ale căror lungimi să fie a^2, a^3, a^4, a^5 ... etc. Pe două axe perpendiculare XX' şi YY' purtăm lungimile OA şi OB respectiv egale cu unitatea şi a. Ridicăm perpendicularele CB pe AB; CD pe CB; DE pe CD; FE pe DE; GF pe EF etc. ...

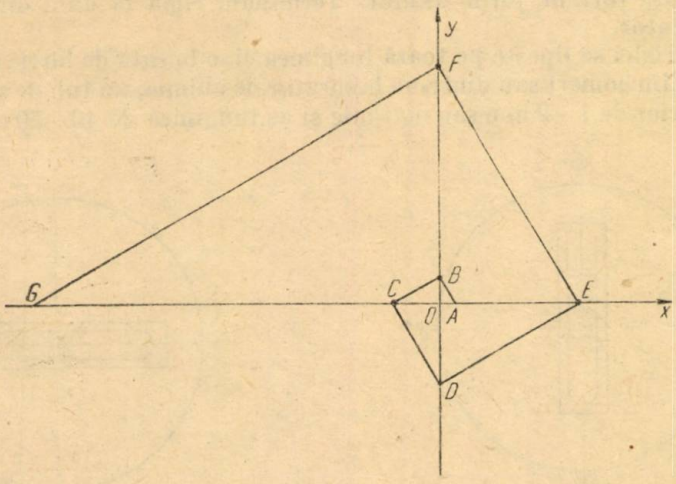


Fig. 3

Segmentele OC; OD; OE; OF; OG ... reprezintă lungimile a^2; a^3; a^4; a^5; a^6 ...

Construcţia este justificată pe baza relaţiilor metrice din triunghiurile dreptunghice formate.

Avem $OB^2 = OA \cdot OC$ deci $a^2 = 1.OC$, de unde rezultă $OC = a^2$. În triunghiul dreptunghic BCD avem: $OC^2 = OD.\ OB$ sau $a^4 = a \cdot OD$ şi prin urmare $OD = a^3$ etc.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

APARAT PENTRU VERIFICAREA LEGII BOYLE-MARIOTTE

Prof. N. RĂDULESCU

Lic. b. nr. 1 Bucureşti

SUPUNÎND o masă de gaz la compresiuni sau la dilataţiuni isoterme, volumul gazului variază invers proporţional cu presiunea suportată de gaz, adică produsul

$$p \cdot v = \text{const} \quad \text{sau} \quad p_1 v_1 = p_2 v_2 = p_3 v_3 = \ldots \qquad (1)$$

Pentru a verifica relaţia de mai sus, ne putem construi următorul aparat. Fixăm vertical într-un postament, o planşetă de lemn (poate fi o bucată de

placaj) cu dimensiunile 1 m/1 m. Pe această planşetă trasăm o circumferinţă cu raza de circa 40 cm, divizînd-o în grade (0°, 20°, 30°, 40°,...). In centrul suprafeţei circulare limitată de circumferinţă, fixăm într-un ax perpendicular pe ea, o riglă de lemn cu dimensiunile de aproximativ 60 cm/2 cm, astfel ca ea să se poată roti în jurul axului. Terminăm rigla la unul din capete, cu un ac indicator.

Pe faţa riglei se lipeşte pe toată lungimea ei, o bucată de hîrtie milimetrică. Se procură din comerţ sau dintr-un laborator de chimie, un tub de sticlă cu diametrul interior de 1—2 mm sau mai mic şi cu lungimea de 40—50 cm, pe care-l

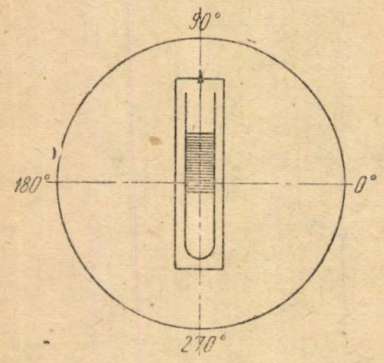


Fig. 1

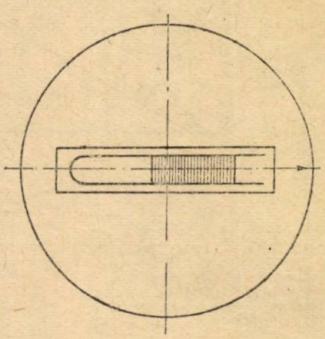


Fig. 2

închidem la unul din capete folosind flacăra unei lămpi cu spirt sau aragaz (în comerţul de sticlărie se găsesc astfel de tuburi cu pereţii groşi şi cu fir capilar în interior). In tubul astfel pregătit se introduce mercur, folosind o pipetă; prin picurare atentă, se introduce în tub o coloană de mercur neîntreruptă, lungă de 20—30 cm. Mercurul introdus în tub, limitează în partea sa închisă, un volum de aer uscat. Fixăm tubul de sticlă cu mercur pe riglă (fig. 1) legîndu-l prin două inele de aţă sau sîrmă de cupru; tubul cu mercur se va putea roti odată cu rigla în jurul circumferinţei de pe planşetă.

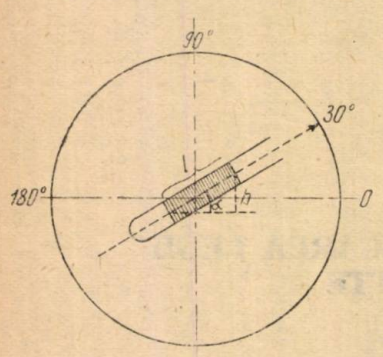


Fig. 3

Cînd tubul este vertical (fig. 1) cu deschiderea în sus ($\alpha=90°$). aerul închis sub mercur se găseşte la presiunea atmosferică plus greutatea coloanei de mercur, iar în poziţie orizontală ($\alpha = 0$) aerul de sub mercur se găseşte numai sub acţiunea presiunii atmosferice (fig. 2).

Dacă tubul face cu orizontala locului un unghi α diferit de 0° şi 90° (tubul este înclinat) presiunea suportată de volumul de aer este egală cu presiunea atmosferică plus greutatea unei coloane de mercur verticală, h, h fiind distanţa între capetele firului de mercur de lungime l (fig. 3); din hidrostatică se ştie că presiunea hidrostatică cu care apasă o coloană de lichid înclinată faţă de orizontală, pe fundul vasului, nu depinde de lungimea coloane

înclinată ci de lungimea coloanei verticală h, sau distanța dintre capetele coloanei înclinate.

Distanța h se măsoară fie direct (se poate lipi și pe suprafața planșetei hîrtie milimetrică) pe hîrtia milimetrică, fie măsurînd lungimea coloanei de mercur înclinată l și unghiul α, astfel ca $h = l \sin \alpha$ (l se citește pe hîrtia milimetrică iar α pe circumferința trasată pe planșetă).

Pentru verificarea formulei (1) nu este nevoie să măsurăm volumul aerului în cm^3 și presiunea în atmosfere, ci volumul aerului îl exprimăm prin lungimea sa citită pe hîrtia milimetrică, iar presiunea prin lungimea coloanei de mercur h, în cm. Se citește presiunea atmosferică H în cm la barometrul camerei de lucru.

Cînd tubul este vertical presiunea suportată de volumul de aer este $p = H + l$, iar cînd acesta este orizontal presiunea suportată de aerul din tub este egală cu H. Intr-o poziție înclinată, tubul fiind cu gura în sus, presiunea suportată este $p_1 = H + l \sin \alpha$; dacă tubul va fi cu gura în jos, presiunea suportată de aer va fi $p_2 = H - l \sin \alpha$.

Dînd tubului diferite poziții și citind de fiecare dată lungimea volumului de aer de sub mercur și calculînd presiunea suportată de el după relația $p = H \pm l \sin \alpha$, făcînd apoi, produsele dintre volumul aerului și presiunea respectivă, se constată egalitatea acestor produse, verificîndu-se astfel, relația (1).

CHESTIUNI DE EXAMEN *)

PROBLEME DATE LA ADMITEREA IN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (CURSUL DE ZI), BUCUREȘTI, AUGUST 1954

Grupa I

1469. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, ale cărui catete sînt $AB = 4a$, $AC = 3a$. Pe perpendiculara în A la planul acestui triunghi se ia punctul S astfel ca $AS = 4a$.

Să se calculeze aria triunghiului SBC, distanța de la punctul A la planul SBC și raza sferei înscrisă în tetraedrul $SABC$.

Printr-un punct M luat pe muchia AC astfel ca $AM = x$, se duce un plan paralel cu muchiile SA și BC. Să se arate că secțiunea tetraedrului prin acest plan este un dreptunghi. Să se determine x așa fel ca perimetrul său să aibă o lungime dată l. Discuție.

* * *

Grupa II

1470. Într-un triunghi isoscel ABC există relația:

$$l \cos A + 2m \cos B = l$$

în care A este unghiul dela vîrf și l, m, t cantități pozitive, iar $m > 2l$.

a) Să se calculeze unghiurile triunghiului pentru $t = m + \frac{l}{2}$.

---

*) La aceste probleme se primesc soluții pînă la 1 iunie 1955.

b) Considerînd pe t variabil, iar pe m și l fixe, să se determine între ce limite trebuie să varieze t pentru ca problema să admită o soluție reală?

* * *

PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (CURSUL SERAL) BUCUREȘTI, AUGUST 1954

1471. O paralelă la latura BC a triunghiului ABC, taie laturile AB și AC în E și F respectiv. Să se determine lungimea paralelei astfel încît:

a) perimetrul triunghiului AEF să fie egal cu perimetrul trapezului $BCFE$;

b) D fiind un punct pe latura BC, triunghiul DEF să aibă aria maximă.

Să se calculeze aria triunghiului AEF în cazul *a)*, presupunînd $a = 10\ m$, $b = 8\ m$, $c = 12\ m$.

* * *

1472. Să se rezolve ecuația

$$\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$$

* * *

1473. Să se determine toate valorile posibile ale parametrului m, astfel încît fracția

$$\frac{x^4 + m^2x^3 + (m+1)x^2 + (4m+1)x - 3}{x^2 - 1}$$

să se simplifice.

Să se facă simplificarea corespunzătoare fiecăreia din valorile obținute pentru m.

* * *

PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (SECȚIA FĂRĂ FRECVENȚĂ) BUCUREȘTI, SEPTEMBRIE 1954

1474. *a)* Se dă egalitatea $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{a+c}{a-c}$ să se exprime x în funcție de y, apoi y în funcție de x.

b) Pentru care valori ale lui m ecuația

$$(2m-3)x^2 - 2(3m-1)x + 4(m+2) = 0$$

are rădăcini egale și în acest caz să se rezolve.

* * *

1475. *a)* Un cerc de rază R este împărțit în 12 părți egale prin punctele A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L. Să se calculeze în funcție de R, lungimile coardelor AB, AC, AD, AE și AF.

b) Să se verifice identitatea

$$\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y) = \sin 2x \sin 2y$$

* * *

DIN PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ, IAȘI AUGUST 1954

1476. — Să se rezolve și discute sistemul

$$xy + 2x + 2y + a = 0; \qquad xy + x + y - 1 = 0$$

* * *

c) Să se arate că volumul trunchiului de con este dat de expresia:

$$V = \frac{\pi h^3}{6} \cdot \frac{(1 + \cos\alpha)(2 + \cos\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

(verificare pentru $\alpha = 0$).

(« Olimpiada Matematică », Bucureşti 4 aprilie 1954)

1490. Pe înălţimea AD a unui triunghi ABC se ia un punct oarecare M care se proiectează pe laturile AC şi AB, respectiv în N şi P.

a) Să se demonstreze că $\sphericalangle BMC = \sphericalangle A + \sphericalangle PDN$.

b) H fiind ortocentrul triunghiului ABC, să se arate că proiecţiile segmentului pe laturile AC şi AB sînt invers proporţionale cu acele laturi.

c) Să se arate că condiţia necesară şi suficientă pentru ca două unghiuri ale unui patrulater să fie egale este ca bisectoarele celorlalte două unghiuri să fie paralele.

(« Olimpiada Matematică », Bucureşti 4 aprilie 1954)

1491. — *a)* Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{abc}{x(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

b) Verifică $x = 0$ ecuaţia?

c) Să se deducă că într-un triunghi, între raza cercului înscris r, razele cercurilor exînscrise r_a, r_b, r_c şi raza cercului circumscris R, avem relaţia

$$r_a + r_b = r_c = r + 4R.$$

(« Olimpiada Matematică », Timişoara 4 aprilie 1954)

1492. — *a)* In triunghiul ABC fie un punct mobil pe latura AB. Paralela din B la CM taie latura AC în N. Să se arate că aria triunghiului AMN este constantă.

b) Dreapta MN taie pe BC în P, iar AP taie pe CM în Q. Să se arate că punctul Q descrie o paralelă la latura AB.

c) Fie M şi N, două puncte mobile situate pe muchiile AB, AC ale tetraedrului $ABCD$. Planul dus prin B, paralel cu MCD, taie pe AC în Q; planul dus prin Q paralel cu BDN taie pe AD în P Să se arate că volumul piramidei $AMNP$ este constant.

(« Olimpiada Matematică », Timişoara 4 aprilie 1954)

ANUL I ŞCOLI PEDAGOGICE

1493. — După terminarea spectacolului de operă, au plecat acasă pe jos, 174 persoane, iar celelalte s-au dus cu tramvaiul. Pentru transportul acestora s-au folosit 18 vagoane de tramvai. In fiecare vagon 5 persoane neavînd loc pe scaun, au stat în picioare. Pentru ca fiecare persoană să aibă loc pe scaun ar fi trebuit încă 3 vagoane, dar atunci în ultimul vagon ar fi rămas 6 locuri libere. Cîte persoane au fost la operă?

(« Olimpiada Matematică », Bucureşti 4 aprilie 1954)

ANUL II ŞCOLI PEDAGOGICE

1494. — Din două oraşe A şi B au pornit în acelaşi timp 2 maşini care trebuiau să se întîlnească în oraşul C, situat între A şi B. După ce prima a parcurs $\frac{1}{3}$ din drum, iar a doua $\frac{1}{5}$ din drum, fiecărei maşini i-au rămas de parcurs distanţe egale.

a) Ştiind că distanţa între A şi B este de 363 km, să se afle la ce distanţă de oraşul A se află oraşul C.

b) Dacă cele două maşini ar fi pornit cu viteze diferite, s-ar fi întîlnit la 13 km mai aproape de A de la mijlocul drumului. Să se afle cîţi km ar fi parcurs fiecare maşină în acest caz.

(« Olimpiada Matematică », Bucureşti 4 aprilie 1954)

ANUL III ŞCOLI PEDAGOGICE

1495. — Un S.M.T. a repartizat unei întovărăşiri un număr de tractoare ca să are 245,70 ha în timp de 7 zile. După două zile şi jumătate de lucru, două tractoare sînt retrase şi în schimb, în dimineaţa zilei a cincea, S.M.T. trimite un tractor cu şenile care ară cîte 11,70 ha pe zi şi astfel, se termină aratul la timp. Cît ară un tractor pe zi şi cîte tractoare au fost repartizate de S.M.T.? Soluţie aritmetică.

(« Olimpiada Matematică », Iaşi 4 aprilie 1954)

ANUL I ŞCOLI MEDII TEHNICE

1496. — În interiorul unui unghi xOy de 60° se află un punct A. Se cere:

a) Să se construiască un cerc tangent la laturile unghiului xOy şi care să treacă prin punctul A.

b) Cîte soluţii admite problema?

c) Ştiind că raza cercului construit este r, să se calculeze aria figurii mărginită de laturile unghiului şi dintre cel mai mic dintre arcele cercului cuprins între punctele de tangenţă.

(« Olimpiada Matematică », Bucureşti 4 aprilie 1954)

1497. — Un mecanism are două piese mobile M şi N care se mişcă pe şanţurile drepte OA şi OB. Aceste piese pornesc deodată din capetele A şi B situate la 52 cm unul de altul şi se îmbină una cu alta în capătul comun O, după care revin în poziţiile iniţiale A şi B. Piesa M se mişcă cu o iuţeală de 8 cm/s, piesa N cu o iuţeală de 15 cm/s, iar unghiul AOB dintre axele celor două şanţuri este de 60°. Să se calculeze:

a) lungimile curselor AO şi BO ale fiecărei piese.

b) durata unei curse simple;

c) distanţa dintre piesele M şi N după t secunde de la pornirea lor din A şi B, dacă este mai mică decît durata unei curse simple.

(« Olimpiada Matematică », Bucureşti 4 aprilie 1954)

ANUL II ŞCOLI MEDII TEHNICE

1498. — Fie V vîrful şi ABC baza unei piramide triunghiulare. Ştiind că toate feţele laterale au în V cîte un unghi de 60° şi notînd cu $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$, să se calculeze muchiile BC şi AB în funcţie de a, b şi c. Să se demonstreze că unghiul BAC este drept, dacă avem relaţia:

$$bc - a(b + c) + 2a^2 = 0$$

(« Olimpiada Matematică », Timişoara 4 aprilie 1954)

1499. — Se consideră un triunghi $MF F'$ cu baza $FF' = 2c$ în care suma laturilor MF şi MF' este egală cu $2a$. Notînd cu α şi β unghiurile din F şi F' ale triunghiului, să se demonstreze relaţia:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a - c}{a + c}.$$

(« Olimpiada Matematică », Timişoara 4 aprilie 1954)

* * *

NOTĂ. — Alte probleme propuse la Olimpiade vor mai apare ca probleme propuse în numerele următoare.

1477. – Să se arate că un triunghi este isoscel dacă

$$a\operatorname{tg}A + b\operatorname{tg}B = (a+b)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$$

* * *

1478. Pe laturile unui triunghi dreptunghic se construiesc triunghiuri asemenea între ele. Să se arate că aria triunghiului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor triunghiurilor construite pe catete.

* * *

1479. Să se verifice că ecuația $2x^3 + (4p+1)x^2 + 2(p+1)x + 1 = 0$ are o rădăcină egală cu $-\frac{1}{2}$. Să se discute apoi, natura celorlalte rădăcini.

* * *

1480. În ce triunghi poate avea loc relația

$$b\sin B + c\sin C = a/\sin A$$

* * *

1481. *a)* Se consideră triunghiul cu laturile $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. Să se calculeze aria lui precum și volumul solidului născut prin rotirea triunghiului în jurul laturei sale mai mari.

b) Pe un cerc cu centrul în O se ia un punct A. Dintr-un punct P situat pe tangenta în A, se duce a doua tangentă PT la cerc (T fiind punctul de contact). Paralela prin T la AP taie dreapta OP în M. Să se arate că patrulaterul $APTM$ este un romb.

* * *

PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC IAȘI, AUGUST 1954

1482. Suma muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este de 24 m, diagonala de $\sqrt{14}$ m și aria bazei de 2 m². Să se determine lungimile muchiilor. Numerele găsite pot fi măsurile laturilor unui triunghi?

* * *

1483. – Să se găsească toate soluțiile ecuației:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$$

* * *

1484. Se consideră un unghi xoy. Pe bisectoarea interioară se ia un punct M și cu OM drept coardă comună, se descriu două cercuri oarecare. Fie B, respectiv C, punctele în care primul cerc taie laturile unghiului; de asemenea, fie B', respectiv C', punctele în care cel de-al doilea cerc taie laturile triunghiului. Să se arate că $BB' = CC'$

* * *

DIN PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC CLUJ. AUGUST 1954

1485. Se dă ecuația

$$3x^2 - 2(m+1)x + m = 0$$

a) Să se arate că ecuația are totdeauna rădăcinile reale.

b) Să se studieze semnul rădăcinilor cînd parametrul variază.

c) Cît trebuie să fie m pentru ca între rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației date să existe relația

$$x_1^2 + x_1^2 = \frac{4}{9}$$

* * *

1486. În triunghiul ABC se unesc punctele D și E, mijloacele laturilor AB și AC, apoi se duce DF perpendiculară pe BC. Cunoscînd DE egal cu 10 cm, $DF = 5$ cm și $B = 30°$, se cere să se rezolve triunghiul (laturile, unghiurile, suprafața).

DIN PROBLEMELE DATE LA OLIMPIADA MATEMATICĂ 1954, ETAPA III-a

1487. Să se calculeze expresia:

$$\frac{(1+i)^r - (1-i)^s}{(1-i)^r + (1+i)^s}$$

în care r și s înseamnă respectiv rangul termenului independent de x și cel care are pe y^{-15} în dezvoltarea binomului

$$\left(xy + \frac{1}{x^2 y^3}\right)^{21}$$

(« Olimpiada Matematică », Timișoara 4 aprilie 1954)

1488. Se consideră patru tetraedre regulate cu laturile a, $2a$, $3a$, $4a$.

a) Să se arate că:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{a\sqrt{2}}{6}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^2$$

unde V_1, V_2, V_3, V_4 reprezintă volumele și m_1, m_2, m_3, m_4 sînt segmentele care unesc mijloacele muchiilor opuse în cele patru tetraedre date.

b) În cazul cînd bazele tetraedrelor date sînt situate în același plan avînd fiecare două dintre vîrfuri situate pe aceiași dreaptă din planul dat, în punctele consecutive A, A_1, A_2, A_3, A_4, $(AA_1 = a,\ A_1A_2 = 2a,\ A_2A_3 = 3a,\ A_3A_4 = 4a)$, avem relația:

$$3\,\overline{S_1S_2}^2 - 5\,\overline{S_2S_3}^2 = 7\,S_3S_4^2 = (1 + 4^3)\,a^2;$$

unde S_1, S_2, S_3, S_4 sunt vîrfurile nesituate în planul dat.

c) Să se generalizeze.

(« Olimpiada Matematică », Timișoara 4 Aprilie 1954)

1489. Generatoarea și axa unui con de rotație fac între ele unghiul α. Se taie conul cu două plane P și Q perpendiculare pe axa de rotație, avînd între ele distanța h. În acest fel, ia naștere un trunchi de con. Pentru o anumită poziție a planelor P și Q aria laterală a trunchiului de con este egală cu suma ariilor cercurilor de bază. *În acest caz*, se cere:

a) Să se arate că între înălțimea h și cele două raze R și r ale cercurilor de bază, există relația:

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$$

b) Să se calculeze razele cercurilor de bază și să se arate că ele au ca expresii:

$$\frac{h}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad \text{și} \quad \frac{h}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1214

Considerăm un strat de zăpadă gros de 10 cm la 0°C. Cîtă căldură solară va trebui să primească pe m² de suprafață pentru a răspîndi în aer vapori de apă a căror temperatură să fie de 12°C. Se presupune că densitatea zăpezii este 0,077, iar căldura de vaporizare a apei la 12°C este 600. Cîte kg de cărbune va trebui să ardă pentru a se produce același efect, dacă se știe că 1 g de cărbune degajează prin ardere 8000 cal-g?

Virgil Atanasiu

Soluție. Greutatea în grame pentru 1 m² de zăpadă este:

$$10\,000 \cdot 10 \cdot 0{,}077 = 7700 \text{ g}.$$

Căldura necesară pentru a se topi la 0° este $Q' = 7700 \cdot 80$ calorii. Căldura necesară pentru a ridica temperatura apei de la 0° la 12° este

$$Q'' = 7700 \cdot 12 \text{ calorii}$$

Căldura necesară pentru ca apa la 12° să treacă în vapori la 12° este

$$Q''' = 7700 \cdot 600 \text{ calorii}$$

Căldura totală

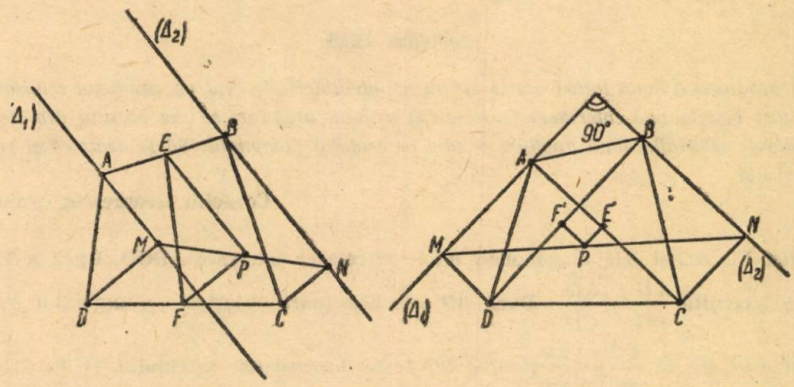
$$Q = Q' + Q'' + Q''' = 7700\,(80 + 12 + 600) = 538400 \text{ calorii}.$$

Cantitatea de cărbuni ce vor trebui să ardă este

$$G = \frac{5328400}{8000} = 666 \text{ g} = 0{,}666 \text{ kg}.$$

Problema 1215

Fie ABCD un patrulater oarecare. Notăm cu M și N, picioarele perpendicularelor coborîte din D și C pe dreptele paralelel Δ_1 și Δ_2 ce trec respectiv prin punctele A și B. Să se găsească



locul geometric al mijlocului P al segmentului MN. Se va considera și cazul cînd dreptele Δ_1 și Δ_2 sînt perpendiculare între ele.

Mihail I. Popescu, student, București

Soluție. Notăm cu E și F respectiv mijloacele laturilor AB și CD. Dreptele PE și PF unind mijloacele laturilor neparalele în trapezele $ABNM$ și $CDMN$, sînt paralele cu bazele; adică $EP \perp FP$. De aici deducem ca locul lui P este cercul descris pe $\overline{FE}$ ca diametru (vezi fig.) Fie E' și F' mijloacele diagonalelor AC și BD. Printr-un raționament analog celui de mai sus, avem: $E'P \perp F'P$. Deci locul lui P este cercul de diametru $\overline{E'F'}$.

Problema 1216

Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele AC și BD perpendiculare în O, iar M, N, P, Q, picioarele perpendicularelor duse din O respectiv pe AB, BC, CD, DA. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. Să se cerceteze și reciproca.

* * *

Soluție dată de *Marius Vlaga* Arad. Trebuie să demonstrăm că:

$$\sphericalangle QMN + \sphericalangle QPN = 180°$$

Ducînd perpendicularele din O pe laturile patrulaterului $ABCD$ s-au format 4 noi patruatere dar inscriptibile: $AMOQ$, $BMON$, $CPON$ și $DPOQ$. Rezultă că: $\sphericalangle QAO = \sphericalangle QMO$; $\sphericalangle NBO = \sphericalangle NMO$; $\sphericalangle NCO = \sphericalangle NPO$ și $\sphericalangle QDO = \sphericalangle QPB$.

$$\begin{aligned}\sphericalangle QMN + \sphericalangle QPN &= \sphericalangle QMO + \sphericalangle NMO + \sphericalangle NPO + \sphericalangle QPO = \\ &= \sphericalangle QAO + \sphericalangle NBO + \sphericalangle NCO + \sphericalangle QDO = \\ &= (\sphericalangle QAO + \sphericalangle QDO) + (\sphericalangle NBO + \sphericalangle NCO) = 90° + 90° = 180°\end{aligned}$$

Reciproca: Știind că patrulaterul $MNPQ$ e inscriptibil, să demonstrăm că $AC \perp BD$ Pornim chiar invers și obținem:

$$(\sphericalangle QAO + \sphericalangle QDO) + (\sphericalangle NBO + \sphericalangle NCO) = 180°$$

Astfel că suma celor două unghiuri opuse la vîrf (egale între ele) este egală cu: $2 \cdot 180° - 180° = 180°$. Fiecare unghi va avea deci, 90°. Prin urmare, dreptele AC și BD sînt perpendiculare.

Problema 1218

Dacă produsul a două laturi opuse ale unui patrulater este egal cu produsul celorlalte două laturi, atunci bisectoarele interioare (exterioare) a două unghiuri se taie pe una din diagonale; iar bisectoarele celorlalte două unghuri se taie pe cealaltă diagonală. Să se arate că și reciproca este adevărată.

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluție. Fie AC și BD diagonalele unui patrulater oarecare ABCD. Dacă $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, rezultă $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$. Dacă BO este bisectoarea interioară a unghiului B, atunci triunghiul ABC ne dă $\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{CO}$; dacă DO' este bisectoarea unghiului D în triunghiul ADC, atunci $\frac{AD}{CD} = \frac{AO'}{CO'}$. Din ultimele două proporții rezultă $\frac{AO}{CO} = \frac{AO'}{CO'}$ deci O se confundă cu O'.

Tot din ipoteză rezultă $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB}$ ceea ce ne conduce la concurența bisectoarelor din A și C, cu diagonala BD.

Reciproce. Dacă bisectoarele unghiurilor B și D se întîlnesc în O pe AC, rezultă $\frac{BC}{BA} = \frac{CO}{OA}$ și $\frac{CD}{DA} = \frac{CO}{OA}$, deci, $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Problema 1236

Să se demonstreze că un număr N_{10} este divizibil cu 37 dacă împărțindu-l în grupe de 3n cifre de la dreapta spre stînga, suma numerelor astfel formate se divid prin 37. Să se aplice această regulă numărului N_{10} = 1 357 294 860 549 832 761 403 217 982.

Marius V. Iosifescu, elev, Pitești

Soluția autorului. Este suficient să observăm că $10^3 = 999 + 1 = M37 + 1$, la fel, $10^{3n} = M\ 37 + 1$. Ultima egalitate demonstrează enunțul.

Aplicație — Împărțim numărul în grupe de 27 cifre, apoi numărul obținut în grupe de 9 cifre:

$$N_{10} = 375\ 294\ 860\ 549\ 832\ 761\ 403\ 217\ 983 = 403\ 217\ 982 + 549\ 832\ 761 + 375\ 294\ 860 = 1\ 328\ 345\ 604 \pmod{37}$$

$$N_{10} = 328\ 345\ 604 + 1 = 328\ 345\ 605 = 605 + 345 + 328 = 1\ 278 = 278 + 1 = 279 \pmod{37}.$$

Numărul 279 nu se divide prin 37 deci, numărul N_{10} nu este divizibil cu 37.

Problema 1240

Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ *știind* $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ *și că unghiul este cuprins între* 0° *și* 45°.

(Examen de admitere la Politehnică, Iași 1953)

Soluție. Formăm o ecuație în funcție de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{7}{5}.$$

Înlocuim: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$, avem: $5(1 + 2t - t^2) = 7(1 + t^2)$ sau $12t^2 - 10t + 2 = 0$, deci, $6t^2 - 5t + 1 = 0$.

Rezultă: $t_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{2}$ și $t_2 = \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{3}$.

Cînd $0° < \alpha < 45°$ trebuie să avem: $0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\ 22°30'$ adică $0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 0{,}41421$.

Deci soluţia valabilă este $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

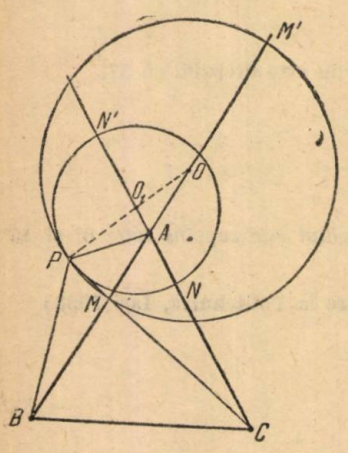
Problema 1257

Să se construiască un punct P în planul triunghiului echilateral ABC, astfel ca să avem $\frac{PA}{1} = \frac{PB}{2} = \frac{PC}{3}$ şi să se calculeze distanţa PA în funcţie de latura triunghiului ABC.

Gh. Bazacov, T. Severin

Soluţie. Din problemă se deduce că $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{PA}{PC} = \frac{1}{3}$. Dacă ţinem seamă de primul raport înseamnă că P trebuie să fie un punct al locului geometric al punctelor din plan a căror distanţe la punctele A şi B să fie într-un raport egal cu $\frac{1}{2}$, adică pe cercul care are ca diametru distanţa punctelor M şi M' ce împarte segmentul AB în raportul $\frac{1}{2}$.

În mod analog, dacă ţinem seama şi de cel de al doilea raport, punctul P trebue să se afle şi pe cercul cu diametrul cît distanţa NN', N şi N' fiind cele două puncte care împart segmentul AC în raportul $\frac{1}{3}$. Deci P se va afla la intersecţia acestor două cercuri.



În concluzie, construcţia lui P se reduce la construcţia celor două cercuri cu centrele în O şi O_1.

Rămîne să cercetăm dacă cele două cercuri sînt secante sau tangente interior, pînă a vedea dacă sînt 2 puncte sau unul singur, care să răspundă problemei, calculînd distanţa PA.

Urmărind figura putem deduce imediat, în funcţie de latura triunghiului cele două raze R şi r; notăm cu a lungimea unei laturi din triunghiul dat. Avem:

$$MM' = MA + AM' = \frac{a}{3} + a = \frac{4a}{3} \quad \text{deci} \quad R = \frac{2a}{3}$$

$$NN' = NA + AN' = \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{3a}{4} \quad \text{deci} \quad r = \frac{3a}{8}.$$

Să calculăm distanţa centrelor din triunghiul AOO_1, care are un unghi de 60°, avem:

$$OO_1^2 = AO^2 + AO_1^2 - 2 \cdot AO \cdot AO_1 \cos 60°$$

$$OO_1^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{64} - \frac{a^2}{24} = \frac{49a^2}{9.64} \quad \text{deci} \quad OO_1 = \frac{7a}{24}$$

rezultă că $OO_1 = R - r$ şi deci cercurile sînt tangente interior. Există atunci un singur punct P care să satisfacă condiţiile problemei.

Calcularea distanței PA. Ne folosim de triunghiul APO unde cunoaștem

$$AO = \frac{a}{3},\ PO = R = \frac{2a}{3}.\ OO_1 = \frac{7a}{24},\ PO_2 = r = \frac{3a}{8} \text{ și}$$

$$AO_1 = r - AN = \frac{3a}{8} - \frac{a}{4} = \frac{a}{8}.$$

Aplicăm relația lui Stewart:

$$PA^2 \cdot OO_1 + AO^2 \cdot PO_1 = AO_1^2 \cdot PO + PO_1 \cdot OO_1;$$

$$PA^2 \cdot \frac{7a}{24} + \frac{a^2}{9} \cdot \frac{3a}{8} = \frac{a^2}{64} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} \cdot \frac{3a}{8} \cdot \frac{7a}{24}$$

amplificînd cu 24:

$$7a \cdot \overline{PA}^2 + a^3 = \frac{a^3}{4} + \frac{7a^3}{4} \quad ; \quad \text{deci } \overline{PA} = \frac{a}{7}.$$

Problema 1259

Suma pătratelor distanțelor oricărui punct din spațiu la două vîrfuri opuse ale unui paralelipiped dreptunghi este egală cu suma pătratelor distanțelor aceluiași punct față de oricare alte două vîrfuri opuse ale aceluiași paralelipiped. Care este locul geometric al punctelor pentru care suma de mai sus este egală cu suma pătratelor dimensiunilor paralelipipedului?

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluție. Fie AC', BD', CA' și DB' diagonalele paralelipipedului, care sînt egale și concurente în punctul O. Fie P, un punct oarecare din spațiu, în triunghiul PAC', PO este mediană, deci:

$$AP^2 + C'P^2 = 2PO^2 + \frac{AC'^2}{2}.$$

În triunghiul PDB', avem analog:

$$DP^2 + B'P^2 = 2PO^2 + \frac{DB'^2}{2}.$$

La fel și în celelalte două triunghiuri PCA' și $PD'B$. Dar cum $AC' = DB' = BD' = A'C$, rezultă: $AP^2 + C'P^2 = DP'^2 + B'P^2 = \ldots$

Acum, dacă $2PO^2 + \frac{AC'^2}{2} = L^2 + l^2 + I^2$, unde L, l și I sînt dimensiunile paralelipipedului, și cum $\frac{AC'^2}{2} = \frac{L^2 + l^2 + I^2}{2}$, rezultă:

$$PO^2 = \frac{L^2 + l^2 + I^2}{4} = \frac{AC'^2}{4} = \left(\frac{AC'^2}{2}\right).$$

Deci locul este sfera circumscrisă paralelipipedului.

Problema 1260

Considerăm un patrulater convex $ABCD$. Fie M, N, P punctele care împart segmentele DA, DB, DC, într-un același raport K. Fie Q, R, S mijloacele segmentelor BC, AC, AB. Să se demonstreze că dreptele MQ, NR, PS sînt concurente.

Marius V. Iosifescu, elev, Pitești

Soluție. — Este ușor de văzut că $MN \parallel QR$, $NP \parallel SR$, $MP \parallel QS$. Triunghiurile MNP, QRS fiind omotetice admit un centru de omotetie care se află la intersecția dreptelor ce unesc vîrfurile omoloage. Rezultă că dreptele MQ, NR, PS sînt concurente.

In cazul $K = -1$ (M, N, P mijloacele segmentelor DA, DB, DC), obținem teorema cunoscută: dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse și dreapta care unește mijloacele diagonalelor într-un patrulater sînt trei transversale concurente.

Problema 1265

Să se arate că în orice triunghi avem:

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} > 3$$

De aci să se deducă:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C > \frac{3}{2}$$

Notațiile sînt cele obișnuite.

Gh. I. Bercea, student, Timișoara

Soluția autorului avem:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{h_c}\right)^2 > 0$$

sau

$$\sum \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{h_a^2}\right) > \sum \frac{2}{a \cdot h_a} = \frac{3}{S}$$

Cum însă:

$$h_a < b\,;\ h_b < c\,;\ \ h_c < a\,;$$

avem și

$$\frac{1}{h_a} > \frac{1}{b}, \ldots$$

au

$$\frac{1}{h_a^2} > \frac{1}{b^2}\,.$$

Inlocuind în (1) pe

$$\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2} \text{ cu } \frac{1}{h_c^2}, \frac{1}{h_a^2}, \frac{1}{h_b^2}$$

relația (1) e cu atît mai mult adevărată, deci

$$\frac{2}{h_a^2} + \frac{2}{h_b^2} + \frac{2}{h_c^2} > \frac{3}{S}$$

sau

$$\frac{2S}{h_a^2} + \frac{2S}{h_b^2} + \frac{2S}{h_c^2} > 3.$$

Inlocuim $2S = ah_a = bh_b = ch_c'$, obținem

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} > 3 \qquad (2)$$

2. Ţinînd seamă că:

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B; \ldots$$
$$h_a = b \sin C = c \sin B; \ldots,$$

relaţia (2) devine;

$$\sum \left(\frac{b \cos C + c \cos C}{b \sin C} \right) > 3$$

sau

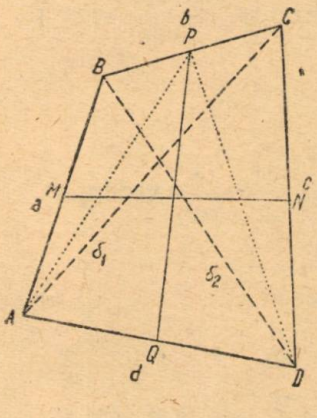
$$\sum (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) > 3. \quad \text{Deci,} \quad \sum \operatorname{ctg} A > \frac{3}{2}.$$

Problema 1266

Intr-un patrulater oarecare $ABCD$ se notează cu M, P, N, Q respectiv mijloacele laturilor $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Să se stabilească relaţia.

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = 2\,(PQ^2 - MN^2)$$

Soluţie. — Ducem diagonalele $AC = \delta_1$, $BD = \delta_2$ şi unim P cu A şi D. In triunghiurile ABC şi DBC, avem.



$$AP^2 = \frac{a^2 + \delta_1^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad \text{şi} \quad DP^2 = \frac{c^2 + \delta_2^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

iar în triunghiul PAD

$$PQ^2 = \frac{AP^2 + DP^2}{2} - \frac{d^2}{4}.$$

Făcînd înlocuirile, obţinem.

$$4PQ^2 = a^2 + c^2 - (b^2 + d^2) + \delta_2^2 + \delta_1^2 \qquad (1)$$

în mod analog.

$$4MN^2 = b^2 + d^2 - (a^2 + c^2) + \delta_1^2 + \delta_2^2 \qquad (2)$$

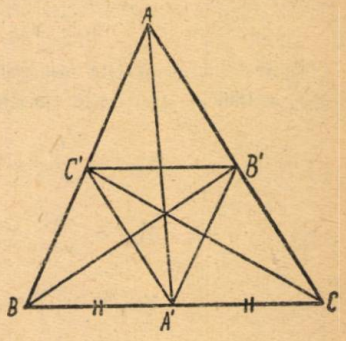
Scăzînd (2) din (1), obţinem relaţia cerută.

Prin adunarea relaţiilor (1) şi (2) ajungem la proprietatea cunoscută: $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2(MN^2 + PQ^2)$.

Problema 1268

In triunghiul oarecare ABC se duc dreptele concurente AA', BB', CC' astfel încît AA' şi BB' sînt respectiv mediană şi bisectoare în triunghiul considerat. Să se construiască grafic triunghiul ABC cunoscîndu-se triunghiul $A'B'C'$.

Matei I. Nazarie, elev, Bucureşti



Soluţie. — Aplicînd teorema lui C e v a în triunghiul ABC, obţinem $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AC'}{C'B}$, deci, $B'C \parallel BC$ şi triunghiul $BC'B'$ este isoscel. Ducem cercul cu centrul în C' şi de rază $C'B'$.

Ţinînd seamă de aceste observaţii, construcţia triunghiului este următoarea:

Cercul intersectează paralela la $B'C'$ dusă prin A' în B; intersectînd BC' cu mediana triunghiului $A'B'C'$ referitoare la vîrful A', obţinem vîrful A, iar C este situat la intersecţia dreptelor BA', AB'. Construcţia este totdeauna posibilă.

Problema 1270

Prin arderea în aer a 100 N m³ (normal m³) de oxid de carbon, în condiţii normale, se dezvoltă o cantitate de gaze şi căldură.

Care este cantitatea de aer necesară arderii în N m³ şi căldura dezvoltată prin ardere în kcal?

Care este cantitatea de gaze arse în N m³ şi compoziţia ei în procente de volum, cunoscînd că greutăţile atomice ale oxigenului, carbonului şi azotului sînt respectiv 16, 12, 14.

Nicolae Sălan, student, Iaşi

Soluţie. Ecuaţia termochimică după care se petrece arderea în aer în condiţiile normale este:

$$2CO + O_2 + 3{,}76\ N_2 = 2 \cdot CO_2 + 3{,}76\ N_2 + 2 \cdot 68200 \cdot \frac{\text{kcal}}{2\ \text{kmol}\ CO} \cdot$$

Pentru 1 kg CO ecuaţia devine:

$$1\ \text{kg}\ CO + \frac{2 \cdot 16}{2 \cdot 28}\ \text{kg} \cdot O_2 + \frac{3{,}76 \cdot 28}{2 \cdot 28} \cdot \text{kg}N_2 = \frac{2 \cdot 44}{2 \cdot 28}\ \text{kg}\ CO_2 + \frac{3{,}76 \cdot 28}{2 \cdot 28}\ \text{kg}\ N_2 + \\ + \frac{2 \cdot 28200}{2 \cdot 28} \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot CO} \cdot$$

Împărţind prin greutăţile specifice avem:

$$\frac{1}{\gamma_{CO}} \cdot Nm^3CO + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{\gamma_{O_2}} Nm^3N_2 + \frac{3{,}76}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_{N_2}} \cdot Nm^3\ N_2 = \frac{11}{7} \cdot \frac{1}{\gamma_{CO_2}} Nm^3CO_2 + \\ + \frac{3{,}76}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_{N_2}} Nm^3N_2 + 2430 \cdot \frac{\text{kcal}}{\frac{1}{\gamma_{CO}} Nm^3 \cdot CO} \cdot$$

Înmulţind cu γ_{CO} obţinem ecuaţia termochimică pentru 1 Nm^3CO:

$$1\ Nm^3 \cdot CO + \frac{4}{7} \cdot \frac{\gamma_{CO}}{\gamma_{O_2}} Nm^3O_2 + \frac{3{,}76}{2} \cdot \frac{\gamma_{CO}}{\gamma_{N_2}} \cdot Nm^3N_2 = \frac{11}{7} \cdot \frac{\gamma_{CO}}{\gamma_{CO_2}} Nm^3 \cdot CO_2 + \\ + \frac{3{,}76}{2} \cdot \frac{\gamma_{CO}}{\gamma_{N_2}} \cdot Nm^3N_2 + 2430 \cdot \gamma_{CO} \cdot \frac{\text{kcal}}{Nm^3CO} \cdot$$

Cunoscînd greutăţile moleculare şi volumul molecular pentru elementele ce intră în reacţie, calculăm greutăţile specifice:

$$\gamma_{CO} = \frac{M_{CO}}{22{,}4} = \frac{12 + 16}{22{,}4} = \frac{82}{22{,}4} = 1{,}25\ \frac{\text{kg}\ CO}{Nm^3CO}$$

$$\gamma_{O_2} = \frac{M_{O_2}}{22{,}4} = \frac{32}{22{,}4} = 1{,}426\ \frac{\text{kg}}{Nm^3}$$

$$\gamma_{N_2} = \frac{M_{N_2}}{22{,}4} = \frac{28}{22{,}4} = 1{,}251\ \frac{\text{kg}}{Nm^3}$$

$$\gamma_{CO_2} = \frac{M_{CO_2}}{22{,}4} = \frac{44}{22{,}4} = 1{,}977\ \frac{\text{kg}}{Nm^3}$$

Efectuînd toate calculele, ecuația devine:

$$1\ Nm^3CO + 0{,}5\ Nm^3O_2 + 1\ 88\ Nm^3N_2 = 0{,}995\ Nm^3CO_2 + 1{,}88\ Nm^3N_2 + 3010\ \frac{kcal}{Nm^3CO}\ .$$

Aerul necesar arderii pentru 1 Nm^3CO este:

$$0{,}5\ Nm^3O_2 + 1{,}88\ Nm^3N_2 = 2{,}38\ Nm^3 \text{ aer.}$$

Pentru 100 Nm^3CO cantitatea de aer este 238 Nm^3 aer.

Căldura dezvoltată este: $3040 \cdot 100 = 304000$ kcal.

Cantitate de gaze va fi:

$$100(0{,}995\ Nm^3CO + 1{,}88\ Nm^3N_2) = 288\ Nm^2 \cdot \text{gaze.}$$

În procente avem: 65,3 % $Nm^3 \cdot N_2$ și 34,7 % Nm^3CO_2.

Problema 1271

O particulă α parcurgînd spațiul a într-un cîmp electric de intensitate E. astfel ca forța ce acționează asupra ei este perpendiculară pe direcția mișcării, suferă deplasarea S_E. Știind că ar fi suferit aceeași deplasare în urma parcurgerii spațiului a în cîmpul magnetic de intensitate H și că: $E \cdot (a \cdot H^{-2}) = 2 \cdot 10^{14}$ u.e.s./g. cm, să se determine deplasarea S_E.

C. Em. Racoveanu, student, București

Soluție. Se știe că: 1) $S_E = \frac{E \cdot e \cdot a^2}{2\,mu^2}$ și 2) $S_H = \frac{H \cdot e \cdot a^2}{2\,mu}$ unde S_H este deplasarea suferită în cîmpul magnetic.

Ridicînd pe (2) la patrat și făcînd raportul dintre (2) și (1), avem:

$$S_H = 2\frac{e}{m} \cdot \frac{H^2a^2}{E} \text{ dar, } \frac{e}{m} = 144 \cdot 10^{12}\ u.e.s.$$

și din enunț deducem: $\frac{H^2 \cdot a^2}{E} = 1$ g. cm: $2.\ 10^{14}$ u.e.s. (cgs).

Deci, $S_H = S_E = 1{,}44$ cm.

Problema 1294

Un șofer pretinde pentru efectuarea unui drum de 27 km. următorul tarif: 0,50 lei pentru fiecare km/h al vitezei cu care mașina va parcurge distanța (viteza se presupune uniformă) și 0,40 lei pentru fiecare minut din durata călătoriei. Pasagerul acceptă, dar cere șoferului să conducă cu o anumită viteză V pentru care costul călătoriei este minim. Care este această viteză?

Al. Matei, București

Soluție. Prețul P al călătoriei este $P = P_1 + P_2$, unde P_1 este partea din cost calculată după viteza automobilului, iar P_2 este partea din cost calculată după durata în minute a parcursului. Avem $P_1 = 0{,}50\ V$; $P_2 = 0{,}40\ \frac{27}{V}\ 60 = \frac{648}{V}$.

Se observă că produsul P_1P_2 este constant: $P_1P_2 = 0.5 \cdot 648$. Interpretăm valorile P_1 și P_2 ca laturile unui dreptunghi variabil dar cu suprafața constantă. În această interpretare $P = P_1 + P_2$ este semisuma perimetrului acestui dreptunghi.

Perimetrul unui dreptunghi de suprafață constantă, devine minim atunci cînd laturile sînt egale (cînd devine patrat).

Prețul minim al călătoriei va fi deci, pentru $P_1 = P_2$. Rezultă că $0{,}5\ V = \frac{648}{V}$;

$V^2 = \frac{648}{0{,}5} = 1296$, de unde $V = 36$ km/h.

Prețul călătoriei va fi $P = P_1 + P_2 = 36$ lei.

DIN PROBLEMELE PROPUSE LA CERCUL DE MATEMATICĂ DIN CAPITALĂ

1500. În planul unui unghi xoy se consideră două puncte fixe A şi B şi o dreaptă ce se roteşte în jurul punctului A, dreaptă ce taie ox în M şi oy în N. Paralela dusă prin N la AB taie pe MN în P. Să se afle locul lui P.

1501. Să se îngroaşe porţiunile din cercul trigonometric unde se află extremităţile arcelor pentru care

$$\frac{1 + 3\cos x}{1 - 2\cos x} \geqslant \frac{1 + 4\cos x}{1 - 4\cos^2 x}$$

1502. În ce caz expresia $3^{2p} + 3^p + 1$ se divide cu 13.

1503. Se consideră corpul format din două piramide cu baza patrată şi feţele triunghiuri echilaterale, alipite prin baza lor.

a) Să se arate că acest corp este un poliedru regulat.

b) Prin mijlocul uneia din muchiile corpului se duce un plan paralel cu una din feţele ce au un vîrf (şi numai unul) comun cu acea muchie. Ce formă are poligonul de secţiune obţinut?

1504. Să se descompună în factori:

$$(x + a)^6 + (x - a)^6 - 2(x^6 + a^6)$$

fără a desface paranţezele.

1505. O dreaptă se mişcă rezemîndu-se pe două drepte din spaţiu şi rămîne paralelă cu un plan dat. Către ce direcţie tinde cînd se îndreaptă la infinit?

1506. Să se rezolve sistemul

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \dfrac{\pi + B}{3}}{\sin \dfrac{\pi + C}{3}} \qquad \text{şi} \quad x + y = \pi - \frac{A}{3}$$

unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare.

1507. Se dau două drepte perpendiculare D şi D' şi un punct T situat pe D. O dreaptă variabilă ce face cu D un unghi de 45° taie dreptele date în M şi N respectiv. Fie P proiecţia punctului M pe dreapta AN. Fără să se ştie ce curbă este locul geometric al punctului P, să se arate că ea trece prin T şi prin intersecţia celor două drepte date şi să se spună care sînt tangentele la curbă în aceste puncte.

1508. Dacă $a + b + c$ este un multiplu de 6, atunci şi $a^3 + b^3 + c^3$ este un multiplu de 6.

1509. Fiind dat un cerc de diametru AB, fie H şi K proiecţiile punctelor A şi B pe o coardă MN. Dacă M' este simetricul lui M faţă de AB, să se arate că $M'N = HK$.

1510. Să se descompună în factori de gradul I, polinomul $2x^2 + \alpha xy - 2y^2 - x + 7y - 3$ Caz particular pentru $\alpha = -3$.

1511. Să se arate că expresia

$$E = \cos^4 x + \cos^4 (x + 120°) + \cos^4 (x + 240°)$$

nu depinde de x şi să se afle valoarea ei.

---

[1]) Vom mai publica şi probleme propuse la alte cercuri de matematică sau fizică pe localităţi pe măsură ce le vom primi. La problemele 1500—1511 se primesc soluţii pînă la 1 iunie 1955.

« OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1955 »

PENTRU ELEVII CLASELOR a V-a, a VI-a ŞI a VII-a

Publicăm în paginile Gazetei Matematice şi Fizice — seria B — problemele propuse la « Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni 1955.

Indemnăm pionerii şi şcolarii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a să participe cu tot avîntul lor şi la această olimpiadă organizată de « Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. », sprijinită de Ministerul Învăţămîntului şi Uniunea Tineretului Muncitor.

Probleme pentru clasa a V-a

1. — Preţul unui exemplar din « Gazeta Matematică şi Fizică » — seria B — este un leu; iar preţul unui exemplar din seria A este 2,25 lei. La o şcoală s-au cumpărat în total 140 exemplare cu 160 lei. Să se calculeze numărul de exemplare cumpărate din seria A şi numărul celor din B.

2. — Într-o cantină sînt 7 duzini de farfurii şi un număr de pahare. Cînd s-au spart 9 farfurii şi 3 pahare, au rămas cu 32 farfurii mai multe decît pahare. Cîte pahare au fost?

3. — Drumul Bucureşti-Moscova, cu avionul, durează 56 ore mai puţin decît cu trenul. Să se calculeze cît durează călătoria cu trenul dacă avionul merge de 8 ori mai repede ca trenul?

4. — Distanţa Bucureşti-Satu Mare este de 600 km. La ora 12 pleacă din Bucureşti, un tren personal care face 30 km pe oră; iar la ora 14 pleacă din Satu Mare un tren accelerat. Cîţi kilometri pe oră face acceleratul dacă cele două trenuri se întîlnesc la mijlocul drumului?

5. — Întreitul unui număr a fost micşorat cu patru şi apoi s-a înmulţit rezultatul obţinut cu cinci. La produsul obţinut s-a adăugat 8 şi apoi s-a împărţit prin 7 şi s-a obţinut cîtul 39. Să se afle care a fost numărul cu care s-a început calculul?

6. — Să se găsească cel mai mic număr care împărţit la 3; 5 şi 7 să dea acelaşi rest 2.

7. — Să se găsească două numere ştiind că produsul lor este egal cu 6750 şi c.m.m.c.d. al lor este 15.

8. — O persoană face cumpărături dintr-un magazin, de o treime din suma ce avea plus 90 lei. La alt magazin mai cheltuieşte o treime din ce-i mai rămăsese şi încă 60 lei, iar în al treilea treilea magazin mai cheltuieşte o treime din noul rest şi încă 20 lei şi astfel rămîne cu 20 lei necheltuiţi. Cît a cheltuit în fiecare magazin? Verificare.

Probleme pentru clasa a VI-a

1. — O gospodărie de stat a împărţit pentru diferite culturi 375 hectare de pămînt în trei tarlale. După ce s-a despărţit din prima tarla 1/3 din aria sa, din a doua 1/5 şi din a treia 30 %, toate întinderile de pămînt rămase au devenit egale ca arii. Cît erau de mari ariile tarlalelor înainte de a se fi făcut această operaţie?

2. — Ce aparate şi instrumente de măsurat (sau chiar jucării) se pot construi cu ajutorul cunoştinţelor de fizică învăţate în clasa VI-a. Pentru

a vă orienta în răspuns, dăm următoarele exemple: fir cu plumb, nivelă cu bulă de aer, dinamometre, smeu, bărci, etc. Indicaţi cel puţin cinci alte exemple şi arătaţi principiile pe care se bazează fiecare din ele.

3. — Apa care se transformă în ghiaţă îşi măreşte volumul cu a 11-a parte din volumul ei. Cu cît la sută îşi micşorează volumul, ghiaţa, cînd se transformă în apă?

Într-un vas cu apă pluteşte o bucată de ghiaţă. Dacă se topeşte ghiaţa, nivelul din vas va creşte sau va scade? Dece?

4. — Dispunem de o linie gradaţă şi o greutate marcată de un kg. În lipsa unui cîntar putem afla cu acestea, greutatea unui coş cu mere. Cum se procedează? Indicaţi-ne un exemplu.

5. — Un biciclist are de parcurs 192 km. El face pe drum orizontal 25 km pe oră, la urcuşuri face 15 km pe oră, iar la coborîşuri face 30 km pe oră. Lungimea urcuşurilor este $\frac{10}{7}$ din aceea a coborîşurilor. Dacă la întors a făcut cu 48 minute mai puţin decît la dus, să se calculeze cîţi kilometri a mers pe drumuri orizontale, cîţi kilometri a urcat şi cîţi a coborît?

6 — Să se arate că în orice dreptunghi ABCD distanţa de la vîrful A la diagonala BD este egală cu distanţa de la C la dreapta dusă prin B paralelă cu diagonala AC.

7. — O staţie de maşini şi tractoare utilizează în timpul muncilor agricole în fiecare zi cîte 500 kg motorină cu greutatea specifică de 0,8 g/cm^3. Această cantitate de motorină o împarte în bidoane de 20 litri dînd fiecărui tractor cîte un bidon. Cîte tractoare utilizează zilnic această staţie?

8. — Deschizîndu-se un robinet, se umple un bazin de 168 hl în 24 ore. Un alt robinet umple un bazin de 60 hl în 12 ore. Dacă ar curge ambele robinete împreună, să se afle cît timp ar umple un bazin de 204 hl?

9. — Să se exprime mărimea unghiurilor formate de înălţimea AA' şi înălţimea BB' într-un triunghi ABC cu unghiurile A, B, C, cunoscute. Caz particular A = 64°28' şi B = 53°43".

10. — Pe apă pluteşte o bucată de lemn în formă prismatică cu greutatea specifică 0,5 g/cm^3, cu dimensiunile: lungimea bazei 0,2 m, lăţimea bazei 15 cm, înălţimea prismei fiind 1 dm.

a) Să se afle ce parte din volum se scufundă în apă.

b) Ce volum va avea o bucată de plumb care pusă pe această prismă va face prisma să se cufunde complet în apă? (greutatea specifică a plumbului este 11,3 g/cm^3.

c) Care este presiunea şi apăsarea de jos în sus asupra bazei prismei?

Probleme pentru clasa a VII-a

1. — Trei gospodării colective au construit împreună un pod în valoare de 6300 lei. Prima gospodărie este la o distanţă de 1600 metri de pod şi are 38 curţi, a doua la o distanţă de 2500 metri de pod şi are 26 curţi, iar a treia, la o distanţă de 3000 metri şi are 32 curţi. Cu cît trebuie să contribuie fiecare gospodărie colectivă dacă s-au învoit ca sumele date să fie direct proporţionale cu numărul curţilor şi invers proporţionale cu distanţa pînă la pod?

2. — Ce aparate, maşini şi instrumente de măsurat (şau chiar jucării) se pot construi cu ajutorul cunoştinţelor de fizică învăţate în clasa VII-a?

Pentru orientare în răspunsuri dăm următoarele exemple; mașini termice, voltametre, manometre, calorimetre, reostate, dinam, lunetă, aparat de radio recepție cu galenă, etc. Se vor indica cel puțin cinci exemple, altele decît cele date spre orientare și se vor arăta principiile pe care se bazează fiecare din acestea.

3. — Situația la învățătură a unei clase se prezintă astfel: a treia parte din numărul elevilor promovați întrece cu 4 numărul elevilor corigenți și repetenți considerați laolaltă, iar numărul elevilor repetenți este cu unu mai mic decît numărul elevilor corigenți. Dacă la numărul total al elevilor clasei ar fi unul mai mult, atunci numărul acesta este de 11 ori mai mare decît numărul corigenților. Să se afle numărul elevilor promovați, corigenți și repetenți.

4. — Ce cantitate de căldură se degajă prin arderea a 7 kg motorină? Puterea calorică = 10 000 kcal/kg).

a) Cîte kilograme de apă cu temperatura de 10°C se poate fierbe cu această cantitate de căldură?

b) Cîtă apă avînd temperatura de 10°C trebuie adăugată după aceasta, pentru a căpăta un amestec de apă cu temperatura de 45°C?

c) Ce putere ar avea un tractor care ar consuma această motorină timp de 5 ore, considerînd că numai $\frac{1}{10}$ din căldura produsă se transformă în lucru mecanic?

5. — Să se arate că perpendicularele duse din vîrful unghiului drept A al unui triunghi dreptunghic ABC pe bisectoarele unghiurilor din vîrfurile B și C sînt bisectoarele unghiurilor formate de înălțimea din A și cele două catete.

6. — O bucată de fier de un kilogram ținută în cuptorul mașinii de gătit încinsă, se introduce într-un calorimetru unde se află 200 grame de apă cu temperatura de 12°C. Apa din calorimetru se încălzește pînă la 50°C.

Căldura specifică a fierului C = 0,11 cal/gram grad.

Puteți afla temperatura pe care a avut-o cuptorul?

7. — Greutatea unei bîrne de brad este de $27\frac{4}{5}$ kgr, iar a unei bîrne de stejar este 45,5 kg. Dacă 10 bîrne au greutatea de 384, 20 kg să se afle cîte bîrne sînt de brad și cîte de stejar? Se va da soluția aritmetică și apoi soluția algebrică.

8. — Să se arate că

$$(bx + cz)\,(ay^2 + 2byt + ct^2) - y\,(b^2 - ac)\,(xt - yz) = \\ = (by + ct)\,[axy + b\,(xt + yz) + czt].$$

9. — Un număr împărțit la 7 dă restul 6, iar împărțit la 4 dă restul 1. Ce rest va da numărul prin împărțire la 28?

10. — Curentul electric din rețeaua orașului București are tensiunea de 120 Volți. Bobina primă a transformatorului de coborîre de tensiune are 1000 spire.

a) Cîte spire trebuie să aibă bobina secundară dacă vrem să aprindem un beculeț de 6 Volți și 5 Watt?

b) ce intensitate de curent trece prin filamentul becului?

c) care este rezistența filamentului aceluiași bec?

d) ce căldură produce becul timp de o oră?

e) ce rezistență totală vor avea 10 asemenea becuri legate în paralel la această rețea?

11. — Într-un triunghi oarecare ABC cu latura AB mai mică decît AC ducem bisectoarea AD. Să se demonstreze că segmentul BD este mai mic decît distanța de la vîrful C la aceiași dreaptă AD.

INDICAȚII PENTRU PARTICIPANȚII LA OLIMPIADĂ

Școlarii, în frunte cu pionierii, sînt sfătuiți să alcătuiască o gazetă de perete matematică pe clasă, în care să se publice problemele propuse pentru ca elevii clasei respective să cunoască enunțurile problemelor propuse.

Soluțiile problemelor vor fi alcătuite personal de către fiecare elev participant la « Olimpiadă ». Este o cinste pentru fiecare școlar de a trimite *doar soluțiile acelor probleme pe care le-a rezolvat singur.*

Acele probleme pe care școlarul le rezolvă cu ajutorul altora trebuie să constitue numai un prilej de a-și lichida lipsurile sale de cunoștințe.

Se socotesc paticipanți la « Olimpiadă » toți elevii de la care se primesc soluții la majoritatea problemelor propuse pentru clasa din care fac parte.

Fiecare soluție explicată pe larg va fi scrisă pe o singură față a foii de hîrtie, cu îngrijire, însoțită de numărul problemei sau exercițiului. Elevii vor avea grijă ca la sfîrșitul soluției să fie trecut numele complet al rezolvitorului, urmat de numele localității, al raionului, al școalei și clasei din care face parte.

La clasificarea participanților se va ține seamă de fiecare rezolvare trimisă, dacă este completă, clar explicată, cu soluția cît mai simplă și însoțită de toate calculele necesare.

Participantul la « Olimpiadă » va expedia o singură dată problemele pe care a putut să le rezolve. Ele se vor prinde laolaltă și se vor introduce într-un plic pe care se va scrie numele elevului participant, clasa, școala, localitatea și raionul.

Plicurile conținînd problemele rezolvate se vor trimite la sediile filialelor Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. din orașul de reședință a regiunii respective pînă la 30 aprilie 1955.

Dăm mai jos adresele filialelor unde se vor trimite soluțiile problemelor:

FILIALELE SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. ARAD — regiunea Arad — str. Lenin 3, ap. 4
2. BACĂU — regiunea Bacău — Școala medie de 10 ani de băieți str. Cuza Vodă nr. 8
3. BAIA MARE — regiunea Baia Mare — Școala medie de 10 ani de băieți.
4. BÎRLAD — regiunea Bîrlad — Școala medie de 10 ani băieți, str. N. Bălcesu 9.
5. BUCUREȘTI — str. Spiru Haret nr. 12
6. CLUJ — regiunea Cluj — b-dul Republicii 37.
7. CONSTANȚA — regiunea Constanța — Școala medie de 10 ani de băieți, Mircea cel Bătrîn, str. Traian 19

8. CRAIOVA — regiunea Craiova — Şcoala medie de 10 ani de băieţi nr. 2

9. GALAŢI — regiunea Galaţi — Institutul Agronomic, str. Dobrogeanu Gherea nr. 27

10. DEVA — regiunea Hunedoara — Şcoala Pedagogică, str. G. Bariţiu 2

11. IAŞI — reg. Iaşi — Facultatea de Matematică, Seminarul de Matematică

12. TG. MUREŞ — regiunea Autonomă Maghiară — Şcoala medie de 10 ani de băieţi nr. 1, piaţa Bernadi 12

13. ORADEA — regiunea Oradea — Şcoala Pedagogică de fete, str. Dr. Petru Groza 5.

14. PITEŞTI — regiunea Piteşti — Şcoala medie de 10 ani de băieţi

15. PLOEŞTI — regiunea Ploeşti — Şcoala pedagogică de fete

16. ORAŞUL STALIN — regiunea Stalin — Institutul de Mecanică, b-dul Stalin nr. 2

17. SUCEAVA — regiunea Suceava — Şcoala medie de 10 ani de băieţi.

18. TIMIŞOARA — reg. Timişoara — Institutul Pedagogic, b-dul Vasile Pîrvan nr. 4

*
* *

De exemplu, un elev care învaţă într-o şcoală din Regiunea Arad va expedia un plic cu următoarea adresă:

Către Filiala Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. pentru «Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni 1955». Arad, str. Lenin 3, REGIUNEA ARAD.

POŞTA REDACŢIEI

ILIE C. PĂUNESCU, profesor, comuna Băcăleşti, raionul Drăgăneşti. Numerele din G.M.F. — B pe care le cereţi, le puteţi procura de la Oficiul Special de Difuzare a Presei.

IOAN MOGA, elev, Tg. Mureş şi DAIA VIOREL, elev, S.m.12 Bucureşti. Aşteptăm împlinirea angajamentului pe care vi l-aţi luat de a colabora intens la G.M.F.—B.

ELENA STROESCU, elevă liceul seral Craiova. S-au primit problemele rezolvate. Faptul că v-aţi angajat să popularizaţi revista noastră în rîndurile colegilor îl socotim ca un exemplu bun de urmat şi de alţi colaboratori.

METTLER MARTIN, elev, şcoala pedagogică, Timişoara. Problemele pe care le-aţi propus nu îndeplinesc condiţiile pentru a fi publicate. Este bine să persistaţi în a rezolva cît mai multe probleme, fiindcă astfel veţi putea apoi compune probleme pentru a fi rezolvate de către ceilalţi colaboratori.

ION VLAGIU, învăţător, comuna Fîntînile, Arad. S-a cerut Institutului de Mine din Bucureşti şi Petroşani să ne trimită problemele propuse la examenele de admitere, pentru a le publica în revistă. Vom ţine seama de dorinţa dv. de a avea demonstraţiile unor teoreme de geometrie.

ION N. COSTAN, elev, Paşcani. Pentru a fi mai sigur că veţi obţine toate numerele din G.M.F.—B ce vor apare, vă sfătuim să vă abonaţi prin oficiul special de difuzare a presei din localitate.

DUMITRU PANŢURU, elev, Iaşi. Aşteptăm lucrările pe care vreţi să le trimiteţi.

SILVIU I. GUIAŞU, elev, Oradea. Am primit corespondenţa dv. privind activitatea cercurilor de matematică şi de fizică de la şcoala unde urmaţi.

AUREL PURDEA, elev, Carei. Pentru a nu mai face greşeli ca acelea din scrisoarea pe care ne-aţi trimis-o, vă sfătuim să staţi de vorbă cu un tovarăş profesor de matematică din localitate şi să citiţi lucrări care privesc teoria paralelelor.

VALERIU CIMPONERESCU, Făget, Timişoara. Pentru numere mai vechi vă puteţi adresa Oficiului special de difuzare a presei.

TIBERIU BIRDA, elev Cernavodă, GHEORGHE BRATU, tehnician Cîmpulung Muscel; DORU ABAGIU din R. Vîlcea şi alti corespondenţi. — Dacă nu se vînd exemplare din G.M.F.(B) cu bucata în oraşul dv. vă puteţi abona prin Oficiul poştal local, costul fiind de lei 10 pentru 12 numere (un an). Reclamaţiile de neprimire a revistelor se vor adresa Oficiului special de difuzare a presei însoţite de numărul chitanţei.

I. DRAGOMIR, elev, Pucioasa şi EMIL MAN, Ocna Mureş. Am arătat la Rubrica Rezolvitorilor de probleme că nu se anunţă mai puţin de 10 soluţii bune. Vă sfătuim să păstraţi rezolvările efectuate pînă ce veţi strînge minimum cerut.

ARISTIDE GOREA, elev, Ploeşti, şi alţi colaboratori. Problemele propuse de dv. fiind prea simple nu se pot publica. Încercaţi mai întîi să rezolvaţi cît mai multe probleme propuse.

ION BĂLAN, absolvent, Ploieşti şi alţi colaboratori. Problemele propuse trebuie însoţite de soluţia lor completă şi figurile necesare.

V. BUZULOIU, Oradea. Abonamentul se poate face individual. Vînzarea cu bucata a revistei G.M.F.—B nu se face însă, în toate localităţile.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *)

Evidenţiaţi

În luna noiembrie 1954 s-au mai evidenţiat următorii:

Torjescu Florin (student, Bucureşti), **Iordache I. D. Alexandru** (clasa X-a, Constanţa) **Şerb Gabriel Adrian** (clasa X-a, Piteşti), **Cristea I. Ion** (clasa X-a, Constanţa), **Lupuţiu Ioan** (clasa X-a, Ploeşti), **Ionescu V. Savin** (student, Bucureşti), **Popescu Al. Dan** (student Bucureşti), **Bigan S.** (clasa X-a, Giurgiu), **Bostan Emil** (student fără frecvenţă, Vutcani), **Pupăzan V. Nicolae** (student, Bucureşti), **Uţă Marin** (absolvent, Sibiu), **Vrăjitoru Mihai** (clasa VII-a, Aiud), **Sămărescu F. Dan** (clasa X-a, Piteşti), **Opriş A. Ion** (anul IV cărbuni, Cîmpulung Muscel), **Mitroaică I. Gh.** (clasa X-a, Calafat), **Neguţ Nicolae** (Şc. medie mecanică nr. 2, Bucureşti), **Rus A. Ioan** (clasa X-a, Oradea), **Elenberg M.** (şcoala medie 12, Bucureşti), **Popa G. Stancu** (clasa X-a, Corabia), **Sandu G. Ioan** (clasa X-a, şcoala medie 4 «Aurel Vlaicu», Bucureşti), **Ioniţă Tudor** (anul IV, şcoala mecanică Oraşul Stalin), **Doboş Maria** (şcoala medie tehnică petrol Cîmpina), **Hodor Constantin** (clasa VII-a Gugeşti, Piatra Neamţ) şi **Mihăileanu N. Constantin** (clasa VIII-a, Timişoara).

* * *

Pînă la 1 decembrie 1954 s-au mai primit cel puţin cîte 10 soluţii bune la problemele propuse în ultimele patru numere apărute în Gazeta Matematică şi Fizică seria B, note (N) articole (A) şi probleme propuse (P_i, dela:

AGNITA. Comuna Cincul. Schauermann Nicolae (1372, 377, 378, 383, E: 535, 537, 539, 540, 541, 544, 546, 547, 548, 549, 552, 554, 558, 559, 560, 561, 562).

---

*) Începînd cu acest număr, soluţiile anunţate la «Rubrica rezolvitorilor», vor fi luate în seamă la clasificarea şi premierea colaboratorilor pe anul 1955.

AIUD. Clasa VII a. Vrăjitoru Mihai (1315, 316, 317, E: 505, 508, 510, 518, 519, 520, 522, 523, 524, 526, 528, 529, 530, 532, 533, 535, 537, 538, 541, 546, 547, 549, P).

ALBA—IULIA. Torsan Ilie (1306, 316, 319, 334, 335, 336, 347, 365, E: 519, 537, 540).

ARAD. Căpitan I. Gheorghe (1284, E: 471, 479, 482, 488, 490, 494, 499, 505, 508).

BACĂU. Clasa X a. Vasilache Mihail (1374, 376, 377, 379, 380, 382, 383, 403, E: 505, 508).

BAIA MARE. Clasa IX-a. Babău Valer (1354, E: 535, 536, 537, 540, 543, 544, 545, 546, 547).

BÎRLAD. Clasa IX-a. Pavel Săvel (1152, 165, 183, E: 411, 412, 418, 447, 452, 505, 508).

BOTOŞANI. Clasa VII-a. Vasiliu Veturia (E: 505, 507, 508, 510, 511, 512, 515, 517, 418, 419); clasa IX-a. Birzoi Maria (1339, 354, 363, 402, E: 539, 540, 544, 546, 547, 558, 559), Filip Mariana (1339, 348, 354, 363, E: 530, 539, 540, 544, 546, 547, 558, 559), Freiberg Ella (1339, 354, 363, E: 537, 540, 544, 546, 547, 558, 559), Mozes Ety (1339, 354, 363, E: 537, 540, 544, 546, 547, 558, 559), Moise S. Silvia (1339, 354, 363, 372, E: 540, 544, 546, 547, 558, 559), Davidsohn Pesa (1339, 342, 354, 363, E: 505, 512, 526, 530, 531, 537, 540, 544, 546, 547, 559), Cohn Mina (1342, E: 483, 505, 512, 526, 530, 540, 544, 546, 547), Viern Tatiana (E: 482, 481, 483, 499, 505, 512, 520, 540, 544, 546); clasa X a: Ene Mihai (1274, 276, 277, 293, 326, E: 471, 472, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 490, 49 , 505, 508, 511, 512, 513), Herscovici Iancu (1310, 313, 326, E: 505, 508, 510, 511, 512, 515, 526, 527, 529, 530, 532), Iacobsohn Clara (1354, 363, 372, 376, 378, 402, E: 525, 526, 530, 537, 538, 540, 542, 544, 546, 558, 559, 560), Futună Magdalena (1354, 363, 375, 377, 378, 402, E: 540, 558, 559, 560, 562), Schwartz Mina (1342, 354, 363, 372, 378, 379, 402, E: 523, 525, 530, 532, 537, 538, 540, 542, 546, 554, 555, 557, 559, 560, P), Vamanu Elena (1354, 372, 375, 378, 379, 381, 383, 385, 402, E: 559, 560, 562), Ciofu Fevronia (1342, 354, 363, 372, 376, 378, E: 524, 525 526, 529, 537, 538, 539, 540, 546, 558, 559, 560, 562), Witting Miriam (1354, 363, 372, 377, 378, 402, E: 524, 525, 526, 530, 537, 538, 540, 542, 544, 546, 558, 559, 560), Hoişie S, Rubin (1372, 373, 375, 378, 379, E: 529, 539, 544, 559, 560).

Şcoala medie tehnică de drumuri şi poduri. Anul II. Avădanei Maria (E: 471, 481, 484, 489, 490, 499, 526, 540, 546, 549, 557), Afrăsanei Maria (E: 456, 471, 476, 483, 484, 489, 490, 501, 535, 537, 546, 549, 561), Armasu Maria (E: 481, 484, 490, 499, 526, 535, 537, 546, 549, 561) Bobolea Elena (E: 457, 481, 484, 489, 490, 499, 501, 515, 546, 549), Bola Natalia (E: 457, 471, 476, 481, 484, 489, 490, 499, 526, 537, 540, 547, 549, 561), Cojocaru Elena (E: 457, 483, 488, 489, 490, 499, 540, 546, 549), Dumitriu M. Constantin (E: 473, 480, 481 483, 488, 496 497, 499, 537, 540, 546, 547, 549, 561), Fodor Dragoş (E: 457, 476, 481, 489, 501, 535, 546, 559, 560, 561), Furtună Teofil (E: 457, 476, 484, 490, 497, 501, 535, 540, 546, 559), Haginâ Pelaghia (E: 456, 481, 484, 489, 490, 499, 526, 535, 546, 549, 561), Hetriuc Dorica (E: 481, 489, 490, 499, 501, 526, 535, 537, 540, 546, 549, 561), Hurduc Minodora (E: 471, 475, 476, 481, 483, 490, 497, 499, 501), Piram Amalia (E: 457, 481, 484, 489, 490, 499, 546, 549, 558, 561), Prăiinaru Vasile (E: 457, 477, 479, 481, 482, 488, 490, 499, 503, 506, 540, 549, 558, 559, 561), Rădulescu Elena (E: 457, 471, 481, 483, 490, 501, 526, 546, 549, 558, 561), Rottenberg Martin (E: 462, 471, 476, 481, 484, 488, 499, 544, 546, 549, 559), Stamatescu Zmaro (E: 457, 481, 484, 501, 535, 537, 540, 546, 549, 559, 561), Şurubaru I. Ion (E: 457, 473, 481, 483, 484, 490, 496, 497, 526, 540, 546), Şulim Sali (1372, 377, 375, 402, E: 525, 526, 530, 540, 558, 559, 561).

BEIUŞ. Absolvent Uşvat Cornel (1214, 219, 222, 230, 231, 232, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 273, 274, 275, 277, 281, 284, 285, 286, 288, 290, 291, 292).

BUCUREŞTI. *Studenţi*. Cîmpu Eugen (1294, 295, 297, 299—306, 309—311, 315, 316, 319, P). Ionescu V. Savin (1294, 301, 302, 304, 306, 315, 319, 320, 323, 351, 354, 360, 362, 363, 365, 366, 367, 369, 372, 373, 374, 376—385, 388, 392). Pupăzan V. Nicolae (1294, 279, 280, 287, 289, 290, 293, 320, 323, 325, 326, 333, 335, 336, 338, 339, 340, 342, 343, 347, 348,

— Tehnica iluminatului,
— Atracţia universală,
— Recepţia undelor electromagnetice,
— Aspectul electronic al fenomenelor electromagnetice,
— Lumina polarizată,
— Radioactivitatea naturală şi artificială,
— Metodica rezolvării problemelor de fizică,
— Descărcări electrice în gaze rarefiate.

Toate conferinţele au fost însoţite de demonstraţii experimentale, folosindu-se fie aparatura existentă în laboratoare, fie dispozitive construite prin mijloace proprii. În legătură cu subiectul conferinţelor s-au dat probleme şi exerciţii pentru a fi rezolvate de elevi acasă, iar altele erau rezolvate pe loc, spre exemplificare.

În încheierea fiecărei conferinţe erau arătate aplicaţiile pe care le au în diferitele domenii ale tehnicii fenomenele şi principiile expuse.

Pentru aprofundarea subiectelor tratate era indicată bibliografia respectivă, ceea ce a dat elevilor posibilitatea de a se documenta asupra chestiunilor care îi interesează în special. La cele două şedinţe de analiza muncii elevii au dat rapoarte asupra activităţii cercului, au discutat subiectele conferinţelor audiate şi au făcut propuneri pentru îmbunătăţirea muncii lor în cadrul cercului. Dintre acestea menţionăm pe cele mai importante, care urmează a fi luate în considerare în viitor:

— În planul de muncă pe an, trebuie prevăzute subiectele conferinţelor care vor fi ţinute, ele fiind alese nu la întîmplare, ci în concordanţă cu materia studiată de elevi în şcoală.

— Conferinţele ţinute la şedinţele cercului este bine să fie dactilografiate în mai multe exemplare şi puse la dispoziţia elevilor care doresc să le studieze, fie în vederea rezolvării problemelor, fie pentru a-şi lua note.

— Acolo unde nu există laboratoare speciale bine utilate, să fie amenajate prin mijloace proprii cu contribuţia profesorilor de fizică, încăperi adecuate prevăzute cu dispozitive şi aparate care pot folosi la experienţe şi demonstraţii.

— Pentru a stimula munca de cercetare şi documentare individuală a elevilor, să fie prevăzute şedinţe în care aceştia să susţină disertaţii sau dări de seamă asupra unor subiecte contingente cu materia studiată la şcoală, tov. profesori de fizică dînd indicaţii asupra bibliografiei necesare.

— Totodată ar trebui încurajaţi elevii care se disting prin participare regulată la şedinţele cercului şi prin deosebită activitate în cadrul acestuia.

Considerăm că aceste informaţii asupra activităţii cercului de fizică precum şi propunerile sugerate, pot servi ca îndrumări pentru îmbunătăţirea în viitor, a muncii în cercurile pe oraş.

RUBRICA REZOLVITORILOR

— În cursul lunii decembrie 1954 sînt evidenţiaţi următorii rezolvitori de probleme: *Gavriluţ P. Mihai* (clasa X-a, Roman), *Graure I. Gheorghe* (absolvent, Sibiu), *Bacalu Ion* (anul III S. T. C. A., Roman), *Cristea Aurel* (clasa IX-a, Focşani), *Popa Gh. Stancu* (clasa X-a, Corabia), *Bogdan Mircea* (clasa IX-a, Ploieşti), *Colibaba V. Tiberiu* (clasa X-a, Galaţi), *Mişcol M. Mircea* (clasa X-a, Giurgiu), *Stroe Radu* (clasa X-a, Ploieşti), *Alexa Ion* (absolvent, Arad), *Petrescu M. Răzvan* (clasa IX-a, Ploieşti), *Bărbuică Nicolae* (anul III S. M. Electrotehnică, Craiova), *Ionescu Mircea* (clasa IX-a, Ploieşti), *Vasilescu Aurel* (clasa X-a, Călăraşi), *Ursu Gh. Mihai* (clasa X-a, Piteşti), *Văgăunescu Gheorghe* (clasa IX-a, Ploieşti *Cristea Rodica* (clasa VI-a, Bordeşti, R. Sărat), *Stănescu I. Viorel* (clas IX-a, Vasiui), *Marinescu Aida* (studentă Bucureşti), *Paraschiv Elena* (clasa VII-a, Bezdead-Ploieşti), *Vlagiu Ion* (absolvent, Arad), *Vrăjitoru Dan* (clasa X-a, Aiud), *Uţă Marin* (absolvent, Sibiu), *Antonescu Victor* (Reghin), *Bucur D. Gheorghe* (clasa IX-a, Pucioasa — Ploieşti), *Damian Şerban* (clasa IX-a, Ploieşti), *Georgescu Sorin* (clasa IX-a, Ploieşti), şi *Draica Constantin* (clasa VIII-a, S. M. 4. Bucureşti).

* * *

— In cursul lunii decembrie 1954 s-au primit cel puţin 10 soluţii bune la problemele propuse în ultimele patru numere apărute în „Gazeta Matematică şi Fizică“ seria B, probleme propuse (P), note (N) sau articole (A), de la următorii corespondenţi după cum se arată în paranteze după numele fiecăruia:

AIUD. *Şcoala medie mixtă.* Clasa IX-a. Suciu I. Ion (1342, 354, 363, 373, 374, 375, 377, 378, 383, 386); clasa X-a. Vrăjitoru Dan (1328, 330, 339, 340, 342, 343, 346, 349, 350, 351, 353, 354, 358, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 367).

ALEXANDRIA. Absolvent Desculţu Traian (1335, 354, 358, 372, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 383, 384, E: 536, 3537, 540, 546, 547, 558, 559, 561).

ALBA IULIA. Clasa X-a. Torsan Ilie (1340, 346, 353, 372, 377, 378, 380, 383, 406, E: 541, 544, 558, 559, 561).

ARAD. Clasa VII-a. Variaş Ruxandra Claudia (E: 550, 551, 552, 554, 555, 558, 559, 560, 561, 562); absolvenţi: Alexa Ioan (1312, 316, 323, 325, 326, 333, 338, 339, 340, 342, 347, 349, 355, 358, 362, 263, 367, 372, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 386, 404, 405, 406, P), Vlagiu Ioan (1069, 122, 125, 127, 130, 141, 149, 165, 195, 206, 254, 256, 260, 268, 297, 301, 302, 316, 335, 352, 355, 403, 404).

BÎRLAD. Clasa X-a. Istrate Ion (1321, 354, 362, 372, 374, 377, 378, 379, 380, 382, 386, 402, 403, 404).

BEZDEAD (Ploieşti). Clasa VII-a. Paraschiv Gh. Elena (E: 505, 508, 510, 512, 513, 514, 516, 525, 531, 532, 536, 537, 538, 540, 544, 546, 558, 559, 561).

BOTOŞANI. Clasa IX-a. Grigoraş Marina (1339, 354, 363, 374, E: 540, 544, 546, 547, 558, 559); clasa X-a. Andreescu Lili (1342, 354, 363, 402, E: 536, 537, 539, 540, 547, 558, 559, 560, 561), Ceauşu Iulius (1372, 374, 375, 378, 383, 402, 404, E: 552, 558, 559, 560, 561), Cososchi Florin (1363, 372, 374, 375, 377, 378, 379, 386, 404, 405, E: 552,559, 560).

BRĂILA. Clasa X-a. Chiaia Ştefan (1348, 349, 354, 356, 358, 372, 374, 375, 377, 378, 380, 381, 383, 385), Danciu A. Victor (1340, 342, 348, 349, 354, 358, 363, 372, 374, 375, 378, 381), Buzea N. Radu (1328, 340, 342, 349, 354, 356, 358, 362, 363, 372, 375, 377, 380), Melica N. Gheorghe, (1349, 354, 356, 358, 363, 371, 372, 374, 375, 378), Mocanu St. Gheorghe (1340, 1342, 349, 358, 363, 372, 374, 375, 377, 378, 383, 385).

BREAZA. (Ploieşti). Şcoala medie « Dimitrie Cantemir ». Clasa X-a. Piriu Marius (1354, 363, 372, 374, 377, 383. E 539, 540, 541, 546).

BUCUREŞTI. *Studenţi*: Dănilă Gheorghe (« Rezolvări de ecuaţii algebrice prin metode elementare »), Florescu Gh. Mircea (1354, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 392), Istodor Valentin (« Identităţi de tip Euler », P), Marinescu Aida Adriana (1294, 299, 300, 302, 303, 304, 306, 310, 326, 340, 347, 358, 375, 376, 378, 379, 380, 382, 383, 384, 385, 406, P), Udrescu Valeriu (« Rezolvarea unor ecuaţii trigonometrice », P), *Absolvent.* Uţă, Marin (1307, 347, 348, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 386, 388, 389, 390, 392, 393, 395, 396, 400, 401, 402, 403, 404, 406, 407, P); *Şcoala medie nr. 1 băieţi* Clasa X-a. Litinschi Mihai (1121, 152, 165, 183, 239, 240, 242, 244, 245, E: 447); *Şcoala medie nr. 4 « Aurel Vlaicu »*, clasa VIII-a. Ionescu Dumitru (E: 510, 523, 526, 528, 529, 530, 532, 533, 538, 540, 546, 547); clasa X-a. Dumitrescu Ovidiu (1375, 278, 290, 313, 325, 340, 342, 402, 352, 354, 359), Ghiţescu Liviu (E: 522, 523, 525, 526, 528, 531, 538, 541, 549, 559, 560), Movanu Radu (1240, 241, 2372, 374, E: 510, 523, 526, 530, 537, 540, 546, 558, 559); clasa VIII-a B. Draica Constantin (1393, 402, E: 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 533, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 543, 544, 546, 547, 548, 549, 555, 557, 558, 559, 560, 561, 562, P), Zvorişteanu Alexandru (1261, 389, 390, E: 528, 541, 558, 563, 568, 571, 574; *Şcoala medie nr. 6*, clasa IX-a. Nicolau A. Ileana (E: 522, 523, 524, 525, 526, 529, 530, 532, 533, 535); clasa X-a. Popovici I. Radu (1304, 340, 372, 374, 375, 378, 380, 382, E: 536, 538, 543, 548, 549, 558, 559, 560, 562); *Şcoala medie nr. 8* clasa VIII-a. Gheţu Ioana (E: 505, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 513, 515, 516, 522, 523, 524, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 535, 537, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 546), Marinaş Liliana (1351, 362, E: 536, 537, 540, 541, 542, 544, 546, 547, 559); *şcoala medie nr. 10*, clasa VIII-a. Wagenberg Fania (1374, E: 536, 537, 540, 544, 546, 547, 558, 559, 561): *Şcoala medie nr. 11*, clasa X-a. Sîrbu Anton (1346,

349, 354, 356, 358, 363, 372, 374, 375, 377, 378, 380, 381, 384, 404, 406, 407, E: 537, 538, 540, 544, 547, 558, 559), Stăncescu Mihai (1346, 349, 354, 356, 358, 363, 372, 375, 377, 378, 381, 384, 404, 406, 407, E: 537, 538, 540, 544, 547, 558, 559); *Şcoala medie nr. 12*, clasa IX-a. Zissu Silviu (1342, 378, 383, E: 526, 531, 536, 540, 546, 547, 558, 561); *Şcoala medie nr. 13* clasa IX-a. Dobrescu Florin (1354, 358, E: 536, 537, 539, 540, 541, 542, 544, 546). *Şcoala medie nr. 17*, clasa IX-a. Duduică Radu (1302, 314, 326, 350, 364, 365, 373, 374, 375, 377, 378, 380, 392, 396, E: 544, 551, 552, 553, 559). *Şcoala medie nr. 20* clasa VII-a. Bogdan T. Alecu (E: 519. , 5121, 526, 529, 535, 537, 538, 546, 554, 558, 559; clasa X-a. Grînescu I. Radu (1354, 362, 363, 367, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 392, E: 537, 540, 558, 559). *Şcoala medie nr. 21.* Clasa VIII-a D, Mărăndici N. Elena (E: 522, 523, 526, 527, 528, 529, 530, 537, 539, 540, 544). *Şcoala medie tehnică de mecanică nr. 2*, anul IV. Neguţ St. Nicolae (1322, 372, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 384, 392, 403).

Şcoala medie tehnică de măsurători terestre, anul III. Maftei Micolae (1346, 361, 370, 372, E: 535, 540, 541, 544, 546, 549); anul IV. Tănase Dumitru (1320, 323, 326, 330, 333, 338, 339, 340, 341, 342, 343, E: 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533). *Şcoala medie tehnică de chimie* anul III. Colomei Stelian (1374, 375, 377, 378,380, 383, 397, 398, 404, 405, 407).

BUZĂU. Clasa VII-a. Moisescu Dan (E: 523, 524, 527, 528, 529, 531, 532, 535, 540, 544, 546, 549, 558, 559); clasa X-a. Cristea Pompillu (1358, 362, 370, 372, 374, 375, 377, 378, 383, E: 530, 537, 538, 540, 546, 555, 557, 549, 558, 561), Zecheru Constantin (1363, 372, 377, E: 538, 540, 546, 549, 558, 559, 561).

CĂLĂRAŞI. Clasa X-a. Vasilescu Aurel (1349, 354, 356, 358, 363, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 402, 403, 404, 405).

CÎMPULUNG MUSCEL. Şcoala medie tehnică de cărbune, anul IV. Opriş A. Ioan. (1294, 303, 306, 310, 311, 312, 313, 314, 331, 357, 372, E: 528, 529, 532, 533, 539, 553, P).

CLUJ. *Studenţi.* Giurgiu Ioan (« Deviaţiile electromagnetice ale razelor moleculare »); Şcoala muncitorească de 2 ani anul II. Colţea Nicolae (1354, 363, 372, 374, 375, 377,378, E: 536, 558, 561), Kelemen Mihai (1340, 342, 353, 354, 372, 375, 377, 403, E: 559, 561), Păun Constantin (1354, 363, 372, 374, 375, 377, 378, 383, 403, E: 558, 559, 561), Pistol Nicolae (1346, 354, 363, 372, 375, 377, 383, 401, 403, E: 551, 559, 561), Rusu Alexandru (1340, 342, 353, 354, 372, 375, 377, 403, E: 539, 559), Pîriu Stefan (1372, 375, 377, 389, 390, 403, 404, E: 558, 559, 561).

CONSTANŢA. Clasa IX-a. Encica Traian (1362, 363, 372, 374, 377, 383, 384, 386, 392, 404, E: 540, 559, 560, 561); clasa X-a. Osman S. Saim (1350, 354, 358, 362, 363, 367, E: 534, 537, 540, 546, 547); şcoala hidrotehnică, anul II. Vasiliev Lucia (1326, 339, 341, E: 522, 523, 526, 529, 530, 533, 537, 547, 549); anul III. Stepan Ionel (1326, 339, 341, E: 522, 523, 526, 528, 529, 530, 531, 533, 537, 538, 546, 547, 549).

CORABIA. Clasa X-a. Popa Gh. Stancu (1322, 323, 326, 333, 338, 339, 342, 343, 347, 353, 356, 364, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 392, 395, 396, 403, 404, 405, P).

CRAIOVA. *Şcoala medie electrotehnică*, anul III. Chitucea Eugen (1323, 354, 358, 362, 363, 372, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383), Bărbuică Nicolae (1349, 354, 356, 358, 362, 363, 365, 370, 372, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 392, 403, 404, 406, 407, P); *şcoala medie serală mixtă*, clasa X-a. Stroescu A. Elena (1354, 358, 360, E: 529, 535, 536, 537, 540, 541, 544, 546, 547, 548, 549, 559); *Şcoala medie nr. 2 băieţi*, clasa IX-a. Bărbulescu I. Nicolae (1392, 402, E: 505, 512, 526, 529, 530, 537, 540,547, 549, 558); clasa X-a. Clim Lorin (1323, 330, 339 340, 342, E: 526, 527, 529, 530, 531, 533, P); *Bals Absolvent.* Chinoiu I. Dumitru (1372, 374, 378, 379, 380, 381, 382 383, 406, E: 558, 559, 561).

FĂLTICENI. Viorenco Rogis (1372, 375, 376, 377, 378, E: 473, 552, 553, 558, 559 560, 561).

FOCŞANI. Clasa VII-a. Vasiliu Veturia (E: 522, 523, 524, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533); clasa IX-a. Cristea Aurel (1320, 323, 326, 327, 330, 334, 335, 336, 337, 338, 358, 339, 340, 341, 342, 344, 346, 348, 349, 351, 354, 359, 360, 361, 362, 363, 366, 370, 374, 375, 377, 378, 380, 383, 386, 388, 390, 403, 404, 406, P).

GALAŢI. Clasa X-a. Colibaba V. Tiberiu (1321, 322, 323, 325, 326, 330, 331, 333, 334, 336, 337, 338, 339, 341, 342, 343, 346, 349, 351, 354, 356, 358, 362, 363, 364, 365. 367, 372. 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, P), Gheorghiu Rodica (1349, 354, 358, 362, E: 526, 530, 540, 544, 546, 558, 559, 560), Partenie Marcela (1277, 342, 349, 354, 358, 362, 367, E: 540, 552. 553); şcoala medie specială, clasa IX-a. Chiş Mihai (1339, 354, 403, 404, E: 522, 523, 524, 533, 539, 540, 541, 558, 559, 560, 561), Tudorache C. Mihai (E: 526, 527, 530, 531, 532, 537, 540 544, 542, 546); clasa X-a. Buşilă Gheorghe (1333 339, 342, 349, 354, 363, E: 528, 540, 546, 547).

GHEORGHIENI. Clasa IX-a. Mîndru Traian (1354, 358, E: 537, 539, 540, 544, 546, 547, 558, 559, 560, 562).

GIURGIU. Clasa IX-a. Botoran Petre (1354,358, 362, 372, 375, 381, E: 522, 523, 524, 528, 532, 536, 537, 540, 546, 547, P), Stăncescu N. Emil (1354, 358, 362, 372, 375, 381, E: 522, 523, 524, 528, 532, 536, 537, 540, 546, 547, P), Stăncescu St. Nelu (1336, 366, 378, E: 505, 510, 519, 511, 518, 523, 524, 528, 529, 532, 539, 541, 546, 558, 560, P); clasa X-a. Mişcol M. Mircea (1338, 339, 344, 346, 348, 349, 351, 353, 354, 358, 359, 360, 362, 363, 364, 365, 367, 368, 369, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 381, 382, 384, 388, 391, 392, 394, 396, 397, 402, 403, P).

HÎRLĂU. (Iaşi). Clasa VIII-a. Ţibuleac Florin (1335, 337, E: 522, 523, 525, 526, 527, 529, 530, 531, 533, 536, 537, 539, 541, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549).

HUNEDOARA. Şcoala de 7 ani din *Gurabaza*. Clasa VI-a. Maşek Corneliu (E: 535, 536, 539, 540, 541, 544, 546, 547, 548, 549).

IAŞI. Clasa VII-a. Cosma Victor (E: 505, 519, 520, 522, 523, 528, 529, 531, 532, 533); Şcoala pedagogică mixtă, anul I. Gafencu Gheorghe (E: 505, 519, 523, 529, 530, 532, 539, 558, 559, 560, 561), Mertic M. Elena, (E: 523, 526, 527, 529, 530, 531, 535, 536, 537, 540, 544, 546); anul II. Burlacu Petre (1362, 364, E: 525, 528, 537, 540, 546, 547, 548, 559, 561), Crăcană I. Petrea (1310, 362, E: 505, 510, 519, 521, 535, 540, 546, 549), Bulai Vasile (E: 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 535, 546, 549, 558, 559, 561), Dobrea Constantin (E: 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 535, 540, 546, 549, 558, 559, 561), Dorneanu C. Arsene (E: 525, 526, 528, 529, 530, 532, 535, 540, 546, 549, 558, 559), Morăraşcu G. Dionisie (1310, E: 505: 519, 520, 521, 523, 535, 540, 546, 549); anul IV. Radu Costel (E: 505, 523, 529, 530, 532, 533, 546, 558, 559, 560, 561).

LUGOJ. Clasa X-a. Lupu Petru (1320, 322, 325, 326, 333, 338, 339, 341, 342, E: 505).

ORADEA. Clasa VIII-a. But Cornel (534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 547, 548, 549); clasa IX-a. Minea Florin (1333, 335, 337, 339, 342, E: 505, 507, 508, 509, 510, 511, 524, 527, 528, 530, 532, 533); clasa X-a. Chebeleu Traian (1351, 354, 362, 364, 366, 372, 374, 375, 377, 278, 380, 383, 403, 404), Guiaşu Silviu (1368, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385), Rus N. Nivu (1392, 323, 360, 362, 363, 375, 378, 380, 406, 407), Şincai Radu (1323, 326, 347, 354, 363, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 383, 384, 385, 403, E: 537, 539, 540, 546, 547, 552, 558, 559, 560, 561).

ORAŞUL STALIN. *Şcoala medie c.f.r. şi maşini termice. Anul* II. Niţulescu Vasile (1372, 375, 377, 379, E: 551, 555, 557, 558, 559, 560, 561), Feier Nicolae (1372, 374, 375, 377, E: 551, 558, 559, 560, 561), Nicolau Sotiris (1372, 375, 377, 379, 380, 384, E: 551,552 558, 559, 560, 561), Pănescu Mihai (1372, 375, 377, 379, 380, 384, E: 551, 552, 559, 560, 561), Movileanu Constantin (1374, 375, 378, E: 540, 546, 548, 558, 559, 560, 561); *cercul de mate-*

matică nr. 2: clasa VIII-a. Munteanu Petru (1358, 363, E: 528, 529, 530, 531, 532, 535, 539, 540, 546, 548, 558, 559, 560, 561); clasa IX-a. Ciobanu Ion (1342, E: 508, 510, 523, 524, 526, 432, 540, 544, 546, 547), Măierean Mircea (1335, 342, E: 508, 510, 512, 523, 524, 533, 540, 546), Modval Nicolae (1306, E: 505, 510, 530, 536, 537, 540, 542, 546, 547), Brindus Lucian (1275, 276, 300, 310, E: 499, 502, 535, 552, 559, 561), Neamțu Tudor (1276, 284, 306, 371, E: 497, 499, 502, 505, 510, 535), Jinga Gheorghe (E: 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 536, 537, 539, 540, 541, 544, 546, 547, 549).

PIATRA NEAMȚ. Clasa X-a. Rapoţică Aurelia (1354, 362, 372, 374, 377, 378, E: 537, 540, 544, 546).

PITEȘTI. Clasa VIII-a. Roman Lidia (1403, E: 525, 538, 539, 540, 541, 546, 559, 560, 561); Sămărescu F. Dan (1310, 313, 314, 315, 316, 324, 325, 326, 335, 336, 337, 339, 340, 383), Ursu Gh. Mihai (1297, 303, 347, 351, 354, 358, 368, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 381, 383, 384, 385, 386, 392, 396, 402, 403, 404, E: 505, 511, 540, 546, 551, 552, 553, 557, 558, 559, P).

PLOIEȘTI. Clasa VII-a. Bălan Sorin (E: 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 540, 558, 559), Georgescu Ghiocel (E: 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 537, 540, 558, 559), Haliț Gheorghe (E: 534, 546, 547, 548, 549, 554, 555, 557, 559, 561), Petricică Teodor (505, 507, 521, 523, 529, 532, 535, 550, 559, 560, 561, 562), Tănăsescu Anton (E: 505, 507, 535, 536, 537, 539, 540, 547, 564), Tudor Corneliu (E: 523, 526, 527, 528, 531, 554, 555, 557, 559, 561, 562); clasa VIII-a Delibaș Constantin (1377, 383, E: 535, 536, 537, 539, 540, 544, 546, 547); clasa IX-a. Ana C. Alexandru (1315, 326, 336, 337, 342, E: 481, 482, 483, 484, 488, 497, 499, 505, 510, 519, 521, 522, 526, 527), Anton Alexandru (1273, 274, 276, 277, 310, 322, 326, 342, E: 448, 481, 482, 484, 490, 446, 497, 505, 509, 510, 519, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 529, 530, 531, 533), Anghelescu P. Alecsandru (1274, 276, 278, 284, 285, 287, 290, 292, 293, 309, 314, 321, 324, 340, E: 481, 482, 483, 484, 487, 488, 489, 490, 491, 493, 495, 497, 499, 510, 519, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 533), Arion Dan (1333, 335, 338, 339, 340, 342, 343, E: 525, 527, 528, 529), Bogdan Mircea (1273, 274, 276, 277, 278, 284, 286, 287, 290, 291, 292, 293, 306, 309, 310, 313, 314, 315, 316, 317, 321, 322, 326, 331, 333, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 342, 343, E: 481, 482, 483, 484, 487, 488, 490, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 499, 505, 507, 508, 510, 511, 512, 513, 515, 519, 521, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, P), Bologa Virgiliu (1274, 287, 293, 315, 321, E: 481, 482, 484, 487, 489, 490, 492, 494, 495, 505, 507, 508, 511, 521, 523, 526), Chivu C. Dumitru (1316, 326, E: 484, 488, 505, 507, 510, 512, 526, 528, 529, 531, 532), Dumitrescu Nicolae (1274, 277, 278, 291, 292, 310, 313, 321, 322, 336, E: 481, 484, 487, 488, 490, 497, 499, 505, 507, 509, 510, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 533), Derer P. (1333, 335, 337, 340, 354, 363, E: 525, 530, 531, 544), Enache C. Gheorghe (1274, 278, 284, 286, 315, 316, 322, 326, 337, 339, E: 481, 482, 484, 487, 488, 490, 493, 495, 497, 499, 505, 510, 513, 519, 526, 528, 529, 531), Gașcu A. Mihai (1273, 277, 278, 284, 310, 316, 322, 326, 340, 342, E: 482, 483, 484, 493, 495, 499, 505, 507, 510, 511, 514, 524, 526, 527, 528, 529, 533), Georgescu Doru (1334, 342, E: 481, 482, 483, 484, 487, 490, 493, 495, 499, 505, 524, 525, 528, 529, 535, 537, 538, 540, 542, 543, 544, 546), Georgescu Sorin (1333, 335, 338, 343, E: 481, 482, 484, 487, 490, 494, 495, 497, 507, 510, 511, 521, 523, 525, 532, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 536, 540, 543, 546, 547), Geroșanu Dorin (1290, 293, E: 482, 483, 488, 490, 495, 497, 499, 526, 528, 529, 530), Ionescu Mircea (1276, 278, 284, 286, 287, 292, 293, 309, 310, 314, 317, 321, 322, 326, 333, 335, 338, 339, 340, 343, E: 481, 482, 483, 484, 487, 488, 489, 490, 493, 495, 496, 497, 499, 504, 507, 508, 510, 511, 513, 525, 531, 535, 537), Ionescu Al. Vladimir (1297, 326, E: 481, 484, 487, 491, 493, 495, 526, 527, 528, 530, 531), Ionescu Mihaela (1342, 354, 358, E: 536, 537, 540, 544, 546, 547, 558, 559), Georgescu Sorin (1274, 277, 278, 284, 286, 287, 290, 291, 292, 293, 309, 310, 314, 316, 321, 322, 326, 339, 342, 354, P), Jurcă Valeriu (1273, 274, 284, 286, 287, 290, 292, 293, 316, 317, 333, 334, 335, 336, 337, 339, 340, 342, 343, E:

481, 484, 487, 488, 492, 501, 505, 510, 518, 519, 521, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 540), Macri I. Ion (1273, 376, 377, 278, 284, 287, 291, 292, 293, 309, 310, 314, 315, 321 322, 326, 340, E: 483, 484, 487, 490, 496, 497, 499, 507, 509, 510, 518, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 531, 533), Mateescu Mihail (1335, 336, 337, E: 484, 493, 495, 499, 505, 510, 513, 522, 524, 526, 528, 530, 531, 532), Mezincescu Anca (1342, 354, 378, E: 526, 540, 547, 557, 558, 559, 561), Niţă I. Virgil (1316, E: 484, 488, 505, 508, 510, 519, 522, 524, 526, 528, 529, 530, 531, 533), Petrescu Mihai Răzvan (1273, 274, 276, 277, 278, 284, 286, 287, 290, 291, 292, 309, 310, 314, 315, 316, 322, 326, 333, 335, 336, 338, 339, 340, 342, 343, E: 481-484, 487, 489-493,495,497-499, 503, 504, 505, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 514, 515, 519, 520, 521, 523, 524, 526-532), Popescu Călin (1276, 277, 291, 292, 310, 326, 340, E: 481, 482, 487, 489, 490, 493, 495, 505, 507, 508, 526, 527, 529, 530, 531), Rădulescu Gheorghe (1273, 274, 276, 277, 288, 290, 293, 315, 316, 321, 322, 326, E: 481, 482, 483, 484, 487, 488, 490, 493, 495, 497, 499, 505, 507, 508, 509, 510, 511, 519, 529, 531), Roman Barbu (1277, 286, 287, 310, 315, 332, 335, 336, 340, 351, 354, 361, 362, E: 481, 482, 483, 484, 487, 490, 499, 507, 510, 511, 526, 528, 530), Sergiu Tr. Mircea (1273, 277, 278, 284, 310, 314, 315, 321, 340, E: 482, 484, 487, 490, 507, 508, 510, 513, 521, 524, 526, 527, 529, 533), Şerban Damian (1273, 274, 276, 277, 278, 284, 286, 287, 292, 293, 309, 310, 314, 315, 316, 317, 319, 321, 322, 326, 339, E: 481, 482, 483, 486, 487, 488, 489, 490, 493, 495, 497, 496, 503, 504, 507, 509, 510, 511, 513, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534), Şerbănescu Victor (1333, 335, 336, 339, 340, 363, E: 525, 535, 537, 540, 544), Ştefănescu Dan (1273, 274, 276, 277, 287, 288, 290, 293, 315, 316, 319, 321, 326, 333, 336, 339, 340, E: 481, 482, 483, 484, 487, 488, 489, 490, 493, 495, 497, 499, 505, 508, 510, 511, 512, 519, 520, 527, 529, 538), Stănescu N. Vladimir (1321, E: 482, 484, 487, 490, 493, 499, 503, 505, 509, 539, 546), Trufinescu Ştefan (1273, 277, 310, 315, 322, 344, E: 481, 482, 487, 490, 507, 508, 510, 513, 521, 526, 527, 529, 533), Tudorache Ovidiu (1274, 287, 292, 315, E: 483, 487, 490, 492, 495, 505, 510, 511, 526, 529), Văgăunescu Gheorghe (1274, 276, 277, 278, 286, 287, 290, 291, 293, 309, 310, 314, 315, 321, 322, 326, 333, 335, 338, 339, 340, 342, 343, E: 481, 482, 483, 484, 487, 488, 489, 490, 491, 493, 495, 497, 499, 503, 504, 507, 508, 509, 511, 512, 513, 519, 525, 526, 528, 530, 531, 532), Voicu Valentin (1273, 274, 313, 316, 336, E: 481, 482, 482, 483, 484, 488, 497, 499, 505, 510, 519, 522, 526, 528); clasa X-a. Pătraşcu Victor (1372, 373, 374, 377, 378, 381, 383, 396, 405, E: 528), Popescu Dumitru (1303, 333, 339, 340, 351, 358, 362, 363, 377, 403), Stroe Radu (1295, 302, 304, 306, 307, 319, 325, 326, 341, 342, 347, 360, 369, 371, 372, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 384, 395, 403, 404, 405, 406, 407, P).

PUCIOASA (Ploieşti). *Şcoala medie de 10 ani*, clasa IX-a. Bucur D. Gheorghe (E: 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, P; 1342, 434, 351, 353, 354, 358, 359, 362, 363, 374, 375, 377, 378, 383, 386, 389, 390, 403, 405, 407), Frăţiloiu Gheorghe (1354, 358, E: 536, 537, 539, 540, 542, 544, 546, 547).

RÎMNICUL SĂRAT. Clasa VII-a. Tudor D. Eugenia (E: 523, 525, 526, 528, 529, 533, 540, 544, 546, 559); clasa IX-a. Tudor Ionel (1335, 337, 342, 377, 380, 383, E: 523, 525, 526, 528, 529, 532, 533, 540, 543, 544, 559, 560, 561); clasa VI-a, *Bord-şti*. Cristea Rodica (E: 522, 524, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 537, 538, 539, 540, 543, 544, 546, 547, 549, 558, 559, 560).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa X-a. Jitescu Gheorghe (1339, 342, 354, 363, 372, E: 524, 528, 530, 532, 540, 542, 549), Mateescu V. Ion (1331, 333. 339, 341, 342, 347, 349, 351, 352, 354, 358, 362, 363, 364, P), Popa N. Elian (1333, 336, 337, 340, 342, E: 523, 526, 527, 528, 530, 531, 532, 533),.

REŞIŢA. Clasa IX-a. Marchis Ioan (1333, 354, E: 522, 526, 529, 530, 532, 539, 540, 541).

REGHIN. Antonescu Victor (1346-351, 355, 358, 360-365, 373, 374, 377-380, 383, 386, E: 536, 537, 539, 540, 544, 545, 546, 547, 549, 552, 557, 558, P).

ROMAN. Clasa VIII-a. Zaharia Mihai (E: 523, 526, 527, 530, 531, 536, 537, 544, 546, 547); clasa X-a. Gavriluţ P. Mihai (1058, 143, 149, 167, 169, 174, 183, 185, 191, 194, 204, 214, 216, 218, 219, 220, 224, 230, 239, 240, 241, 242, 243, 245,-249, 252, 253, 257, 273, 277, 284, 286, 289, 293, 302, 306, 310, 326, 333, 339, 342, 349, 354, 356, 358, 362, 377, 378, 380); *şcoala medie tehnică C. A.*, anul III,. Bacalu Ioan (1320-323, 325-330, 332-343, 345-356, 358, 362,-368, 370, 371, P).

SATU MARE. Clasa IX-a. Benea A. Cornel (1342, 359, 375, E: 522, 523, 528, 532, 533, 539), Călinescu Ovidiu (1354, E: 524, 526, 531, 533, 536, 537, 539, 540, 542, 543, 546, 547).

SFT. GHEORGHE. Anul III — textile. Ursache Gheorghe (E: 505, 510, 519, 539, 540, 546, 558, 559, 560, 561).

SIBIU. *Şcoala medie tehnică de mecanică*, anul II. Birsan Ion (1354, 358, 373, 393, 407, E: 537, 540, 546, 547, 558), Brăguş Constantin (1306 E: 505, 508, 515, 517, 519, 520, 521, 540, 546, 549, 553, 559), Ciutacu Mircea (1297, E: 511, 515, 523, 526, 531, 559, 560, 561), Cuteanu Simion (1306, E: 505, 508, 515, 519, 520, 521, 523, 525, 540), Negrescu G. Toma (1306, E: 505, 508, 515, 517, 518, 519, 520, 521, 540, 546, 549, 553, 559), Schuller Oscar (1350, 353, 354, 362, 367, E: 537, 538, 539, 540, 541, 546, 547, 549), *Absolvent* Epuraş Mircea (1320, 322, 325, 330, 333, 335, 339, 342, 358, P, E: 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 536, 538, 542, 544, 546, 547), Uţă Marin (1347, 372, 373, 375, 377-384, 386, 388-390, 392, 393, 395, 396, 400-407).

SLATINA. Clasa X-a. Antonescu Păun (1335, 337, 347, 354, 372, 373, 378, 379, 381, 382), *absolvent* Graure I. Gheorghe (1321, 323, 325, 326, 330, 333, 338-342, 344, 347, 350, 356, 358, 362, 363, 365, 367, 372, -375, 377-386, P).

SLĂNIC (Ploieşti) Clasa IX-a. Ionescu Ion (1323, 337., 342, 354, 358, 361, 375, 378, E: 526, 528, 529, 532, 539, 540, 546, 554, 559).

SUCEAVA. Clasa X-a. Bogdan Dragoş (1276, 277, 303, 306, 354, 358, 372, E: 471, 481, 482, 519, 526, 530, 535, 540, 541, 544, 546), Rotaru Constantin (1274, 278, 286, 287, 292, 310, 313, 323, 333, 340, 354, 358, 374, 375, 376, 378, 379, 381, 383, 403, E: 490, 497, 499, 505, 510, 512, 513, 520, 521, 535, 537, 538, 539, 540, 542, 544, 545, 546, 547, 558, 559, 562).

TÎRGOVIŞTE. Clasa IX-a. Stănciulescu Mihai (1346, 352, 371, 373, 376, E: 530, 535, 537, 558, P); clasa X-a. Popescu Gabriela (1269, 273, 349, 372, 373, 374, 375, 376, 378, 379), Stoian I. Gheorghe (1342, 372, 374, 375, 376, 377, 379, 381, 384); şcoala medie tehnică de petrol anul IV. Enăchescu T. Stoian (1251, 253, 254, 256, 303, 306, 320, 340, 372, 373, 374, 375, 378, 379).

TÎRGU MUREŞ. Clasa IX-a. Moga Ion (1342, E: 522, 523, 524, 525, 526, 528, 530, 532, 533), Martic Corneliu (1342, E: 523, 524, 525, 526, 528, 530, 531, 532, 533); clasa X-a. Manole Nicolae (1340, 342, E: 523, 524, 526, 527, 530, 531, 532, 533,), Stefanelli C. Dorin (1340, 354, 373, E: 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530 531, 533, 536, 537, 540, 544, 546).

TECUCI. Clasa IX-a. Niţă Fănică (1375, 377, 378, 383, E: 510, 514, 540, 546, 558, 589); clasa X-a. Alter Moisă (1297, 333, 340, 343, 372, 374, 375, 377, 378, 383, E: 528, 551, 553, 559), Grecu Eugen (1297, 306, E: 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 532, 533), Munteanu A. Const. (1361, 372, 374, 375, 377, 378, 383, 392, 402, E: 524), Negoescu Emil (1297, 333, 340, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 383), Radu V. Alexandru (1346, 347, 349, 353, 354, 360, 362, 363, 370, 375, 378, 383, E: 559), Teleman Felician (1306, 342, 354, E: 526, 537, 546 558, 559, 560, 561), Ursulescu Florenţa (1372, 1374, 1375 377, 378, 383, 407, E: 552, 554, 558, 559, 560, 561).

TIMIŞOARA. Clasa VIII-a. Mihăileanu N. Constantin (1402, 437, 463, E: 538, 541, 542, 545, 563, 564, 574), Clasa IX-a. Arsenovici Tiberiu (1299, 300, 310, 315, 316, 317, E:

505, 507, 509, 510, 512, 515, 517, 519, 520, 521, 526), Cismariu L. Ionica (1377, 380, 381, 382, 383, E: 538 540, 544, 552, 561, 562); şcoala pedagogică mixtă, anul IV. Metler Martin (1253, 275, 315, 316, 317, 319, E: 507, 508, 515, 518, 520, 521), student Işfan S. Cornel (1378, 379, 381, 384, 390, 392, 406, 407, E: 551, 552, 553, 558, 559, 560, 561).

TURNU MĂGURELE. Absolventă. Dragomirescu Elena (1375, 378, 380, 383, E: 522, 532, 538, 560, 561).

TULCEA. Clasa X-a. Cîrlov Eugen (E: 524, 525, 540, 549, 554, 555, 558, 560, 561, 562), Gruşă Eugen 1342, 360, 362, 367, E: 522, 524, 529, 530, 532, 538).

TURDA. Clasa X-a. Radu Gabriela (1372, 373, 375, 377, 378, E: 540, 549, 556, 560).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Surdulescu Radu (1326, 340, 342, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379).

URLAŢI. (Ploieşti) clasa VIII-a. Iancu V. Vasile (13333, 363, 403, 404, E: 526, 531, 536, 540, 542, 551, 558, 559).

VASLUI. Clasa IX-a. Stănescu I. Viorel (1249, 259, 261, 267, 275, 276, 278, 287, 288, 289, 290, 291, 293, 302, 303, 304, 306, 314, 315, 316, 318, 337, 339, 342, E: 457, 460, 463, 465, 469, 470, 471, 474, 475, 476, 477, 479, 481, 482, 483, 490, P).

ZALĂU. Clasa VIII-a. Morati Cornel (1293, E: 510, 522, 528, 536, 537, 539, 540, 541, 546, 547). clasa IX-a. Farcaş Beniamin (1317, 342, 354, 359, 360, E: 510, 528, 536, 540, 536, 540, 546, 547).

S-au mai primit soluţii nesemnate sau un număr mai mic de zece soluţii bune din ultimele 4 numere apărute, însă acestea nu pot fi anunţate. Nu s-au anunţat soluţiile greşite sau copiate unele după altele. Fiecare corespondent trebuie să-şi redacteze singur soluţia, apoi să fie semnată citeţ cu numele, clasa şi adresa respectivă.

— Problemele propuse să fie însoţite de soluţia lor completă, să fie originale; să nu fie luate din cărţi sau reviste.

— Soluţiile îngrijit redactate, soluţiile deosebite sau generalizările problemelor propuse vor fi publicate cu numele rezolvitorilor.

— La finele anului 1955 evidenţiaţii care dovedesc o activitate deosebită şi continuă în tot cursul anului vor primi premii şi menţiuni.

In atenţia participanţilor la « Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni » 1955

1. Data de trimitere a soluţiilor la filialele Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. este **15 Aprilie 1955.**

2. Se elimină din problemele pentru clasa VIII-a, problema Nr. 11.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Șiruri recurente* de **A. I. Markușevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducției matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităților* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii și logaritmi* de **A. I. Markușevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi* de **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)

VOR APARE:

11. **O. Sacter** — *Conice și alte curbe.*
12. **Ion Ionescu** — *Maxime și minime geometrice.*

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POȘTALE SAU PRIN FACTORII POȘTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 10 (12 numere)

C. 83. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — București

Prețul Lei 1 exemplarul

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Könyvtár
TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - OMEHA

Anul VI — Martie 1955

3

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)

Anul VI, Nr. 3 — Martie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Profesorii Vera şi Alexandru Myller de Prof. Univ. Ilie Popa*	101
2.	*Noţiunea de grup în matematica elementară de Conf. Univ. T. Roman*	102
3.	*Energia atomică şi utilizarea ei paşnică de Virgil Atanasiu*	118
4.	*Caleidoscop matematic*	129
5.	*Dispozitiv pentru demonstrarea teoriei cinetice a gazelor*	132
6.	*Probleme rezolvate (1197, 1225, 1233, 1164, 1273, 1274)*	133
7.	*Probleme propuse (1583—1607)*	137
8.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E:610—E:623)*	140
9.	*Întrecerea între cercurile de matematică şi fizică din şcolile medii*	141
10.	*Premiile „Gazetei Matematice şi Fizice" seria B pe anul 1954*	142
11.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	146

ANUL VI — 3 — MARTIE 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 3 Martie 1955

SĂRBĂTORIREA A DOI MARI MATEMATICIENI ROMÎNI

PROFESORII VERA şi ALEXANDRU MYLLER

ILIE POPA

Profesor la Universitatea „Al. I. Cuza" din Iaşi

ZILELE trecute au fost sărbătoriţi cu ocazia împlinirii vîrstei de 75 de ani, profesorii onorari ai Universităţii din Iaşi, Vera Myller-Lebedeff şi acad. Alexandru Myller.

Academia R.P.R., Universităţile din Bucureşti, Cluj şi Iaşi, Societatea de Matematică şi Fizică din R.P.R., diverse institute de învăţămînt superior precum şi un impresionant număr de prieteni şi foşti elevi ai sărbătoriţilor, au fost prezenţi la această manifestare. Au participat deasemenea, reprezentanţi ai Partidului, ai Ministerului Învăţămîntului şi Sfatului Popular Iaşi. Actuali studenţi ai Facultăţii de Matematică şi Fizică din Iaşi — elevi ai foştilor elevi ai sărbătoriţilor — s-au alăturat celor mai vîrstnici în manifestarea dragostei şi respectului pentru sărbătoriţi. E demn de remarcat faptul că sărbătorirea a fost străbătută de un suflu sincer de dragoste şi admiraţie pentru soţii Myller.

Ştiut fiind faptul că profesorii Vera şi Alexandru Myller au fost profesorii severi — uneori chiar aspri — s-ar putea pune întrebarea asupra originii sentimentelor exprimate de foştii lor elevi. Răspunsul nu-i greu de dat. Profesorii Myller au fost şi sînt oameni de ştiinţă, oameni pentru care activitatea matematică le este necesară ca aerul şi apa. Dar ei n-au făcut un idol din ştiinţa lor. Ei au simţit că opera lor devine mai trainică prin urmaşi bine pregătiţi şi au ştiut să aleagă şi să pregătească viitorii matematicieni. Ei au simţit că viaţa universitară dinainte de 1944 suferea din cauza unor curente nesănătoase şi au luptat contra lor. Ei au simţit că societatea romînească dinaintea lui 1944 nu era prielnică unei normale dezvoltări a ştiinţei şi au luptat pentru doborîrea acelei orînduiri sociale. Prin acestea soţii Myller au fost printre puţinii intelectuali ieşeni care au păstrat şi promovat atmosfera progresistă a Iaşului ilustrat de Eminescu, Creangă, Poni, Sadoveanu, Philippide.

Pentru tineretul nostru de azi, este bine să spunem că profesorii Myller au ştiut să îmbine armonios activitatea lor ştiinţifică cu ceea ce se numeşte «cultura generală». Au iubit muzica şi literatura, filozofia şi lucrul manual (tov. acad. A. Myller a construit modele de geometrie, iar tov. prof. V. Myller îngrijeşte singură, frumoasa lor grădină din dealul Copoului). Aceste activităţi

îi ajută să înțeleagă — de pe un plan superior — multiplele și contradictoriile aspecte ale vieții, îi ajută deci, să trăiască ca adevărați oameni de cultură.

Soții Myller și-au început activitatea științifică, acum aproape 50 de ani, cu lucrări din teoria ecuațiilor diferențiale și integrale. Mai tîrziu, tov. prof. Vera Myller s-a ocupat de Algebra superioară și Teoria funcțiilor de variabilă complexă, elaborînd lucrări ce dovedesc o mare putere de sinteză și abstractizare. Tov. acad. Alexandru Myller a fost atras de Geometria diferențială. Multe sînt curbele, suprafețele, rețelele... studiate de el. O curbă cu interesante proprietăți i-a procurat o deosebită plăcere și de aceea a numit-o curba S.M.I. în cinstea Seminariului Matematic din Iași pe care d-sa l-a creat înzestrîndu-l — cu bani puțini dar cu multă dragoste și pricepere — cu o admirabilă bibliotecă matematică și în atmosfera sănătoasă a căruia au crescut mulți din actualii noștri matematicieni. Curba S.M.I. a interesat pe mulți membri ai Seminarului Matematic din Iași și s-a simțit nevoit ca rezultatele obținute de ei să fie consemnate într-un caiet. Din nefericire acest caiet s-a pierdut cu ocazia evacuării noastre forțate în Ardeal. A fost și acest caiet unul din exemplele de muncă în colectiv ce se practica încă de mult în cadrul Seminarului Matematic din Iași.

Opera matematică a soților Myller nu este, în totalul ei, accesibilă cititorilor cărora se adresează rîndurile de față. Pentru a înțelege o lucrare modernă de matematică e nevoie de multă pregătire. Și lucrul acesta este firesc. De la Euclid și pînă astăzi, matematica a mers pe o cale mereu ascendentă, fără întoarceri sau aruncări la coș. Însă cărțile de Geometrie analitică ale tov. Acad. Alexandru Myller și cea de Algebră a tov. prof. Vera Myller (distinsă cu premiul de stat pe 1953) ca și articolele lor de istoria și popularizarea matematicii ar putea fi studiate cu mult folos de cititorii «Gazetei Matematice și Fizice».

Partidul și Guvernul au apreciat rodnica activitate a soților Myller acordîndu-le, în august 1954, Ordinul Muncii clasa I.

NOȚIUNEA DE GRUP ÎN MATEMATICA ELEMENTARĂ

Conf. univ. TIBERIU ROMAN

În matematica modernă s-au introdus o serie de noțiuni noi și se studiază proprietățile lor plecînd de la însușiri foarte generale, care sînt valabile pentru clase largi de elemente.

Totuși, și aceste noțiuni au o bază strîns legată de realitate. Studiul lor — și în particular al noțiunii de grup — nu numai că a îmbogățit cunoașterea omenească ducînd mai departe știința, dar a condus la multe rezultate foarte importante în alte domenii: în teoria ecuațiilor, cristalografie, geometrie, fizica modernă (teoria relativității, etc.).

Rîndurile ce urmează urmăresc să prezinte cîteva exemple de grupuri din diferite ramuri ale matematicii elementare, să înfățișeze cîteva noțiuni importante legate de noțiunea de grup (finit, mai ales), să analizeze complet grupurile rotațiilor poliedrelor regulate și să dea cîteva indicații istorice și bibliografice.

1. Să desenăm un *hexagon regulat* în plan, raportat la două axe de coordonate, una fiind o diagonală a sa (fig. 1). Rotind acest hexagon în jurul

centrului său în sens trigonometric direct, el va lua diferite poziţii în plan. Dîndu-i rotaţii de cîte 60°, obţinem 6 poziţii ale figurii, care nu-l deosebesc din punct de vedere geometric, ci doar al aşezării vîrfurilor. Putem zice că avem următoarea ordine a vîrfurilor începînd citirea de pe semiaxa pozitivă Ox:

$$LMNPQR\,;\quad RLMNPQ\,;\quad QRLMNP\,;$$
$$PQRLMN\,;\quad NPQRLM\,;\quad MNPQRL\,.$$

Dacă am continua rotirea ajungînd la o rotaţie de 360°, dăm peste poziţia iniţială $LMNPQR$. Este de asemeni clar că nu există alte rotaţii mai mici de 360° care să ne dea acelaşi hexagon, ca aşezare faţă de axă, decît cele de mai sus, corespunzătoare unghiurilor de 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°. Dacă efectuăm pe rînd, 2 din aceste rotaţii, rezultatul este acelaşi ca şi cînd am fi făcut o singură rotaţie din cele şase. De exemplu: după o rotaţie de 120° să facem una de 60°. Rezulatul este acelaş ca şi cum am fi făcut una de 180°. Efectuarea a două rotaţii una după alta o însemnăm cu un punct. Dacă notăm cu L, R, Q, P, N, M cele şase rotaţii de mai sus (după vîrful hexagonului care vine pe semiaxa pozitivă Ox) căpătăm următoarele rezultate:

$$\begin{array}{lllll} R\cdot R=Q\,; & Q\cdot R=P\,; & P\cdot R=N\,; & N\cdot R=M; & M\cdot R=L \\ R\cdot Q=P\,; & Q\cdot Q=N\,; & P\cdot Q=M; & N\cdot Q=L\,; & M\cdot Q=R \\ R\cdot P=N\,; & Q\cdot P=M; & P\cdot P=L\,; & N\cdot P=R\,; & M\cdot P=Q \\ R\cdot N=M; & Q\cdot N=L\,; & P\cdot N=R\,; & N\cdot N=Q\,; & M\cdot N=P \\ R\cdot M=L\,; & Q\cdot M=R\,; & P\cdot M=Q\,; & N\cdot M=P\,; & M\cdot M=N \end{array} \qquad (1)$$

Aceste rezultate se pot verifica uşor adunînd unghiurile de rotaţie respective şi ţinînd seama că: R corespunde unei rotaţii de 60°, Q de 120°, P de 180°, N de 240°, M de 300°, iar pentru rotaţiile mai mari sau egale cu 360° scădem din rezultat 360°.

O altă cale de verificare a acestor rezultate este aceasta: un hexagon pe care am notat vîrfurile ca în fig. 1 se taie din carton şi se învîrteşte în jurul centrului său, în care s-a fixat un ac înfipt în origina unui sistem de axe de coordonate. Dîndu-i pe rînd rotaţiile din tabloul (1) se obţin rezultatele indicate.

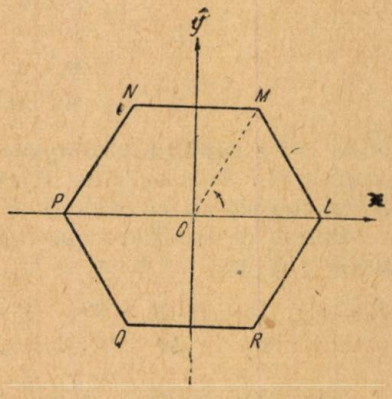


Fig. 1

Se verifică uşor cu ajutorul aceluiaşi tablou, că această efectuare a rotaţiilor una după cealaltă (sau compunerea rotaţiilor) se bucură de proprietatea comutativităţii şi asociativităţii, adică

$$S.T = T.S \quad \text{iar} \quad (S.T).U = S.(T.U)$$

unde am însemnat prin S, T, U una oarecare din rotaţiile L, M, N, P, Q, R. Aceasta se bazează în fond, pe proprietatea corespunzătoare a adunării, căci compunerea ST revine la adunarea unghiurilor care corespund celor două rotaţii S şi T.

Un loc aparte îl joacă rotaţia L, de 0° adică. Compunînd-o cu oricare din cele 6 rotaţii ea are un efect nul, nemodificîndu-i cu nimic efectul. Putem deci, scrie:

$$L \cdot S = S \cdot L = S$$

unde S este, ca mai sus, una din cele 6 rotaţii.

Mai putem verifica o proprietate a acestor rotaţii şi anume, că pentru oricare rotaţie există una cu care compusă efectul este L, adică poziţia iniţială:

$$L \cdot L = L;\quad R \cdot M = L;\quad Q \cdot N = L;\quad P \cdot P = L;\quad N \cdot Q = L;\quad M \cdot R = L;$$

numim rotaţia a doua inversa primei, în fiecare pereche (de exemplu, rotaţia M este inversă rotaţiei R şi vice versa).

2. Să considerăm un *cristal din clasa hexagonal piramidală*, cu alte cuvinte un cristal care admite o axă de rotaţie senară. Tipul cristalin este piramida dreaptă cu baza un hexagon regulat sau prisma dreaptă cu aceeaşi bază.

Rezultă îndată că, pentru orice cristal din această clasă cristalografică, există şase rotaţii în jurul axei care îl transformă în el însuşi şi care se bucură de toate proprietăţile rotaţiilor din § 1. Efectuarea succesivă a două rotaţii asupra unui cristal este *compunerea* acestora. Rezultatele din tabloul (1) şi cele de după el, pot fi scrise într-un singur tablou patratic astfel:

	L	R	Q	P	N	M
L	L	R	Q	P	N	M
R	R	Q	P	N	M	L
Q	Q	P	N	M	L	R
P	P	N	M	L	R	Q
N	N	M	L	R	Q	P
M	M	L	R	Q	P	N

(2)

unde citim rezultatul compunerii rotaţiei S cu rotaţia T, căutînd pe intersecţia liniei S cu coloana T. De exemplu, NQ se găseşte la intersecţia liniei N (a cincea) cu coloana Q (a treia) şi este L.

Putem de asemenea observa că toate rotaţiile se pot exprima cu ajutorul uneia (R) dacă aceasta se repetă de un număr de ori. Astfel:

$$R = R;\quad Q = R \cdot R = R^2;\quad P = RQ = R \cdot R^2 = R^3;\quad N = R \cdot P = R \cdot R^3 = R^4;$$
$$M = R \cdot N = R \cdot R^4 = R^5;\quad L = RM = R^6.$$

Cu aceste notaţii, tabloul (2) se mai poate scrie

	L	R	R^2	R^3	R^4	R^5
L	L	R	R^2	R^3	R^4	R^5
R	R	R^2	R^3	R^4	R^5	L
R^2	R^2	R^3	R^4	R^5	L	R
R^3	R^3	R^4	R^5	L	R	R^2
R^4	R^4	R^5	L	R	R^2	R^3
R	R^5	L	R	R^2	R^3	R^4

(3)

3. Să considerăm un *cristal din clasa trigonal-bipiramidală*, cu alte cuvinte un cristal care admite o axă de rotaţie ternară şi un plan de simetrie. Tipul cristalin este format din două piramide drepte, simetrice faţă de baza comună (un triunghi echilateral). Acest cristal (fig. 2) se poate transforma în el însuşi prin:

E (identitatea),

L (rotaţia de 120° în jurul axei VV', în sensul direct),

L^{-1} (rotaţia de 120° în jurul axei VV', în sens opus),

P (simetria faţă de planul ABC),

I (rotaţia de 60° în jurul axei VV' în sensul direct, urmată de simetria faţă de centrul O al triunghiului ABC),

I^{-1} (rotaţia de 60° în jurul axei VV' în sens opus, urmată de simetria faţă de acelaşi centru O.

Din punct de vedere cristalografic planul determinat de VA şi VO nu este un plan de simetrie.

Efectuînd compunerea pe rînd, a fiecăreia din cele 6 transformări de mai sus (care transformă un cristal din clasa trigonal-bipiramidală în el însuşi) cu oricare din ele se obţin rezultate cuprinse în următorul tablou

	E	I	L	P	L^{-1}	I^{-1}
E	E	I	L	P	L^{-1}	I^{-1}
I	I	L	P	L^{-1}	I^{-1}	E
L	L	P	L^{-1}	I^{-1}	E	I
P	P	L^{-1}	I^{-1}	E	I	L
L^{-1}	L^{-1}	I^{-1}	E	I	L	P
I^{-1}	I^{-1}	E	I	L	P	L^{-1}

(4)

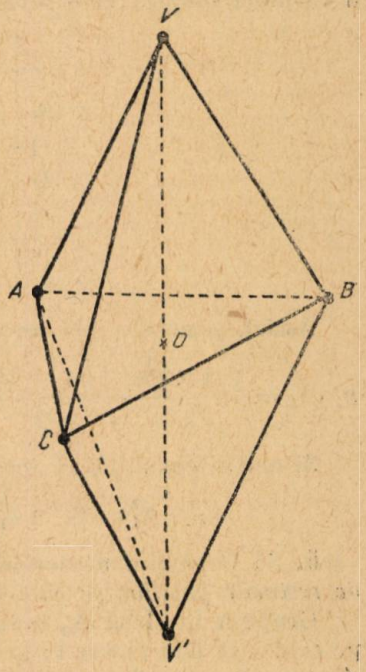


Fig. 2

Ne dăm îndată seama că, prin compunerea a două transformări (din cele 6), obţinem o transformare care se poate realiza direct printr-una din ele, că aceste compuneri sînt comutative şi asociative, că există o transformare de efect identic: E (adică efectuînd transformarea E nu se modifică poziţia anterioară a cristalului) şi că fiecărei transformări îi corespunde una inversă:

$$E \text{ şi } E;\ I \text{ şi } I^{-1};\ L \text{ şi } L^{-1};\ P \text{ şi } P,$$

aşa încît, compunînd două transformări din aceiaşi pereche se obţine E.

4. Să studiem *rădăcinile ecuaţiei binome*

$$x^6 - 1 = 0.$$

Descompunînd-o în factori, rezultă

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

sau

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

care ne dă şase rădăcini pe care le vom nota astfel:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = -1,\ x_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},\quad x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

Înmulţind pe rînd fiecare din aceste rădăcini cu toate celelalte obţinem 36 de rezultate (care nu sînt decît aceste rădăcini, repetate într-o anumită ordine). Să le aşezăm într-un tablou după acelaşi principiu ca mai sus. Cititorii sînt invitaţi să efectueze aceste calcule. Tabloul următor nu este o formulă magică ci o formă simplă de scriere a rezultatelor

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	x_1
x_3	x_3	x_4	x_5	x_0	x_1	x_2
x_4	x_4	x_5	x_0	x_1	x_2	x_3
x_5	x_5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

(5)

Astfel, pentru a lua un singur exemplu

$$x_1 \cdot x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{4} = -\frac{2(+i\sqrt{3} - 1)}{4} = x_5.$$

Şi aci se constată că toate rădăcinile pot fi scrise cu ajutorul uneia:

$$x_2 = x_1^2;\quad x_3 = x_1^3;\quad x_4 = x_1^4;\quad x_5 = x_1^5;\quad x_0 = x_1^0 = x_1^6.$$

5. Să împărţim numerele întregi (pozitive, negative şi zero) *în clase faţă de resturile pozitive pe care le dau la împărţirea prin* 6.

Grupăm în clasa A_0 toate numerele întregi divizibile cu 6; în clasa A_1 pe cele care dau restul 1; în clasa A_2 pe cele care dau restul 2; ...; în clasa A_5 pe cele care dau restul 5.

Notăm aceasta astfel:

$$A_0 = M6\ ;\quad A_1 = M6 + 1\ ;\quad A_2 = M6 + 2$$

$$A_3 = M6 + 3;\quad A_4 = M6 + 4\ ;\quad A_5 = M6 + 5.$$

Definim o operaţie cu aceste clase, astfel: « Suma » a două clase este clasa în care se găseşte suma unui număr din prima clasă cu un număr dintr-a doua. Astfel, de exemplu,

$$A_2 + A_3 = A_5$$

căci:

$$14 + 33 = (2 \cdot 6 + 2) + (5 \cdot 6 + 3) = 7 \cdot 6 + 5$$

sau

$$(M6 + 2) + (M6 + 3) = M6 + 5$$

iar

$$A_4 + A_5 = A_3$$

căci:

$$46 + (-19) = (7 \cdot 6 + 4) + [(-4)\,6 + 5] = 3 \cdot 6 + 9 = 4 \cdot 6 + 3$$

sau

$$(M\,6 + 4) + (M\,6 + 5) = M\,6 + 9 = M\,6 + 3.$$

Rezultă din aceste exemple şi din definiţia claselor că «suma» a două clase este tot o clasă. Rezultatele efectuării tuturor acestor sume se poate scrie în tabloul:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
A_2	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	A_1
A_3	A_3	A_4	A_5	A_0	A_1	A_2
A_4	A_4	A_5	A_0	A_1	A_2	A_3
A_5	A_5	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4

(6)

Rezultatele cuprinse în tablourile (5) şi (6) arată că, compunerea elementelor respective este comutativă şi asociativă, că există un element de efect identic (A_0) şi că fiecărui element îi corespunde unul invers.

6. Să desenăm un *triunghi echilateral* şi să găsim toate transformările geometrice prin care el poate fi făcut să se suprapună pe el însuşi. Există trei rotaţii care satisfac această condiţie:

R_0 (identitatea),

R_1 (rotaţia de 120° în sens trigonometric direct, în jurul centrului triunghiului),

R_2 (rotaţia de 240° în sens trigonometric direct, în jurul centrului triunghiului).

Există însă şi trei simetrii faţă de o axă care satisfac această condiţie (fig. 3):

L — simetria faţă de AA' (mediana vîrfului aşezat în sus),

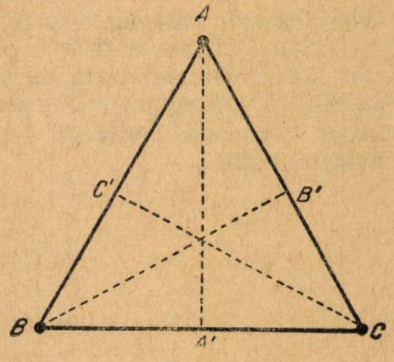


Fig. 3

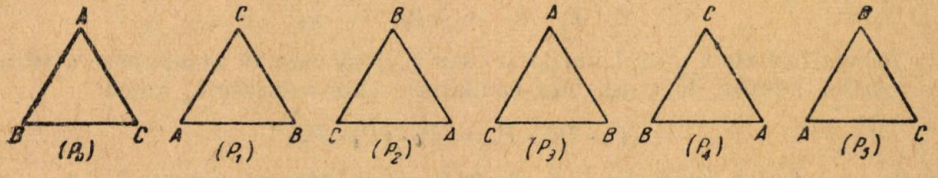


Fig. 4

M — simetria faţă de BB' (mediana vîrfului aşezat în stînga),

N — simetria faţă de CC' (mediana vîrfului aşezat în dreapta).

Aplicînd triunghiului din figura 3, cîte una din aceste transformări obţinem următoarele aşezări ale sale (fig. 4).

Rezultă îndată că acestea sînt singurele poziţii pe care le poate lua triunghiul din fig. 3 pentru a rămîne identic (din punct de vedere geometric) cu el însuşi.

Efectuarea pe rînd a două din aceste transformări, una după cealaltă (sau compunerea a două transformări într-o anumită ordine) dă ca rezultat una din cele 6 transformări de mai sus. Astfel, de exemplu,

$$R_1 \cdot R_2 = R_0; \quad R_1 \cdot L = M; \quad R_2 \cdot N = M$$

dar

$$L \cdot R_1 = N; \quad N \cdot R_2 = L.$$

Folosind metoda indicată mai sus, putem scrie rezultatele compunerii două cîte două a celor 6 transformări, în următorul tablou:

	R_0	R_1	R_2	L	M	N
R_0	R_0	R_1	R_2	L	M	N
R_1	R_1	R_2	R_0	M	N	L
R_2	R_2	R_0	R_1	N	L	M
L	L	N	M	R_0	R_2	R_1
M	M	L	N	R_1	R_0	R_2
N	N	M	L	R_2	R_1	R_0

(7)

Cititorii pot verifica foarte uşor aceste rezultate, folosind un triunghi echilateral de carton, pe care au notat vîrfurile pe ambele feţe.

Tabloul (7) poate fi scris şi altfel, pentru a putea scoate în evidenţă mai clar, unele deosebiri faţă de tablourile (5) sau (6). Să notăm transformările admise de triunghiul echilateral ABC prin efectul lor marcat în fig. 4 prin litera P cu şase indici: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Tabloul (7) se va scrie cu această notaţie, astfel:

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_2	P_0	P_4	P_5	P_3
P_2	P_2	P_0	P_1	P_5	P_3	P_4
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_3	P_5	P_1	P_0	P_2
P_5	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	P_0

(7')

Se verifică uşor pe tablourile (7) sau (7') că această compunere a transformărilor admise de triunghiul echilateral este asociativă, adică

$$(P_i \cdot P_j) \cdot P_k = P_i \cdot (P_j \cdot P_k)$$

unde i, j, k pot lua valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5. Această compunere nu este însă comutativă pentru toate transformările de mai sus.

Transformarea P_0 are un efect identic, iar fiecărei transformări îi corespunde una inversă aşa ca efectele lor compuse să dea P_0:

$$P_0 P_0 = P_0; \quad P_1 P_2 = P_0; \quad P_2 P_1 = P_0; \quad P_3 P_3 = P_0;$$
$$P_4 P_4 = P_0; \quad P_5 P_5 = P_0.$$

7. Să considerăm un *cristal din clasa ditrigonal piramidală*, adică un cristal care admite o axă de rotaţie ternară şi trei plane de simetrie care trec prin această axă. Tipul cristalin este piramida dreaptă cu baza un hexagon neregulat obţinut dintr-un triunghi echilateral, pe laturile căruia sînt construite triunghiuri isoscele egale (fig. 5). Axa de rotaţie OO' este perpendiculară în O pe planul bazei, iar planele de simetrie sînt determinate de această axă şi de cîte una din axele de simetrie ale bazei:

$$AA',\ BB',\ CC'.$$

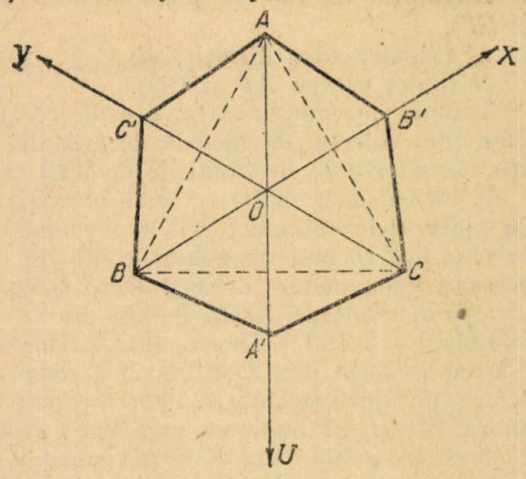


Fig. 5

Rezultă îndată că, pentru orice cristal din această clasă cristalografică există şase transformări admise (care îl transformă în el însuşi, din punct de vedere geometric). Tabloul de compunere al lor este evident, acelaşi cu (7) sau (7'), după cum notăm

R_0 sau P_0 (identitatea),
R_1 sau P_1 (rotaţia de 120° în jurul axului OO'),
R_2 sau P_2 (rotaţia de 120° în jurul axului OO'),
L sau P_3 (simetria faţă de planul AOO'),
M sau P_4 (simetria faţă de planul BOO'),
N sau P_5 (simetria faţă de planul COO').

Rezultă îndată că şi proprietăţile compunerii acestor transformări de geometrie în spaţiu, sînt aceleaşi cu cele din paragraful precedent.

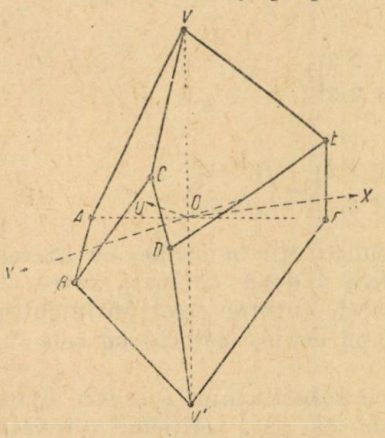


Fig. 6

8. Să considerăm un *cristal din clasa trigonal trapezoedrică*, admiţînd adică, o axă de rotaţie ternară şi trei axe de rotaţie binară perpendiculare pe prima şi formînd între ele un unghi de cîte 120° (ca axele OX, OY, OU din fig. 5). Tipul cristalin este trapezoedrul trigonal (fig. 6), format din trei trapeze cu un vîrf comun în V şi trei trapeze aşezate cu vîrful comun în V'. Axele de rotaţie binară sînt dreptele care unesc mijloacele a două laturi opuse ale hexagonului $ABCDEF$ (cu vîrfurile nesituate în acelaş plan). Aceste trei axe se întîlnesc în mijlocul axei VV'.

Pentru orice cristal din această clasă există şase transformări admise (care îl transformă în el însuşi din punct de vedere geometric):

R_0 (identitatea),
R_1 (rotaţia de 120° în sens trigonometric direct în jurul axei VV'),

R_2 (idem de 240°),

L (rotația de 180° în jurul dreptei care unește mijloacele laturilor BC și EF),

M (idem pentru ED și AB),

N (idem pentru AF și CD).

Tabloul de compunere al acestor rotații este chiar (7). Pe un model de lemn (din colecția de modele de cristale) se pot ușor verifica aceste rezultate ținînd seama de notațiile de pînă acum.

9. Să considerăm trei obiecte oarecare pe care să le notăm cu A, B, C. Cu ajutorul lor putem forma 6 *permutări*: ABC, CAB, BCA, ACB, CBA, BAC (adică tocmai triunghiurile din fig. 4, citite începînd cu vîrful de sus, în sens trigonometric direct). Dacă comparăm aceste așezări ale literelor cu așezarea inițială ABC, fiecare din cele 6 permutări definește o anumită schimbare a literelor. De exemplu, permutarea CAB arată că litera A (prima) a ajuns în locul doi, că litera B (a doua) a ajuns în locul 3 și că litera C (a treia) a ajuns în locul 1. Pentru a marca mai clar această schimbare, vom înlocui literele cu numerele care arată ordinea lor, vom nota cele șase poziții de mai sus punînd una sub alta poziția inițială și poziția finală. Căpătăm astfel, așa numitele *substituții* de trei obiecte

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Înmulțirea a două substituții se efectuează schimbînd ordinea termenilor primei linii din substituția a doua, așa ca să coincidă cu așezarea liniei a doua a primei substituții, schimbînd în mod corespunzător și linia a doua a substituției a doua și eliminînd apoi, liniile identice. De exemplu, pentru a efectua înmulțirea

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

o putem scrie.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};$$

sau

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

Notînd (pentru a ușura scrierea) cele șase substituții în ordine, cu literele P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 desigur că înmulțirea a două oarecare intre ele va da tot una din aceste substituții. Rezultatele tuturor celor 36 înmulțiri posibile scrise sub formă de tablou, ca și pînă acum, coincid cu cele din tabloul (7′).

Cititorii vor prinde bine metoda înmulțirii substituțiilor (pe care o vor întîlni și ulterior) făcîndu-le efectiv pe cele de mai sus, verificînd totodată, rezultatele înscrise în tabloul (7′) — în care de data aceasta literele P_0, P_1, ..., P_5 au alte semnificații decît acolo.

Rezultă imediat că și proprietățile înmulțirii substituțiilor de 3 obiecte sînt aceleași cu cele din paragrafele 6, 7, 8.

10. In fiecare din cele 9 exemple precedente am avut definită cîte o operație: compunerea a două transformări în plan (§ 1, 6), compunerea a

două transformări admise de un corp geometric (§ 2, 3, 7, 8), înmulțirea unor numere complexe (§ 4), adunarea unor numere întregi (§ 5), înmulțirea unor substituții (§ 9). Aceste operații efectuate între două elemente ale exemplului respectiv, dau ca rezultat tot un element al acelui exemplu. Fiecare din operațiile de mai sus satisfac condițiile:

a) *asociativitatea*: relația $(AB)\,C = A\,(BC)$ este valabilă pentru oricare trei elemente A, B, C ale unui exemplu (a se vedea mai detailat la § 1 și 6);

b) *existența elementului identic*: printre elementele fiecărui exemplu se găsește unul (să-l notăm cu E), așa încît $AE = EA = A$ oricare ar fi elementul A al exemplului;

c) *existența elementului invers*: pentru fiecare element A al unui exemplu există un element A^{-1} al său, așa că $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

În afară de acestea, exemplele 1...5 inclusiv, satisfac și condiția de

d) *comutativitate*: relația $AB = BA$ este valabilă pentru oricare două elemente A și B ale fiecăruia din exemplele 1...5.

Cu aceste precizări, putem schița acum o definiție a noțiunii de grup abstract:

Numim grup totalitatea unor elemente între care s-a definit o operație care asociază la două elemente (într-o ordine anumită) un element dintre ele, așa ca operația să satisfacă condițiile a), b), c) de mai sus.

Dacă și condiția *d)* este îndeplinită, grupul se numește *comutativ*; dacă această condiție nu este îndeplinită, grupul se numește *necomutativ*.

11. Inainte de a preciza mai mult definiția de mai sus a grupului, să mai dăm exemple din diferite ramuri cunoscute.

Desigur că numărul elementelor grupului nu-i necesar să fie doar de 6 ca mai sus și nici măcar finit. Numărul elementelor grupului poartă numele de *ordinul* grupului.

1° Numerele întregi (pozitive, negative și zero) formează un grup comutativ infinit cu operația de adunare aritmetică.

2° Numerele întregi pare ($\leqslant 0$) de asemeni.

3° Numerele raționale, pozitive formează un grup comutativ infinit, față de operația de înmulțire.

4° Numerele complexe formează un grup comutativ infinit, față de operația de adunare.

5° Vectorii plani formează un grup față de operația de adunare vectorială.

6° Rotațiile unui poligon regulat cu n laturi, în jurul centrului, așa ca poligonul să se suprapună pe el însuși, formează un grup comutativ de ordin n.

7° Clasele de resturi pozitive față de un întreg oarecare m formează un grup comutativ de ordin m, față de operația de adunare (definită ca în § 5).

8° Rotațiile unei piramide drepte, regulate, care o fac să se suprapună pe ea însăși formează un grup comutativ finit, față de compunerea rotațiilor (definită ca în § 2).

9° Rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$, formează un grup comutativ de ordin, n, față de operația de înmulțire.

10° Substituțiile de n obiecte în care am definit înmulțirea ca în § 9, formează grupul S_n — grupul simetric de ordin $n!$, necomutativ. Demonstrația că sînt îndeplinite condițiile *a)*, *b)*, *c)* va fi dată la un paragraf următor unde se analizează mai multe proprietăți ale substituțiilor.

11° Rotaţiile şi răsturnările unei bipiramide drepte, cu baza un poligon regulat cu n laturi formează un grup necomutativ de ordin $2n$, faţă de compunerea transformărilor admise de bipiramidă.

Rotaţiile în număr de n în jurul axei bipiramidei coincid cu cele de la 8°.

Răsturnarea este o rotaţie de 180° în jurul unei axe de simetrie a poligonului de bază. Compunerea a două rotaţii dă o rotaţie, compunerea unei rotaţii cu o răsturnare dă o răsturnare. Inversul unei rotaţii este tot o rotaţie. Inversul unei răsturnări este aceeaşi răsturnare. Elementul identic este rotaţia de 0° (sau 360°).

A fiind o rotaţie şi B fiind o răsturnare, din $ABA = B$ rezultă $A \cdot B = B \cdot A^{-1}$, ceea ce arată că grupul este necomutativ.

12° Rotaţiile unei sfere în jurul centrului său formează grup faţă de compunerea acestor rotaţii.

Despre grupurile rotaţiilor fiecărui poliedru regulat în jurul centrului, aşa ca să coincidă cu el însuşi, se dau mai multe detalii într-un paragraf următor.

Nu trebuie să credem însă, că oricare elemente pentru care definim o operaţie (satisfăcînd unora din condiţiile de mai sus), formează grup. Dăm mai jos cîteva exemple de acest fel.

1° Rădăcinile ecuaţiei $x^6 + 1 = 0$ verifică condiţiile *a)*, *c)*, *d)* pentru operaţia de înmulţire a lor. Totuşi, nu formează grup deoarece produsul a două rădăcini nu dă tot o rădăcină iar elementul identic nici nu există.

2° Numerele întregi cuprinse între -10 şi $+10$ verifică condiţiile *a)* *b)*, *c)* şi *d)* pentru operaţia de adunare a lor. Totuşi, nu formează grup deoarece suma a două dintre ele nu este întotdeauna printre ele: $8 + 7 = 15$, de exemplu.

3° Numerele întregi, impare, inclusiv zero, verifică condiţiile *a)*, *b)*, *c)* şi *d)* pentru operaţia de adunare a lor. Totuşi, nu formează grup pentrucă suma a două dintre ele, diferite de zero, este un număr par.

4° Numerele raţionale negative nu formează grup faţă de înmulţire (deşi verifică condiţiile *a)*, *c)*, *d)*, căci produsul a două dintre ele este un număr pozitiv.

12. Să precizăm acum unele din elementele definiţiei grupului abstract.

Spunem că, avînd un număr de elemente, în mulţimea lor s-a definit o *operaţie* (produs), atunci cînd *oricărei* perechi A, B de elemente (diferite sau identice), luate într-o anumită ordine, i s-a asociat, după o regulă precisă, un *singur* element.

Se vede deci, că noţiunea de operaţie presupune nu numai posibilitatea efectuării ei pentru *orice* pereche dar şi *unicitatea* rezultatului. Noţiunea de operaţie nu presupune comutativitatea. Ca operaţii se pot considera nu numai cele aritmetice (adunare, înmulţire) ci şi altele (suma vectorilor, compunerea rotaţiilor, înmulţirea substituţiilor, etc.) cum s-a văzut din exemplele anterioare.

Asociativitatea operaţiei, adică faptul că $(AB)\,C = A\,(BC)$ pentru oricare elemente A, B, C ale mulţimii considerate, ne arată ce se înţelege prin produsul a trei elemente, nu numai a două, deoarece obţinem acelaşi rezultat fie că produsul AB se înmulţeşte cu C fie că A se înmulţeşte cu produsul BC. Faptul că o operaţie este asociativă permite să considerăm şi produsul a p elemente dintre cele asupra cărora am definit operaţia. Se poate demonstra anume, că produsul a p factori este independent de aşezarea parantezelor.

Elementul identitate E (numit *unitate* — pentru înmulțire — sau *zero* — pentru adunare) are proprietatea că efectuînd operația între el și un element oarecare al mulțimii, rezultatul este acest din urmă element: $AE = EA = A$.

Într-un grup nu există decît un singur element E. Căci dacă ar exista și un al doilea E; produsul EE' ar fi egal și cu E și cu E' și deci, $E = E'$.

Element invers și *operație inversă* se pot defini mai precis astfel: Dacă pentru orice A și B din mulțimea elementelor pe care le studiem, ecuațiile $AX = B$ și $YA = B$ admit fiecare o soluție unică, X și Y fiind două elemente ale aceleiași mulțimi, se zice că am definit operația inversă operației AB sau BA (și elementul invers lui A).

Dacă operația inversă este definită, să demonstrăm că există în grup, un singur element care satisface condiția $AE_A = A$, adică un *element unitate la dreapta.* Într-adevăr, din relațiile $YA = B$ și $AE_A = A$ putem deduce, prin înmulțirea celei de-a doua cu Y la stînga:

$$Y(AE_A) = YA = B.$$

Această relație, pe baza asociativității și a celei dintîi, devine

$$Y(AE_A) = (YA)E_A = BE_A.$$

Comparînd-o cu precedenta, rezultă că și $BE_A = B$. Cu alte cuvinte, am arătat că există elementul unitate la dreapta (E') și că el este unic (nu depinde de elementul A de la care pornim).

În mod asemănător se demonstrează existența și unicitatea elementului *unitate la stînga* E''.

Ca și mai sus, din $E''E' = E'$ și $E''E' = E''$ rezultă că $E'' = E' = E$. Am demonstrat astfel că *în fiecare înmulțire în care s-a definit o operație asociativă și operația inversă există un element unitate și unul singur* care să satisfacă relațiile $AE = EA = A$ pentru orice element A al mulțimii.

Din operația inversă rezultă că, pentru orice element A există două elemente A' și A'' care satisfac relațiile $AA' = E$ și $A''A = E$. Pentru a arăta că elementele A' și A'' coincid, să calculăm în două moduri, expresia $A''AA'$. Obținem:

$$A''AA' = A''(AA') = A''E = A''$$

și

$$A''AA' = (A''A)A' = EA' = A'$$

și deci, $A'' = A'$. Acest element se notează cu A^{-1} și se numește inversul elementului A. Deci, *pentru orice element A al unei mulțimi G în care s-a definit o operație asociativă și operația inversă, există în G un element invers A^{-1} care satisface relațiile*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Inversul elementului A^{-1} este chiar A, adică $(A^{-1})^{-1} = A$. Elementul invers al unității este unitatea $E^{-1} = E$. Inversul elementului produs AB este $B^{-1}A^{-1}$, adică $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Într-adevăr, dacă notăm $(AB)^{-1} = C$ avem $(AB)C = E$, de unde $BC = A^{-1}$; prin înmulțirea la stînga cu B^{-1} rezultă $C = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

În mod asemănător se arată pentru p factori:

$$(ABC \dots KL)^{-1} = L^{-1} K^{-1} \dots C^{-1} B^{-1} A^{-1}.$$

Din rezultatele dovedite mai sus se poate trage concluzia că, definiţia noţiunii de grup de la § 10 este echivalentă cu următoarea *definiţie*:

Grupul este o mulţime de elemente în care s-a definit o operaţie aşa ca:

a) *operaţia să fie asociativă* şi

b) *să fie definită operaţia inversă.*

13. Să analizăm tabelele de grup scrise în § 2...9, care conţin sub formă concentrată, rezultatul aplicării operaţiei de grup la oricare două elemente ale sale.

Pe linia indicatoare (sus) se scriu toate elementele grupului (cel puţin pentru cele de ordin nu prea mare) începînd cu E, iar pe coloana indicatoare (în stînga) se repetă, în aceeaşi ordine, toate elementele. Tabela de grup se completează apoi, aşa ca la intersecţia liniei pe care se află elementul A (în stînga) cu coloana pe care se află elementul B (sus) să se găsească elementul AB. Prin urmare, în afara liniei şi coloanei indicatoare, tabela de grup este patratică.

Tabelele (2), (6) reprezintă grupuri comutative de ordinul şase, iar tabelele (7), (7′) un grup necomutativ de acelaşi ordin.

Tabela de grup comutativ este simetrică faţă de diagonala principală (din colţul din stînga sus la cel din dreapta jos) deoarece $AB = BA$.

In tabelele (2)...(7′) s-a putut constata că în oricare rînd sau coloană nici un element de grup nu se repetă. Să demonstrăm în general, această proprietate fundamentală a grupurilor: *în fiecare rînd sau coloană a tabelei de grup, fiecare element al grupului intervine odată şi numai odată.*

Elementele unui rînd pot fi exprimate prin AX, unde A este primul element al rîndului respectiv, iar X este fiecare element al grupului. Deoarece ecuaţia $AX = B$ admite o singură soluţie $X = A^{-1} B$, rezultă că toate elementele grupului sînt reprezentate prin AX. De aci rezultă îndată prin numărare că, pentru grupurile finite, AX devine o singură dată fiecare element al grupului. (Pentru cele infinite acestea se arată astfel: din $AB = AC$ prin înmulţirile la stînga cu A^{-1} rezultă $A^{-1} AB = A^{-1} AC$. Cum însă $A^{-1} A = E$; $EM = M$ şi pe baza asociativităţii rezultă $B = C$. Adică, nu există două elemente identice în expresia AX.

14. Să studiem o categorie importantă de grupuri: *grupurile ciclice.*

Analizînd exemplul din § 4 am arătat că toate rădăcinile ecuaţiei binome $x^6 - 1 = 0$ se pot reprezenta prin puterile succesive ale rădăcinii

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

şi anume:

$$x_2 = x_1^2; \quad x_3 = x_1^3; \quad x_4 = x_1^4; \quad x_5 = x_1^5; \quad x_6 = x_1^0 = x_1^6.$$

Un lucru analog am arătat şi la exemplul din § 2, unde «puterile succesive» ale rotaţiei P_1 însemnau aplicarea succesivă a acesteia de 2, 3, 4, 5, 6 ori.

Elementele obţinute prin aplicarea repetată a operaţiei de grup asupra unui element A; $AA = A^2$, $AAA = A^3$, ..., A^m, ... se numesc *puterile* lui A.

Să dovedim că: *un element A şi cu toate puterile sale, cuprinse într-un grup finit, formează un grup comutativ* (generat de A).

Să verificăm că sînt îndeplinite condiţiile din definiţia grupului. Produsul a două puteri A^m, A^n este tot o putere A^{m+n}. Asociativitatea se verifică imediat. Comutativitatea rezultă astfel: dacă n este mai mare ca m dutem scrie $n = m + k$ şi prin urmare $A^n A^m = (A^m A^k) A^m = A^m (A^k A^m) = = A^m A^n$.

Putem dovedi existenţa elementului unitate procedînd astfel: şirul puterilor succesive ale lui A este finit, grupul în totalitatea lui fiind finit. Să presupunem că A^{p+1} este cea mai mică putere a lui A care este egală cu una din puterile precedente: $A^{p+1} = A^m$. Să arătăm că $m = 1$. Intr-adevăr, dacă m ar fi mai mare decît 1 prin înmulţirea cu A^{-1}: egalitatea precedentă ar deveni $A^p = A^{m-1}$ adică nu ar mai fi $p + 1$ cea mai mică putere egală cu una precedentă, ceea ce este contrar ipotezei. Deci din $m=1$ rezultă că $A^{p-1} = A$ şi, prin urmare, $A^p = E$. Aşa dar, puterile A, A^2, A^3,..., A^{p-1}, A^p formează un grup în care p este cea mai mică putere pentru care A^n devine elementul unitate, iar inversul elementului A^r este A^{p-r}.

O exemplificare a acestei teoreme o constituie grupul comutativ de ordinul trei generat de rotaţia R_1 din grupul de ordin 6 de la § 6.

Ordinul elementului A este numărul p de mai sus care este şi ordinul grupului generat de A. Un astfel de grup, generat de un element, se numeşte *grup ciclic*.

Paragrafele 1...5 inclusiv dau exemple de grupuri ciclice.

Pentru un poligon regulat de n laturi grupul rotaţiilor care îl suprapun pe el însuşi este un grup ciclic generat de rotaţia de $\frac{360^\circ}{n}$, în jurul centrului. În mod asemănător, pentru grupul rotaţiilor piramidei drepte cu baza un poligon de n laturi. Grupul numerelor întregi ($\lesseqgtr 0$) este un grup ciclic infinit, faţă de adunare, generat de numărul 1.

15. Analizînd din nou exemplele din § 1...9 se constată că ele dau naştere la grupuri de ordinul 6 în care tabela de grup este de două tipuri. Dacă nu ne preocupăm de natura elementelor grupurilor respective (rotaţii în plan, rotaţii în spaţiu, rădăcini de ecuaţii, clase de numere, substituţii etc.) şi nici de forma concretă a operaţiei definite pentru compunerea elementelor (adunare, înmulţire algebrică, compunere de transformări geometrice, înmulţire de substituţii, etc.) grupurile de la § 1...5 sînt analoage. Dacă stabilim o corespondenţă între elementele grupului § 4 cu § 5 (de exemplu) astfel:

$$x_0 \text{ cu } M\,6;\ x_1 \text{ cu } M\,6+1;\ x_2 \text{ cu } M\,6+2;\ x_3 \text{ cu } M\,6+3;$$
$$x_4 \text{ cu } M\,6+4;\ x_5 \text{ cu } M\,6+5,$$

este clar că, la *un* element al primului grup, corespunde *un* element al celuilalt şi *reciproc*. O astfel de relaţie între elementele celor două grupuri poartă numele de *corespondenţă biunivocă*.

Comparînd apoi, tabelele de grup respective constatăm că produsul a două elemente ale grupului § 4 este corespondentul produsului elementelor corespondente din grupul § 5. Aşa de exemplu,

$$x_3 \cdot x_5 = x_2 \text{ iar } (M\,6+3)+(M\,6+5) = M\,6+2.$$

Astfel de relații se pot stabili între toate grupurile din primele 5 paragrafe. Aceste grupuri au, în afara literelor diferite, aceiași tabelă de grup.

Pentru grupurile de la § 6, 7, 8, 9 am ales și o aceiași rotație ceea ce ne-a permis să scriem o singură dată tabela de grup pentru cele 4 exemple.

Din aceste cazuri particulare putem scoate noțiunea de *izomorfism.*

Dacă între elementele a_i și b_i a două grupuri se stabilește o corespondență biunivocă ($a_i \leftrightarrow b_i$) și dacă produsul a două elemente ale primului grup $a_r a_s = a_u$ corespunde în această corespondență biunivocă produsului elementelor corespunzătoare din al doilea grup $b_r b_s = b_u$, cele două grupuri se numesc izomorfe iar între ele s-a stabilit un izomorfism.

Se poate ușor arăta că, dacă două grupuri sînt izomorfe, elementele lor unitate se corespund, iar la două elemente inverse ale unui grup corespund elemente de asemeni inverse ale celuilalt.

Din cele de mai sus rezultă îndată că grupurile izomorfe au același ordin și că ele sînt simultan comutative (sau necomutative). Grupurile ciclice de același ordin sînt izomorfe.

16. Să analizăm acum, mai îndeaproape, grupurile finite de cele mai mici ordine.

1° Grupul de ordin unu este format doar din E.

2° Grupul de ordin doi este format din două elemente E și A cu tabela de compunere

	E	A
E	E	A
A	A	E

Un exemplu foarte simplu este dat de numerele 1 și — 1, pentru operația înmulțirii (ceea ce se numește *regula semnelor* la înmulțire). Alt exemplu este rotație de 0° și 180° a hexagonului în jurul centrului său, sau substituțiile $\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$, pentru înmulțirea lor.

Este clar că toate grupurile de ordin doi sînt ciclice și izomorfe între ele.

3° Grupul de ordinul trei este format din trei elemente E, A, B cu tabela de compunere

	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	E
B	B	E	A

Ca elemente ale grupului se pot lua: x_0, x_2, x_4 de la § 4, P_0, P_2, P_4 de la § 2; $M6$, $M6+2$, $M6+4$ de la § 5; R_0, R_1, R_2 de la § 6, 7; P_0, P_1, P_3 de la § 9.

Pe baza teoremei demonstrate la § 13, rezultă că nu se mai poate scrie o altă tabelă de grup pentru grupul de ordinul 3.

Deci, toate grupurile de ordinul trei sînt ciclice și izomorfe între ele.

4° Un grup de ordinul patru este format din elementele E, A, B, C. Tabela de grup este de două feluri,

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

sau

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

Ca elemente ale grupului ciclic de ordinul patru se pot lua: rotaţiile unui patrat în iurul centrului, clasele de resturi pozitive, faţă de împărţirea cu patru (pentru adunare), numerele i, i^2, i^3, i^4 (cu $i = \sqrt{-1}$) pentru înmulţire, etc.

Toate aceste grupuri ciclice de ordinul patru sînt izomorfe între ele.

Ca elemente ale grupului de ordinul patru, cu tabela de grup din dreapta, se pot lua: simetriile unui dreptunghi, (simetria faţă de centru, faţă de axa paralelă cu baza, faţă de axa paralelă cu înălţimea), simetriile unei prisme rombice oblice (faţă de centru, faţă de o axă prin centru, faţă de un plan perpendicular în centru, pe axă), clasele $M8 + 1$, $M8 + 3$, $M8 + 5$, $M8 + 7$ (faţă de înmulţire), etc.

Toate aceste grupuri de ordinul patru sînt comutative şi izomorfe între ele.

Să arătăm că grupurile de ordinul patru nu pot avea decît una din tabelele date mai sus.

Dacă grupul are un element de ordinul 4 el este ciclic cu tabela din stînga. Dacă nu are un element de ordinul 4 grupul nu poate avea un element de ordinul trei (căci grupul ar avea ordinul trei, şase, nouă, etc.), ci de ordinul doi. Deci $A^2 = E$, $B^2 = E$, $C^2 = E$. Pe linia a doua se vor scrie deci, elementele $AECB$. Pe linia a treia $B?$ $E?$ iar pe a patra $C??$ E (semnele de întrebuinţare ţin locul elementelor nedeterminate). Citind pe coloane, rezultă că pe a treia trebuie citit $BCEA$ iar pe a patra $CBAE$ Rămîne pentru linia a patra $CBAE$ (aplicînd şi proprietatea de la § 13).

5° Grupul de odin cinci (sau şapte) nu poate fi decît ciclic pentrucă nu poate avea un element de alt ordin decît cinci (sau şapte). Este indicat ca, după exemplul grupului ciclic de ordin patru de mai sus şi a celui de ordin şase (§ 2) cititorul să le scrie şi pe acestea.

6° Grupurile de ordin şase nu pot avea decît tabelele de la § 2 sau § 6. Demonstraţia are următoarele etape: grupul nu poate avea doar elemente de ordinul 2 (două elemente de ordin doi dau un grup de ordin patru; trei elemente de ordin 2 dau un grup de ordin 8); dacă are un element de ordin 3: A şi un element de ordin 2: B el poate fi comutativ: $AB = BA$ şi atunci e ciclic sau poate fi necomutativ: $AB = BA^2$ şi atunci este izomorf cu cel din § 6.

Este indicat ca cititorul să alcătuiască demonstraţia completă a acestei teoreme, schiţată doar mai sus.

7° Să se caute grupurile de ordin 8.

Indicaţie: cu elemente de ordin doi doar, grup comutativ; cu un element de ordin patru, celelalte de ordin doi — comutativ; cu un element de ordin patru, celelalte de ordin doi — necomutativ (ca model, grupul simetriilor patratului); cu un element de ordin opt — ciclic.

ENERGIA ATOMICĂ ŞI UTILIZAREA EI PAŞNICĂ

VIRGIL ATANASIU

LA 27 iunie 1954, pentru prima dată în lume, a intrat în funcţiune în U.R.S.S. o centrală electrică industrială pe bază de energie atomică.

Pentru prima dată o turbină industrială lucrează nu prin arderea cărbunilor sau a altor tipuri de combustibili, ci prin energie atomică, pusă în libertate prin fisiunea nucleului de uraniu.

La mai puţin de şapte luni de la această dată memorabilă, care a însemnat un pas înainte pe calea folosirii paşnice a energiei atomice, Uniunea Sovietică dovedeşte odată mai mult, hotărîrea ei de a împărtăşi importantele descoperiri ale savanţilor săi şi altor popoare, determinînd o cît mai largă întrebuinţare a energiei nucleare în scopuri paşnice, în scopul dezvoltării ştiinţei, pentru binele şi fericirea popoarelor.

Printre popoarele care se vor bucura de ajutorul tehnico-ştiinţific sovietic pentru dezvoltarea cercetărilor în domeniul utilizării paşnice a energiei nucleare şi a izotopilor radioactivi, se află şi Republica Populară Romînă.

Oamenii de ştiinţă din Patria noastră şi-au exprimat deosebita recunoştinţă faţă de guvernul sovietic pentru această hotărîre, care le deschide noi şi minunate perspective de muncă ştiinţifică, iar ţării noastre, multiple căi de prosperitate.

Hotărîrea guvernului sovietic prevede acordarea ajutorului multilateral în ceea ce priveşte proiectarea şi livrarea utilajului, construirea reactorilor nucleari, acceleratorilor de particule elementare, precum şi livrarea cantităţilor necesare de materiale fisionabile, atît pentru generatorii atomici cît şi pentru lucrările de cercetare ştiinţifică.

In cadrul articolului de faţă vom căuta să aducem unele lămuriri privind cel mai important izvor de energie — energia nucleară, — izotopii radioactivi artificiali şi aplicaţiile pe care le pot avea în cele mai variate domenii ale ştiinţei şi practicii.

Nu se poate vorbi însă, de energie nucleară, de izotopi radioactivi, fără a aminti mai întîi, despre cunoştinţele referitoare, la structura atomului şi a nucleului atomic, în special.

I. Structura atomului şi caracteristicile nucleului atomic

Spectrele atomice, pe deoparte, şi manifestările radioactive, pe de altă parte, au arătat că atomii sînt sisteme complexe formate din trei particule elementare: *electronii negativi*, *protonii* şi *neutronii*. Protonii şi neutronii intră în constituţia nucleului atomic, după cum a arătat fizicianul sovietic D. D. Ivanenco, iar electronii gravitează în jurul acestui nucleu care este de vre-o zece mii de ori mai mic decît atomul. Electronii din jurul nucleului condiţionează reacţiile chimice, spectrele, coeziunea, etc., iar nucleele atomice, fenomenele radioactive precum şi acelea care apar în transformările nucleare.

Din cele peste 1000 de nuclee cunoscute, cam o treime sînt nuclee stabile iar restul, nuclee radioactive, adică nuclee nestabile care se pot transforma în alte nuclee prin fenomenul numit transmutaţie radioactivă.

Nucleul radioactiv este caracterizat prin aşa numitul *timp de înjumătăţire* (perioadă radioactivă), adică timpul în decursul căruia numărul de

nuclee descreşte la jumătate, acest timp variind în limite foarte largi, de la sutimi de milionime de secundă pînă la miliarde de ani.

Cea mai importantă caracteristică a fiecărui nucleu este *sarcina* lui (Z), adică încărcătura lui electrică pozitivă exprimată în funcţie de sarcina (e) a electronului. Măsurătorile lui Moseley au arătat că sarcina nucleelor din atomii diferitelor elemente coincide cu valoarea *numărului atomic*, adică a numărului sarcinilor pozitive aflate în nucleu, număr care indică totodată locul atomului în tabela lui Mendeleev. Pînă în prezent sînt cunoscute nuclee pentru care Z este cuprins între 1 şi 100. Din punct de vedere teoretic, ar putea să existe şi alte elemente pînă la $Z = 125$.

O altă caracteristică importantă a nucleului este *masa* lui sau *numărul masic* (A) şi reprezintă masa nucleului. Pînă acum sînt cunoscute nuclee avînd $A = 1$ pînă la $A = 248$. Masa nucleului atomic are o valoare apropiată de masa întregului atom.

Aceluiaşi Z îi pot corespunde mai multe valori A, adică un nucleu de sarcină dată Z poate să aibă numere masice A diferite; aceştia sînt *izotopii*.

Pentru a caracteriza componenţa unui nucleu dat este suficient să indicăm sarcina lui jos şi numărul masic (sus). Astfel, nucleul de oxigen se scrie ${}^{18}_{8}O$, nucleul de beriliu ${}^{9}_{4}Be$, de azot ${}^{14}_{7}N$, iar în general ${}^{A}_{Z}M$.

În afară de izotopi, care, după cum am văzut, au pentru acelaşi Z diferiţi A, mai există nuclee care au pentru acelaşi A diferiţi Z; asemenea nuclee se numesc *izobari*, de exemplu, argonul $({}^{40}_{18}A)$ şi cadmiul $({}^{40}_{20}Cd)$.

În fine, printre nucleele radioactive există nuclee cu acelaşi Z şi acelaşi A, dar cu proprietăţi radioactive diferite; asemenea nuclee se numesc *izomeri*.

În afară de sarcină şi masă nucleele se mai caracterizează prin mărimea numită *spin* care se referă la mişcarea sa de rotaţie*), prin *moment magnetic* şi *moment electric*, asupra cărora însă nu vom insista.

După cum ştim, nucleul atomic este alcătuit din protoni şi neutroni Protonii sînt particule elementare — nuclee de hidrogen $({}^{1}_{1}H)$, deci cu $Z = 1$ şi $A = 1$, iar neutronii sînt particule elementare $({}^{1}_{0}n)$, deci cu $Z = 0$ şi $A = 1$.

Cum se explică emisia radioactivă de raze beta (β), adică emisia de electroni a nucleelor radioactive? Explicaţia este următoarea: deşi neutronul şi protonul sînt particule elementare ei se pot transforma unul în celălalt. Neutronul se transformă în proton emiţînd un electron negativ, iar protonul se transformă în neutron, emiţînd un electron pozitiv, un *pozitron*. In ambele cazuri se emite însă, şi cîte o particulă lipsită de sarcină şi cu masa considerabil mai mică decît a electronului — *neutrino*.

În teoria dezintegrării β (emisia de raze β) protonii şi neutronii nu sînt consideraţi particule elementare deosebite, ci drept una şi aceiaşi particulă numită *nucleon*, care se poate prezenta încărcat electric, şi atunci nucleonul este proton, sau neîncărcat şi atunci nucleonul este neutron. Emisia electronului sau a pozitronului, precum şi a unui neutrino, se produce la trecerea nucleului dintr-o stare energetică în alta.

Deci, electronii şi pozitronii nu se găsesc în nucleu, ci se produc în momentul transformării nucleonilor datorită surplusului de energie corespunzător, din cîmpul forţelor nucleare.

---

*) Spinul se exprimă în unităţi $\frac{h}{2\pi}$ (h = constanta lui Plank = $6{,}55 \cdot 10^{-26}$ erg. s).

Un fenomen analog se petrece cînd un atom excitat emite *fotoni*, adică particule de lumină de un fel special, caracterizate prin faptul că masa lor de repaus este egală cu zero, sarcina electrică de asemenea cu zero, iar spinul egal cu 1. În acest caz, nu considerăm că învelişul electronic conţine şi fotoni, ci că este format numai din electroni, iar fotonii se produc în momentul emisiei lor datorită surplusului de energie din cîmpul atomului excitat.

II. Forţele nucleare şi energia de legătură

Protonii şi neutronii sînt legaţi foarte strîns unii de alţii în nuclee atomice. De exemplu, pentru a se despărţi protonii de neutronii care intră în componenţa nucleelor atomilor de heliu conţinuţi într-un gram din acest gaz este nevoie de 175 miliarde calorii; aceasta înseamnă tocmai căldura care s-ar degaja prin arderea a 20 tone de cărbune de pămînt. În procesul invers, adică dacă s-ar putea uni protonii şi neutronii izolaţi în nuclee de heliu, s-ar degaja o cantitate de energie egală cu aceea necesară desfacerii lor.

Trebuie să subliniem faptul că nu în toate nucleele atomice protonii şi neutronii sînt legaţi între ei la fel de puternic. De exemplu, la formarea unor atomi de elemente grele ca uraniu, plutoniu ($A > 200$) pentru unirea fiecărui proton şi neutron este necesară cu 10—13 % mai puţină energie decît la formarea nucleelor atomice ale elementelor cu număr masic de două ori mai mic. De aici rezultă că dacă nucleele uraniului sau plutoniului s-ar rupe în jumătate s-ar forma din ele nucleele unor atomi mai uşori şi s-ar elibera energia rămasă de la formarea nucleelor uraniului sau plutoniului. Tocmai acest proces de *rupere* sau *fisiune* a nucleelor atomice se află, după cum vom vedea, la baza metodelor de obţinere a energiei atomice.

Să revenim la forţele nucleare, adică la forţele care ţin strîns particulele componente ale nucleului.

Dacă ne referim de exemplu, la interacţiunea dintre doi protoni, potrivit sarcinilor pozitive pe care le au fiecare ar rezulta că între aceste particule acţionează forţe de repulsie. Intr-adevăr, dacă între aceste particule nu ar acţiona nici un fel de alte forţe ar urma ca protonii să se respingă între ei răspîndindu-se în toate părţile, deci, nucleele atomilor nu ar putea rămîne în stare de stabilitate. Nucleele atomice există ca formaţii stabile şi acest fapt duce la concluzia că între particulele nucleare acţionează şi alte forţe în afară de cele electrice. Aceste forţe sînt neapărat, forţe de atracţie, iar valoarea lor depăşeşte pe aceea a forţelor de repulsie. In concluzie, forţele nucleare nu sînt de natură electrică. Forţele nucleare nu sînt nici de natură gravitaţională, deoarece particulele avînd masă foarte mică, valoarea acestor forţe este infimă.

Ideea despre natura deosebită a acestor forţe a fost dezvoltată de savanţii sovietici I. E. Tamm şi D. D. Ivanenco.

Intre care particule acţionează aceste forţe? Forţele nucleare sînt forţe de interacţiune ale particulelor nucleare. Ele acţionează între nucleonii cu aceiaşi sarcină, adică între doi protoni, între nucleonii încărcaţi şi cei neutri, adică între un proton şi un neutron, precum şi între nucleonii neutri, adică între doi neutroni; aceste forţe indiferent între care particule se exercită, au aproximativ aceiaşi mărime şi se comportă în acelaşi fel în raport cu distanţa.

Forţele nucleare sînt rezultatul cîmpului nuclear, aşa cum forţele electrice sînt rezultatul cîmpului electric, sau cum forţele gravitaţionale sînt rezultatul cîmpului gravitaţional.

Forţele nucleare se caracterizează prin faptul că acţiunea lor se manifestă numai la distanţe mici şi anume, pe distanţe de ordinul a 10^{-13} cm precum şi prin faptul că posedă proprietatea de saturaţie. Ele sînt deci, forţe mari pe distanţe mici. La o distanţă de două sau trei ori mai mare decît 10^{-13} cm ele devin practic egale cu zero.

Faptul că forţele nucleare acţionează pe distanţă scurtă permite o analogie între nucleu şi o picătură de lichid. Nucleul poate fi considerat o picătură de lichid condensat avînd densitatea de ordinul 10^{14} g/cm^3. În acest caz trebuie să admitem că picătura de lichid nuclear are o tensiune superficială, întocmai ca şi un lichid oarecare. Este evident că energia de legătură a particulelor situate la suprafaţa picăturii este mai mică decît aceea a particulelor din interiorul ei. Pentru a cunoaşte valoarea forţelor nucleare, variaţia lor în funcţie de distanţă, trebuie să plecăm de la valoarea *« defectului de masă »* al nucleelor atomice.

Pentru înţelegerea acestei mărimi, să considerăm un exemplu şi anume, nucleul de heliu (*He*), cu numărul atomic 2 şi numărul masic 4; aceasta înseamnă că în nucleul său există doi neutroni şi doi protoni. În scara fizică (^{16}O) nucleul de hidrogen (^1H) are masa 1,008123, deci cel de heliu, avînd patru nucleoni, ar trebui să aibă o masă de patru ori mai mare, adică 4,032492; se constată însă, că masa nucleului de *He* este cu 0,02859 mai mică, deci, nu este exact de patru ori mai mare decît aceea a nucleului de *H*, ci puţin mai mică. Această micşorare a masei nucleului atomic se numeşte *defect de masă.*

Ce legătură are însă, defectul de masă cu energia de legătură a nucleului? Pentru a răspunde la această întrebare vom examina un fenomen analog. Se ştie că la formarea apei prin combinarea atomilor de hidrogen şi oxigen reacţia este însoţită de o degajare de căldură; această căldură este denumită energia de legătură a moleculei şi caracterizează forţa care uneşte atomii din moleculă. Cu cît este mai mare această energie cu atît este mai stabilă molecula, cu atît mai greu poate fi desfăcută.

La fel stau lucrurile şi cu nucleele atomice, însă pe o scară mai mare a valorilor energiei de legătură dintre particulele componente ale nucleelor, deoarece nucleul este incomparabil mai stabil decît molecula. Astfel, se ştie că atomii îşi păstrează individualitatea chiar la temperaturi foarte ridicate, de zeci de mii de grade, existente în atmosferele stelare, dovadă fiind descoperi ea pe cale spectroscopică a elementelor componente ale astrelor respective. Urmează aşa dar, că energia care se degajă la formarea nucleului este considerabil mai mare decît aceea care se degajă la formarea moleculei.

De unde provine această cantitate de energie?

Conform teoriei relativităţii, energia nu este independentă de masă. Între energie şi masă există relaţia $W = mc^2$, unde c este viteza luminii. Plecînd de la această formulă şi folosind legea fundamentală a mecanicii în formularea ei relativistă, precum şi definiţia lucrului mecanic, ajungem la relaţia Lorentz-Einstein,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

unde m_0 este masa de repaus a unei particule, adică masa unei particule observate la viteze mici în raport cu viteza luminii (sub 100.000 km/s), m — masa aceleiaşi particule la viteze de ordinul vitezei luminii, v — viteza particulei şi c — viteza luminii. Formula ne arată că dacă energia cinetică a particulei creşte, masa observată a particulei în mişcare creşte de asemenea. Pentru viteze obişnuite această schimbare a masei este atît de neînsemnată încît nu poate fi pusă în evidenţă.

În procesele care au loc în atomi sau în nuclee se produc însă, mişcări cu viteze foarte mari şi cu energii care depăşesc considerabil pe cele obişnuite şi de aceea nu trebuie să uităm nici un moment legătura care există între masă şi energie — energia fiind proporţională cu masa şi pătratul vitezei luminii ($W = m c^2$). Această relaţie arată că energia de o calorie este echivalentă cu o masă de $4{,}67 \cdot 10^{-14}$ g. Folosind această relaţie putem afla că masei de 0,02859 — defectului de masă al nucleului de *He* — adică pierderii de masă care are loc la formarea nuclelui de *He*, — îi corespunde o energie de 175 miliarde calorii pentru un gram din acest gaz. Defectul de masă caracterizează deci energia de legătură între particule. La rîndul ei energia de legătură depinde de forţele care acţionează între aceste particule. Analizînd variaţia valorii defectului de masă pentru diferite nuclee, putem trage concluzia asupra valorii forţelor şi asupra dependenţei acestor forţe de distanţă.

III. Reacţiile nucleare

Reacţiile nucleare sînt procese în care prin bombardarea unui nucleu cu o particulă rapidă se produce un nou nucleu şi o altă particulă. Dacă notăm cu A un nucleu oarecare, cu p o particulă (proton, neutron, deuton, particulă α, etc.), cu q particula rezultată, care poate fi una din cele enumerate, şi cu B noul nucleu care se formează în urma bombardării, procesul ce are loc într-o reacţie nucleară poate fi reprezentat prin schema $A + p \rightarrow B + q$.

În timpul unei reacţii ce are loc la energii foarte mari se pot produce chiar mai multe particule q, q_1, q_2.

O reacţie nucleară poate fi comparată cu o reacţie chimică. O reacţie chimică constă în schimbul dintre atomii care alcătuiesc moleculele în reacţie. Într-o reacţie chimică componenţa elementară a substanţelor nu se schimbă, adică elementele care există la începutul reacţiei se găsesc şi după reacţie. În unele reacţii chimice poate avea loc o degajare de căldură, în altele o absorbţie de căldură, primele fiind numite reacţii exotermice, iar celelalte reacţii endotermice.

În reacţiile nucleare au loc transformări mult mai adînci ale substanţelor, se petrec transformări ale elementelor însăşi. În reacţiile nuclare de asemenea poate avea loc o degajare de căldură sau o absorbţie de căldură; primele reacţii se numesc exoenergetice, iar celelalte endoenergetice.

Pe cînd însă, în reacţiile chimice energia este de ordinul cîtorva zeci de kilocalorii (dacă se lucrează cu molecule gram), în reacţiile nucleare energia degajată sau absorbită este de zeci de milioane de ori mai mare.

Un tip deosebit de reacţie nucleară este *fisiunea nucleară*. Să examinăm mecanismul acestui proces.

Am văzut că energia nucleului este determinată de forţele nucleare, de tensiunea superficială a nucleului-picătură şi de forţele de respingere electrică dintre protoni. Experienţa şi calculele arată că în cazul nucleelor grele fisiunea se produce în condiţii avantajoase.

Pentru a explica mecanismul fisiunii vom porni de la analogia dintre nucleu şi o picătură încărcată electric. Experienţa a arătat că o picătură supraîncărcată cu electricitate de acelaşi fel nu-şi păstrează forma sferică; la început picătura se întinde, apoi se strangulează şi se împarte în două (fig. 1). Acest fenomen se întîmplă datorită faptului că forţele de respingere electrică depăşesc acum, forţele de atracţie de natură superficială şi drept urmare, picătura suferă o întindere apoi o strangulare şi rupere.

La fel se petrec lucrurile şi în cazul nucleelor. Energia necesară pentru a determina deformaţia critică a nucleului, după care are loc fisiunea — energia de activare a procesului — este transmisă nucleului de particula absorbită de nucleu.

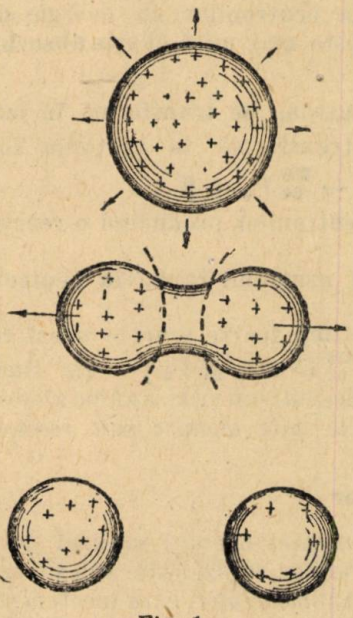


Fig. 1

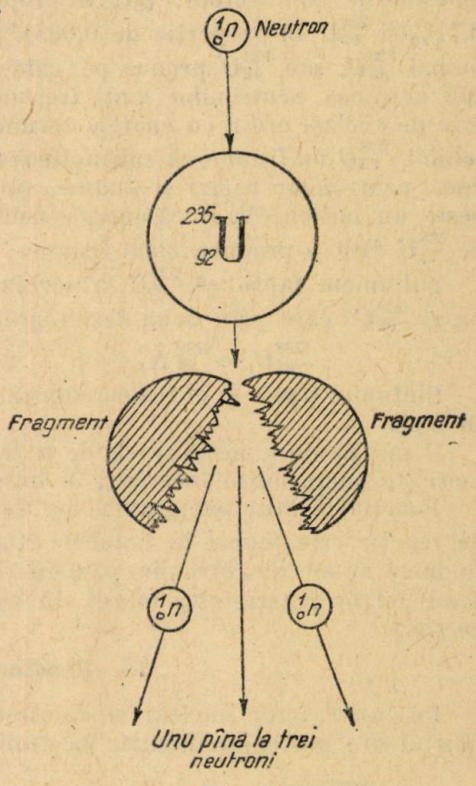


Fig. 2

In fragmentele formate prin fisiunea nucleului forţele de atracţie sînt mai mari decît forţele de repulsie, iar energia sistemului este mai mică decît cea iniţială. Urmează deci, că la formarea a două fragmente se degajă o cantitate de energie. Astfel, la fisiunea nucleului de uraniu se degajă o energie de aproximativ 40 milioane ori mai mare decît în reacţiile chimice curente.

S-a observat de asemenea, că la fisiunea nucleului de uraniu în afară de cele două sau trei fragmente apar şi unul pînă la trei neutroni (fig. 2).

Fisiunea se poate produce în mai multe moduri; unul dintre ele este următorul

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{88}_{35}Ba + ^{145}_{57}La + 3\,^{1}_{0}n$$

Neutronii rezultaţi din procesul de fisiune, numiţi şi neutroni secundari, pot provoca la rîndul lor fisiunea altor nuclee de uraniu, deci apariţia altor

neutroni, etc. Această reacție este numită *reacție* în *lanț*, deoarece produsele ei pot intra din nou în reacție, producînd noi fisiuni.

Trebuie să subliniem faptul că practic, nu orice neutron care pătrunde într-un nucleu de uraniu provoacă fisiunea lui deoarece acest proces depinde de energia neutronului. In afară de aceasta, se știe că uraniul chimic este un amestec de trei izotopi: $^{238}_{92}U$ în proporție de 99,28%, $^{235}_{92}U$ în proporție de 0,71% și $^{234}_{92}U$ în proporție de 0,0051% (urme). Reacție în lanț poate realiza numai $^{235}_{92}U$, sau $^{233}_{92}U$ produs pe cale artificială. Acești izotopi fisionează sub acțiunea neutronilor lenți (termici) adică a neutronilor a căror energie este de același ordin cu energia termică și anume, de circa 0,025 *eV* [1]). In schimb $^{238}_{92}U$ nu fisionează sub acțiunea neutronilor lenți, ci numai sub acțiunea neutronilor rapizi și anume, sub acțiunea neutronilor cu energie de peste un milion eV. Dacă energia neutronului este mai mică el este absorbit de $^{238}_{92}U$ fără a produce nicio fisiune.

Subliniem faptul că $^{238}_{92}U$, absorbind un neutron, se transformă în izotopul $^{239}_{92}U$ care prin două dezintegrări β se transformă în plutoniu 239

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{238}_{93}N_p + \beta^-, \quad \text{iar} \quad {}^{239}_{93}N_p \rightarrow {}^{239}_{94}P_u + \beta^-$$

Plutoniul poate și el fisiona sub influența neutronilor producînd o reacție în lanț.

Urmează deci, necesitatea de a transforma neutronii rapizi în neutroni lenți (termici), adică încetiniți în mișcarea lor.

Reacția în lanț poate avea loc fie într-un timp foarte scurt — acest fel de reacție este folosit în bombele atomice (de $^{235}_{92}U$ sau $^{239}_{94}P_u$) — fie limitîndu-se numărul neutronilor prin diferite procedee într-un ritm anume ales — acest fel de reacție este folosit în așa-numitele *pile atomice* sau *reactori nucleari*.

IV. Reactorul nuclear

Intr-un reactor nuclear se folosește actualmente, uraniul natural pur, thoriul sau plutoniul. Pentru încetinirea neutronilor rapizi este folosit așa numitul *moderator*, care încetinește neutronii fără a-i absorbi (fig. 3). Substanțe folosite drept moderator sînt apa grea și grafitul. Incetinirea are loc în urma ciocnirilor neutronilor cu nucleele moderatorului (fig. 4).

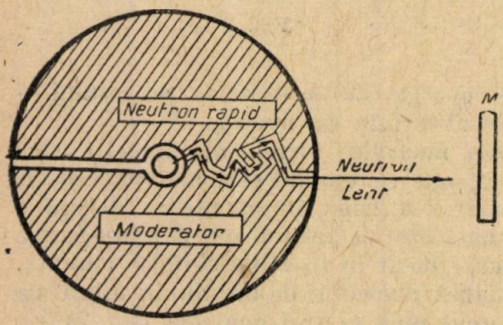


Fig. 3

In reactor uraniul sub formă de bare cilindrice este așezat la intervale regulate, între acestea aflîndu-se straturi de grafit purificat sau apă grea, pentru încetinirea neutronilor produși prin fisiunea nucleelor de uraniu. In afară de uraniu și grafit, pentru reglarea procesului se folosesc și bare de cadmiu sau de oțel borat; nucleele atomilor de cadmiu sau de bor au

[1]) Un electrovolt (eV) este energia pe care o dobîndește un electron cînd se deplasează între două puncte între care există o diferență de potențial de 1 volt.

proprietatea de a absorbi neutronii lenți. Cînd procesul de degajare a energiei atomice devine prea intens, în reactorul nuclear se introduc barele de cadmiu care absorb o parte din neutroni, astfel încît să nu mai poată lua parte la fisionarea nucleelor de uraniu; astfel se încetinește procesul de degajare a energiei atomice, deci se realizează condițiile unei reacții în lanț care poate fi ușor cotrolată.

Căldu a care se degajă în timpul funcționării reactorului este luată de un curent de lichid de răcire; la rîndul său acesta poate produce vapori supraîncălziți într-o instalație termică obișnuită. Acești vapori pot fi utilizați mai departe pentru acționarea unei turbine cu abur, iar aceasta poate acționa un generator electric.

Centrala energetică atomică prezintă numeroase avantaje față de termocentralele care lucrează cu combustibil obișnuit. In combustibilul nuclear concentrarea de energie este extrem de mare. De exemplu, o bucată de uraniu de 14 cm³ poate elibera o cantitate de energie echivalentă cu cea realizată prin arderea a 800 m³ de cărbune sau 470 m³ de petrol. La centralele energetice atomice nu se produce cenușă, nici fum și nu este nevoie de aer. La astfel de centrale nu se pune problema aducerii combustibilului și a îndepărtării cenușei, deci se evită cheltuielile legate de aceste operații, iar faptul că funcționarea reactorului nuclear nu necesită aer permite construirea lui sub pămînt.

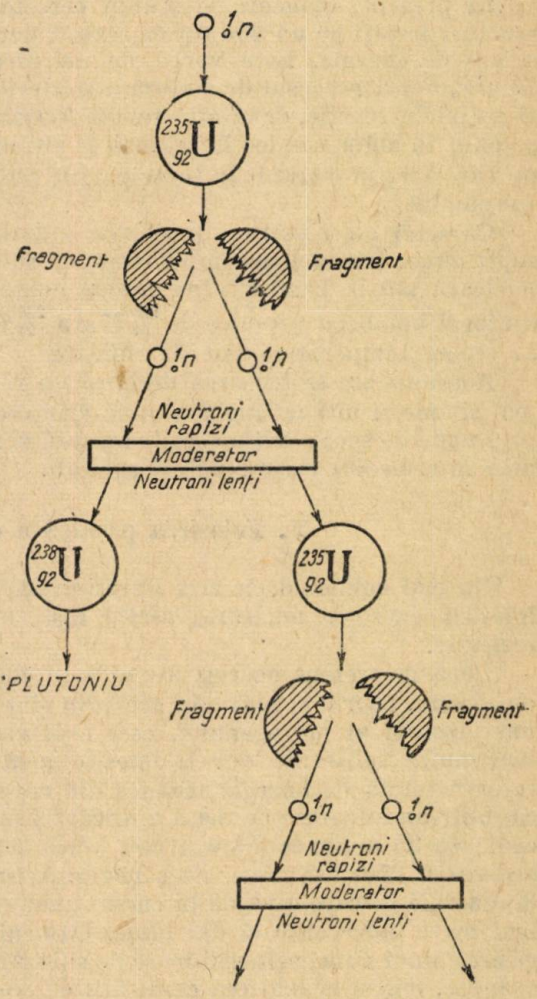


Fig. 4

Reactorul nuclear este încercuit de un strat gros de beton care apără personalul de deservire împotriva neutronilor și radiațiilor substanțelor radioactive ce se formează ca urmare a fisiunii nucleelor de uraniu. Funcționarea normală a unui reactor se reglează prin telecomandă.

In timpul funcționării reactorul nuclear produce în afară de căldură, cantități mari de substanțe radioactive cu utilitate esențială în știința modernă, precum și plutoniu 239.

Reacția în lanț nu este posibilă, deci reactorul nu funcționează dacă nu există o anumită cantitate de uraniu care să-i asigure un *volum critic*. Dacă

volumul reactorului e mai mic decît volumul critic reacţia în lanţ nu se poate produce.

După un anumit timp blocurile de uraniu se scot din reactor şi diferitele substanţe radioactive formate pot fi separate din uraniu pe cale chimică.

În prezent, oamenii de ştiinţă cercetează posibilitatea construirii unor reactori bazaţi pe un nou tip de reacţie nucleară capabil să elibereze cantităţi uriaşe de energie. Este vorba de un proces oarecum invers procesului de fisiune, adică procesul de sinteză a nucleelor de heliu din nuclee de hidrogen O astfel de reacţie, denumită *reacţie termonucleară*, de transformare a hidrogenului în heliu, are loc în soare şi în alţi aştri, fiind cauza producerii energiei pe care aceştia o trimit în toate părţile universului şi din care o parte ajunge pe pămînt.

Oamenii au reuşit să provoace o astfel de reacţie folosind hidrogenul supra greu, tritiul şi o temperatură de sute de mii de grade. Reacţia termonucleară stă la baza aşa numitelor bombe cu hidrogen, fiind amorsată cu ajutorul bombelor atomice de $^{235}_{92}U$ sau $^{239}_{94}Pu$, în perezent, singurele capabile să creeze temperaturi atît de ridicate.

Actualmente se încearcă declanşarea reacţiei termonucleare prin mijloace mai simple şi mai ieftine şi anume prin crearea unor temperaturi locale mari prin unde de şoc; reacţia astfel obţinută poate fi folosită în scopuri industriale prin intermediul unor reactori speciali.

V. Folosirea paşnică a energiei atomice

Nu mai demult decît zece ani în urmă, mulţi fizicieni negau posibilitatea folosirii energiei nucleare; astăzi însă, această posibilitate a devenit o realitate.

Dacă în prezent energia atomică se obţine numai prin fisiunea nucleelor de uraniu, thoriu şi plutoniu sau prin sinteza nucleelor de heliu din nucleele unor izotopi ai hidrogenului, este fapt cert că într-un viitor apropiat, tot mai multe substanţe vor fi folosite pentru producerea energiei atomice; rezerva totală de energie atomică din natură este nelimitată. Calculele arată că dintr-un kilogram de masă a oricăărei substanţe s-ar putea degaja o energie egală cu 25 miliarde kilowattore, adică tot atîta energie cît s-ar degaja prin arderea a 2700000 tone de cărbuni. Aceasta depăşeşte de 2,5 ori cantitatea de energie pe care o va da în cursul unui an hidrocentrala dela Kuibîşev, cea mai mare hidrocentrală din lume. Oamenii de ştiinţă lucrează nu numai la găsirea unui număr cît mai mare de substanţe utilizabile la degajarea energiei atomice, dar şi la mărirea cantităţii de energie obţinute. Uriaşele rezerve de energie atomică din natură vor fi folosite în scopuri paşnice şi pe scară largă cu atît mai repede cu cît mai perfecţionate vor fi metodele pentru eliberarea ei.

Cum poate fi folosită această energie în scopuri paşnice?

Una dintre metodele de folosire a energiei atomice constă în crearea unor centrale energetice atomice speciale pentru producerea energiei calorice şi electrice. Punerea în funcţiune în U.R.S.S. a primei centrale electrice industriale pe bază de energie atomică constituie un prim început de utilizare în scopuri paşnice a energiei nucleului atomic. Savanţii şi inginerii sovietici lucrează la crearea unor noi centrale electrice atomice, mai puternice, care vor furniza cantităţi imense de energie electrică necesară pe ogoare, în uzine automate şi în laboratoare ştiinţifice.

Perspectivele folosirii energiei atomice la diferite motoare sînt deosebit de promiţătoare; motoarele atomice ar putea asigura o mare viteză şi rază de acţiune, deoarece vor folosi «combustibilul» de volum şi greutate minimă. Folosind astfel de motoare, vapoarele vor putea face cele mai îndepărtate curse fără a se opri în porturi; submarinele nu vor mai fi nevoite să-şi completeze mereu rezervele de combustibil şi oxigen, ceea ce reduce raza lor de acţiune. Folosind energia atomică ele vor putea să cerceteze adîncurile oceanelor fără a ieşi la suprafaţă timp îndelungat; ele vor putea naviga sub gheaţă, de exemplu, pentru a studia Arctica. De asemenea, se prevede folosirea energiei atomice pentru a pune în mişcare turbolocomotive cu viteze supersonice pe marile linii ferate, precum şi automobilele şi avioanele atomice. Datorită însuşirilor sale excepţionale, combustibilul atomic va fi utilizat mai ales, la propulsarea rachetelor cu rază mare de acţiune, contribuind prin aceasta la împlinirea visului lui C. E. Ţiolcovski, de a naviga de la o planetă la alta. Este mai mult decît sigur că zborul interplanetar va fi una din realizările erei atomice. Pentru un zbor interplanetar racheta trebuie să aibă viteza necesară pentru a învinge forţa de atracţie a pămîntului şi anume, o viteză care să depăşească 11,2 km/s. O rachetă construită ca să funcţioneze pe bază de combustibil obişnuit nu ar putea să realizeze o viteză mai mare de 3,3 km/s, iar greutatea combustibilului ar trebui să constituie 96% din greutatea totală a rachetei deci, o astfel de rachetă nu poate fi construită. Prin folosirea combustibilului nuclear s-ar putea realiza viteza de 11—12 km/s, necesară pentru ca nava interplanetară să iasă din raza de acţiune a forţei de atracţie a pămîntului. Desigur mai sînt şi alte dificultăţi mari care trebuie învinse pentru a se putea efectua aceste zboruri. Astfel, trebuie realizate materiale excepţional de trainice care să reziste la temperaturile extraordinare care se produc în camera de ardere. Fără îndoială că ştiinţa va rezolva şi aceste dificultăţi.

Într-un viitor apropiat energia atomică va da omului posibilitatea de a întreprinde acţiuni grandioase în amenajarea naturii: închiderea unor strîmtori sau tăierea prin canale a unor istmuri şi insule, operaţii care vor permite schimbarea sensului curenţilor, deci îndepărtarea de la continent a apelor reci, sau dirijarea spre ţărm a curenţilor calzi, provocarea unor depresiuni artificiale în Arctică prin evaporarea cu ajutorul căldurii «atomice» a apei mării sau prin încălzirea maselor de aer arctic, ceea ce va avea ca urmare îndulcirea climei pe continente; irigarea deşerturilor, ridicarea unor diguri uriaşe, mutarea munţilor. Prin ionizarea produsă de o explozie atomică deasupra munţilor s-ar putea crea centre de condensare care ar contribui la formarea norilor pentru ploaie.

Toate aceste acţiuni de transformare a naturii, bazate pe un plan ştiinţific, vor produce omenirii posibilităţi uriaşe de sporire a forţelor de producţie, de progres tehnic şi cultural, de sporire a avutului obştesc, în sfîrşit de îmbunătăţire a condiţiilor naturale de existenţă.

Am văzut că pe lîngă energia calorică furnizată de reactori se produc şi o serie de substanţe radioactive, care pot fi produse şi prin bombardarea diferitelor nuclee cu particule elementare — protoni, deutoni, particule α accelerate cu ajutorul ciclotroanelor, betatroanelor, etc. Aceste substanţe sînt utilizate din ce în ce mai mult în cercetările ştiinţifice din diferite domenii, la rezolvarea unor probleme de cea mai mare importanţă. Pe lîngă utilizarea energiei atomice în sensul aplicaţiilor directe a funcţio-

nării unui reactor, trebuie să ţinem seama şi de produsele secundare amintite mai înainte, care rezultă la funcţionarea reactorului odată cu plutoniul. Aceste substanţe radioactive artificiale prezintă o utilitate esenţială în ştiinţă şi în tehnica modernă.

Cele mai importante dintre elementele radioactive care rezultă la funcţionarea reactorului cu uraniu, sînt iodul şi bariul. Atomii radioactivi de iod şi bariu, precum şi ceilalţi atomi obţinuţi prin bombardarea nucleelor oricărui element chimic cu particule elementare, se numesc *atomi marcaţi*. Ei servesc drept indicatori în studiul diferitelor procese biologice, tehnice, etc. Atomii marcaţi se deosebesc de cei neradioactivi prin faptul că mai devreme sau mai tîrziu ei suferă o transformare radioactivă însoţită de emisia unui anumit fel de raze care pot fi detectate. Unele produse radioactive artificiale au preţioase aplicaţii în medicina curativă, altele în industria metalurgică, la prospecţiunile geologice şi hidrologice, etc. unde stau la baza unor noi metode de lucru. Pentru ilustrarea acestor cuceriri ale ştiinţei, vom prezenta cîteva exemple.

Biologii şi medicii folosesc pe scară largă, atomii marcaţi pentru a studia în ce fel pătrund şi se repartizează în organism, diferitele substanţe. Prin această metodă a atomilor marcaţi, numită şi *metoda trasorilor*, se poate urmări de asemenea drumul medicamentelor în organism. În felul acesta au fost explicate multe fenomene din viaţa organismului, descoperite tratamente rapide pentru diferite boli.

Astfel, pentru a studia metabolismul iodului în glanda tiroidă, pacientul absoarbe o mică cantitate de iodură de sodiu cu urme de iod radioactiv. Cu ajutorul unui aparat — contorul Geiger-Müller — aplicat la gîtul pacientului se poate determina viteza de asimilare a iodului de către glandă. Cînd este bolnavă glanda tiroidă, ea absoarbe prea puţin iod (cretinism) sau prea mult (boala lui Basedow).

Calciul radioactiv introdus în organism sub froma fosfatului de calciu indică absorbţia calciului în dinţi.

Sodiul şi potasiul radioactiv sînt întrebuinţaţi la studiul funcţionării glandelor suprarenale. Cu ajutorul carbonului radioactiv a putut fi explicată asimilaţia clorofiliană; s-a constatat că CO_2 poate fi absorbit de plantele verzi, şi la întuneric; oxigenul este eliberat însă, numai la lumina zilei.

Academicianul sovietic A. L. Kursanov şi profesorul A. M. Kuzin au constatat că rădăcinile plantelor puse în apă care conţine bioxid de carbon cu atomi marcaţi sau într-o atmosferă cu bioxid de carbon radioactiv, absorb CO_2; ei au urmărit circulaţia atomilor de carbon marcaţi de la rădăcină prin tulpină spre frunze (fig. 5). Această descoperire oferă posibilitatea de a influenţa creşterea plantelor prin îngrăşăminte speciale care conţin sau produc prin descompunerea lor, bioxid de carbon necesar absorbţiei prin rădăcină.

Elementele radioactive sînt folosite şi la studiul tratamentului hipertensiunii, adică a presiunii mărite a sîngelui.

Cu ajutorul atomilor radioactivi se poate constata locul unde se află o tumoare, introducîndu-se în organism o substanţă care conţine atomi radioactivi şi care este absorbită de tumoare. Radiaţia radiului sau radonului se foloseşte cu sucees în tratarea cancerului.

Atomii marcaţi sînt folosiţi pe scară mare în industrie. Cu ajutorul lor se poate determina precis, gradul de uzură al diferitelor piese ale unei maşini, chiar în timpul funcţionării acesteia. Inginerii metalurgişti au putut calcula

timpul parcurs de gaze în furnal. La gazele care intră în furnal se adaugă urme de elemente radioactive. În partea superioară a furnalului se notează momentul apariţiei atomilor radioactivi şi astfel se determină cu mare precizie timpul necesar gazelor pentru a trece prin furnal. Cu acest calcul s-a putut îmbunătăţi procesul de producţie.

De curînd la Institutul Unional de aluminiu şi magneziu (U.R.S.S.) a fost elaborată metoda folosirii izotopilor radioactivi a anumitor elemente chimice pentru obţinerea lingourilor de aluminiu. Experienţele din producţie au arătat că aceşti izotopi îmbunătăţesc de două ori calitatea produselor de aluminiu în ce priveşte soliditatea şi reduc de cinci ori porozitatea lor.

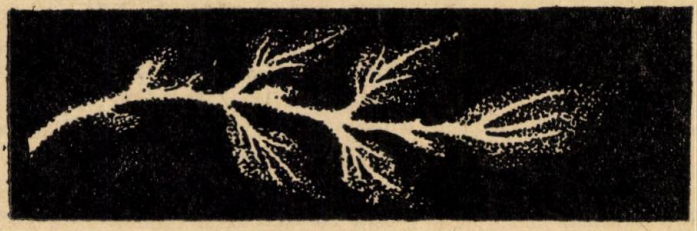


Fig. 5

Izotopii radioactivi ai elementelor chimice au o influenţă pozitivă asupra cristalizării unui mare număr de metale, îmbunătăţind considerabil calitatea lor. Este interesant de subliniat faptul că faţă de cantitatea totală de metal înnobilat consumul de izotopi este doar de ordinul miimilor.

Exemplele enumerate nu epuizează nici pe departe posibilităţile pe care le pune la îndemîna omului energia atomică în lupta cu forţele naturii, pentru o viaţă mai bună.

Ştiinţa a parcurs un drum lung de la descoperirea radioactivităţii pînă la elaborarea metodelor practice de obţinere a energiei atomice şi a izotopilor radioactivi artificiali. O eră de realizări încă nebănuite este deschisă omeniri. Toate cuceririle mari ale ştiinţei nu pot fi aplicate însă, în condiţii optime decît în societatea organizată pe baze socialiste.

Perspectivele măreţe pe care le deschide descoperirea şi utilizarea energiei atomice sînt însă, întunecate de goana febrilă a înarmării atomice dusă de cercurile conducătorilor din S.U.A.

Popoarele lumii cer cu tărie interzicerea necondiţionată a armelor atomice şi folosirea energiei atomice pentru scopuri paşnice, pentru dezvoltarea mai departe a ştiinţei, a forţelor de producţie, în scopul ridicării continue a nivelului de trai material şi cultural.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

7. **Un număr cu proprietăţi deosebite este N = 12345679.** Dacă înmulţim acest număr pe rînd cu numerele 9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; obţinem: 111 111 111; 222 222 222; 333 333 333; ...; 999 999 999.

Într-adevăr, avem: $10N-N=123456790-12345679$ sau $9N=111\ 111\ 111$ şi prin urmare $N \cdot 9n = nnn\ nnn\ nnn$ unde n poate fi oricare din numerele 1; 2; 3; ...; 9.

8. O identitate algebrică care foloseşte la descompunerea unor numere în factori. Se poate demonstra din aproape în aproape identitatea

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{2^n}) = 1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{2^{n+1}-1}$$

care ne dă o descompunere în factori, în baza a, a numărului 111...111 scris cu 2^{n+1} cifre 1. Dînd lui n valorile 1; 2; 3;..., iar lui a valoarea 10, avem următoarele descompuneri în factori:

$$1111 = 11 \cdot 101: \quad 11111111 = 11 \cdot 101 \cdot 10001, \text{ etc.}$$

9. Paradox geometric. Printr-un punct M exterior unei drepte se pot duce două perpendiculare la acea dreaptă. Unim M cu două puncte A şi B (fig. 1) oarecari pe dreapta (D) şi ducem cercurile care au ca diametre segmentele AM şi BM. Aceste cercuri taie dreapta D din nou, în punctele C şi C'. Unghiurile MCA şi $MC'B$ fiind înscrise în semicercurile respective, sînt drepte, de unde rezultă că MC şi MC' sînt perpendiculare pe dreapta D.

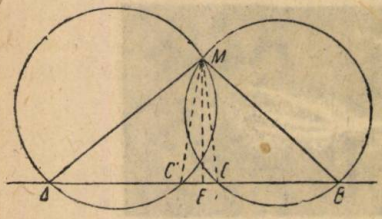


Fig. 1

Cititorul este desigur contrariat de afirmaţia noastră, pe care de altfel, am demonstrat-o. El ştie că nu se poate duce decît o singură perpendiculară dintr-un punct exterior unei drepte. Afirmaţia de mai sus este greşită. Demonstraţia justă se bazează pe o construcţie falsă. Cercurile care au ca diametre segmentele AM şi BM nu retaie dreapta D în două puncte diferite C şi C', ci în unul singur E care este piciorul perpendicularei lăsată din punctul M pe dreapta D.

10. Tabla înmulţirii poate fi folosită şi la calcularea sumei cuburilor primelor n numere. Tabloul de numere

$1\cdot1$	$1\cdot2$	$1\cdot3$	.....	$1\cdot n$
$2\cdot1$	$2\cdot2$	$2\cdot3$	.....	$2\cdot n$
$3\cdot1$	$3\cdot2$	$3\cdot3$	.....	$3\cdot n$
.				
.				
.				
$n\cdot1$	$n\cdot2$	$n\cdot3$	..... $n(n-1)$	$n\cdot n$

care ne dă produsul a două numere oarecari este cunoscut sub numele de *tabla lui Pitagora*. Adunînd numerele din tablou în două feluri diferite obţinem evident acelaşi rezultat. Pe acest principiu foarte simplu se bazează calculul sumei cuburilor primelor n numere.

Să adunăm numerele din tablou ordonînd pe acestea în coturi.

Suma numerelor de pe cotul al n-lea este

$$n\cdot1+n\cdot2+\ldots+n(n-1)+1\cdot n+2\cdot n\ldots+n\cdot n =$$
$$n(1+2+3+\ldots+n-1)+n(1+2+3\ldots+n) =$$
$$= n\frac{n(n-1)}{2}+n\frac{n(n+1)}{2} = n^3$$

astfel că suma numerelor din tablou este

$$1^3+2^3+\ldots+n^3$$

Să totalizăm numerele din tabla lui Pitagora şi în alt mod. Calculăm suma numerelor de pe fiecare linie şi adunăm apoi rezultatele parţiale; obţinem totalul:

$$1(1+2+3+\ldots+n)+2(1+2+3+\ldots+n)+\ldots$$

$$+n(1+2+3\ldots+n)=(1+2+3+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Rezultă deci că

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

11. Triunghiuri dreptunghice care au ca laturi, numere întregi. Este cunoscut exemplul clasic al triunghiului dreptunghic cu laturile 3; 4; 5; şi al triunghiurilor ale căror laturi sînt numere întregi şi sînt asemenea cu acesta. Ne punem întrebarea dacă există şi alte triunghiuri dreptunghice care sînt asemenea cu triunghiul (3; 4; 5) dar care au ca laturi tot numere întregi.

Dacă x şi y şi z sînt catetele şi ipotenuza, trebuie să avem:

$$x^2+y^2=z^2 \text{ sau } \frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=1$$

Notînd $\frac{x}{z}=u$ şi $\frac{y}{z}=v$, avem $u^2+v^2=1$. De unde deducem $\frac{1+u}{v}=\frac{v}{1-u}$.

Avînd în vedere că x, y, z, trebuie să fie numere întregi, rezultă că u şi v sînt numere raţionale. Tot numere raţionale vor fi $\frac{1+u}{v}$ şi $\frac{v}{1-u}$ astfel că putem pune $\frac{1+u}{v}=\frac{m}{n}$ şi prin urmare $\frac{1-u}{v}=\frac{n}{m}$ unde m şi n sînt două numere întregi oarecare.

Din egalităţile de mai sus scoatem $u=\frac{x}{z}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ şi $v=\frac{y}{z}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$

de unde rezultă $\frac{x}{m^2-n^2}=\frac{y}{2mn}=\frac{z}{m^2+n^2}=k$. Astfel că avem $x=k(m^2-n^2)$; $y=2kmn$; $z=k(m^2+n^2)$. Laturile căutate sînt: m^2-n^2; $2mn$ şi m^2+n^2; iar cele ale triunghiurilor asemenea cu acesta sînt $k(m^2-n^2)$; $2kmn$ şi $k(m^2+n^2)$.

Pentru $m=2$ şi $n=1$ obţinem triunghiurile (3; 4; 5), (6; 8; 10), etc. Pentru $m=4$ şi $n=1$, triunghiurile (15; 8; 17), (30; 16; 34), etc.

12. Un echer confecţionat dintr-o sfoară. Să măsurăm pe o sfoară, în continuare, trei segmente AB, BC, CD proporţionale cu numerele 3; 4; şi 5, ca în figura alăturată (fig. 2). Capetele celor trei segmente vor fi marcate prin noduri. Cu această sfoară, se pot trage perpendiculare pe orice dreaptă. Să ducem de exemplu, o perpendiculară în M pe direcţia xy de pe un teren. Fixăm cu ţăruşe nodurile A şi B aşezate pe xy (fig. 1), astfel ca B să cadă în M. Prindem apoi în A nodul din D. Cu un alt ţăruş introdus în nodul C, întindem sfoara pînă ce ia forma unui triunghi rectiliniu. Poziţia BC este perpendiculară în M pe direcţia xy. Explicaţia e simplă. Triunghiul BCA avînd laturile proporţionale cu numerele 3; 4 şi 5 este dreptunghic în B.

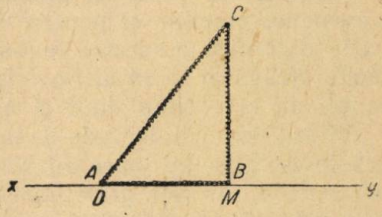


Fig. 2

DISPOZITIV PENTRU DEMONSTRAREA TEORIEI CINETICE A GAZELOR *)

Materialul necesar: o placă de sticlă, alice (diametru 2...6 mm), maşină electrostatică, sursă de lumină pentru proiecţie.

Mişcarea alicelor se bazează pe interacţiunile dintre corpurile electrizate, pe eleasticitatea şi inerţia alicelor.

Placa de sticlă trebuie să fie uscată şi perfect orizontală. Pe această placă se aşează electrozii metalici de forme diferite (fig. 1). Electrodul exterior format din tablă, serveşte în acelaşi timp pentru a limita mişcarea alicelor; este necesar ca acesta să fie destul de înalt. La mijlocul plăcii se aşează cel de-al doilea electrod, care poate fi de exemplu, o greutate de 50 g. Electrozii sînt conectaţi prin conductori la polii maşinii electrostatice. Printre electrozi aşezăm alicele. Cînd punem în funcţiune maşina electrostatică electrozii crează un cîmp electrostatic datorită căruia alicele se încarcă electric. Mişcarea alicelor este rezultatul acţiunilor electrice şi elastice.

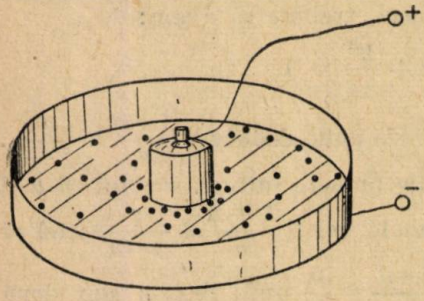


Fig. 1

Pentru pornirea mişcării este necesar ca alicele să fie în contact cu peretele de metal. Alicele încărcîndu-se sar de lîngă electrod şi se mişcă pînă cînd întîlnesc celălalt electrod sau alte alice cărora le comunică mişcarea. Potenţialul destul de mare al electrozilor asigură mişcarea alicelor, care este asemănătoare mişcării molecular-cinetice, a gazelor. Experienţa este interesantă prin simplitatea ei şi prin aceea că pe lîngă cauzele pur mecanice (elasticitate) ale mişcării intervin şi acţiuni electrice. Pentru o mai bună vizionare a demonstraţiei ne folosim de proiecţie aşezînd o sursă de lumină dedesubtul plăcii.

Dispozitivul poate fi folosit de asemenea, pentru explicarea mişcării browniene, precum şi pentru demonstrarea difuziei, realizînd astfel, o ilustraţie dinamică a acestor fenomene. Această ilustraţie prezintă într-un mod foarte atrăgător şi intuitiv, mişcarea haotică a moleculelor. Montarea experienţei nu cere timp mult şi ne scuteşte de o descriere verbală prelunigită.

Viteza mişcării depinde de masa alicelor şi de potenţialul electrozilor. Dacă se folosesc alice cu mase diferite putem să observăm că cele uşoare se mişcă mai repede, iar cele grele, mai încet. Potenţialul electrozilor poate fi înţeles ca o măsură a temperaturii; de aceea, cu mărirea potenţialului se măreşte şi viteza alicelor.

Pentru a demonstra mişcarea haotică a moleculelor aşezăm printre electrozi 10—15 alice de mase diferite.

Pentru demonstrarea difuziei se aşează pe lîngă perete, în locuri diferite alice de mărimi diferite. După începerea mişăcrii alicele se amestecă.

*) (din «Fizika v Şcole»).

Pentru demonstrarea mişcării browniene se aşează printre alicele în mişcare, bucăţi mici de lemn sau gumă. Din cauza loviturilor, acestea îşi schimbă locul pe placa de sticlă.

Pentru demonstrarea presiunii gazelor trebuie să mărim dimensiunile dispozitivului şi să grupăm alicele într-un loc. Mărind numărul alicelor care se mişcă, viteza lor (prin mărirea potenţialului), şi dimensiunile lor, creşte şi presiunea exercitată de ele asupra peretelui.

Dacă luăm alice mai uşoare, de exemplu din măduvă de soc, atunci putem demonstra legea de atracţie şi respingere electrică, prin mişcarea acestora între polii electrici.

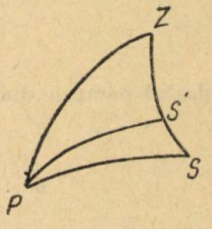
PROBLEME REZOLVATE

Problema 1197

Două stele S si S' de declinaţie cunoscută D si D' sînt văzute la un moment dat dintr-un acelaş plan vertical la distanţele zenitale Z si Z'. Să se calculeze latitudinea locului de observaţie.

* * *

Soluţie. Presupunem cunoscută teorema că: În orice triunghi sferic cosinusul unei laturi este egal cu produsul cosinusurilor celorlalte două adunat cu produsul sinusurilor acestora prin cosinusul unghiului cuprins între ele (a se vedea de ex., R.M.F. anul III, pag. 134).



Aplicînd această teoremă în fiecare din triunghiurile sferice ZPS', ZPS, avem,

$$\left.\begin{aligned}\cos PS' &= \cos PZ \cos ZS' + \sin PZ \sin ZS' \cos PZS' \\ \cos PS &= \cos PZ \cos ZS + \sin PZ \sin ZS \cos PZS\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dar avem evident:

$$PS' = \frac{\pi}{2} - D' \; ; \quad PS = \frac{\pi}{2} - D \; ; \quad PZ = \frac{\pi}{2} - \varphi \; ; \; ZS' = Z' \; ; \; ZS = Z$$

unde am notat cu D şi D' declinaţiile stelelor S şi S', cu Z şi Z' distanţele lor zenitale, iar cu φ latitudinea locului de observaţie P.

Cu aceste notaţii relaţiile (1) devin:

$$\left.\begin{aligned}\sin D' &= \sin \varphi \cos Z' + \cos \varphi \sin Z' \cos PZS \\ \sin D &= \sin \varphi \cos Z + \cos \varphi \sin Z \cos PZC\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

între care eliminînd cos PZS obţinem succesiv:

$$\frac{\sin D - \sin \varphi \cos Z}{\cos \varphi \sin Z} = \frac{\sin D' - \sin \varphi \cos Z'}{\cos \varphi \sin Z'} \; ;$$

$$\frac{\sin D}{\sin Z} - \frac{\sin D'}{\sin Z'} = \sin \varphi \left(\frac{\cos Z}{\sin Z} - \frac{\cos Z'}{\sin Z'}\right)$$

de unde

$$\sin \varphi = \frac{\sin D \sin Z' - \sin D' \sin Z}{\sin (Z' - Z)} \quad (3)$$

deci, latitudinea φ a locului de observaţie se poate calcula.

Problema 1225

Să se arate că dacă S este aria totală a unui tetraedru și d_1, d_2, d_3, d_4 diametrii cercurilor înscrise fețelor lui, avem relația

$$d_1 d_2 d_3 d_4 \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

Simon St. Petre

Soluție. Fie r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor înscrise fețelor tetraedrului p_1, p_2, p_3, p_4 semiperimetrele fețelor și S_1, S_2, S_3, S_4 ariile acestor fețe. Avem:

$$r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 + r_4 p_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S.$$

Produsul $r_1 p_1 \cdot r_2 p_2 \cdot r_3 p_3 \cdot r_4 p_4$ este maxim cînd $r_1 p_1 = r_2 p_2 = r_3 p_3 = r_4 p_4$, adică $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ ceeace există cînd tetraedrul este regulat. Deci produsul

$$r_1 p_1 r_2 p_2 r_3 p_3 r_4 p_4 \leqslant S_1 S_2 S_3 S_4 = \left(\frac{S}{4}\right)^4$$

Această relație se mai poate scrie și

$$r_1 r_2 r_3 r_4 \leqslant \frac{S^4}{4^4 p_1 p_2 p_3 p_4}.$$

În cazul tetraedrului regulat $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{3a}{2}$ unde a este muchia tetraedrului și $S = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$; $S^2 = 3a^4$. Rezultă:

$$r_1 r_2 r_3 r_4 \leqslant \frac{S}{16.27} \text{ sau}$$

$$(2r_1)(2r_2)(2r_3)(2r_4) \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

Folosind notațiile din enunț, avem:

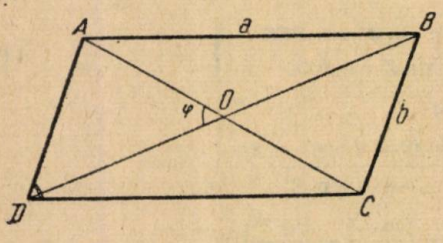
$$d_1 d_2 d_3 d_4 \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

Problema 1233

Notăm cu a și b laturile, iar cu d_1 și d_2 diagonalele unui paralelogram, φ unghiul format de diagonale, iar θ unghiul format de laturi. Să se stabilească relația:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\right|.$$

C. Ionescu-Țiu



Soluție. Fie $ABCD$ paralelogramul ale cărui laturi $AB = a$, $BC = b$, și diagonalele $BD = d_1$ și $AC = d_2$.

Notăm cu S suprafața lui $ABCD$. Relația cerută se mai poate scrie:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin\theta - \cos\varphi}{\sin\varphi\cos\theta}\right|.$$

Din relațiile: $ab\sin\theta = S'$; $\frac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi = S$, obținem $\sin\varphi = \frac{2S}{d_1 d_2}$ și $\sin\theta = \frac{2S}{ab}$. Din teorema cosinusului aplicată în triunghiurile AOD și ADC avem respectiv:

$$\cos\varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 4b^2}{2d_1 d_2} \text{ și } \cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - d_2^2}{2ab}.$$

Făcînd toate simplificările obținem:

$$\left|\frac{a^2-b^2}{d_1^2-d_2^2}\right| = \frac{1}{4}\left|\frac{d_1^2+d_2^2-4b^2}{a^2+b^2-d_2^2}\right|.$$

Teorema medianei aplicată în triunghiul ADC ne dă:

$$\frac{d_1^2}{4} = \frac{2(a^2+b^2)-d^2}{4},$$

de unde $2(a^2+b^2) = d_1^2 + d_2^2$.

Prin urmare:

$$\left|\frac{a^2-b^2}{d_1^2-d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{d_1^2+d_2^2-4b^2}{2a^2+2b^2-2d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2a^2-2b^2}{d_1^2-d_2^2}\right|.$$

Deci,

$$\left|\frac{a^2-b^2}{d_1^2-d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\right|.$$

Problema 1164

Care este viteza medie patratică a hidrogenului aflat la temperatura de 127°C? Care este masa moleculară a unui gaz aflat la aceiași temperatură, dar care are viteza medie patratică de 4,7 ori mai mică?

N. Stănescu

Soluție. După «Curs de Fizică generală» de E. Friș și Timoreva avem:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{m}} \quad T = 273° + 127° = 400°\text{K}$$

unde v este viteza medie patratică, R = constanta gazelor, T = temperatura absolută (°K, m = masa moleculară.

Deci,

$$v = \sqrt{\frac{3.8{,}31\cdot 10^7\cdot 400}{2}} = 20\cdot 10^3\sqrt{15\cdot 8{,}31} \cong 22{,}4\cdot 10^4 \text{cm/s}$$

Deci, $v = 2{,}24$ km/s

Notăm cu v_1 m_1 respectiv viteza medie patratică și masa moleculară a gazului cerut:

$$\text{Știm că: } \frac{v}{v_1} = 4{,}7 = \sqrt{\frac{m_1}{m}}$$

De unde: $m_1 = 4{,}7^2\cdot m = 22{,}09\cdot 2 = 44{,}18$ g/mol

Deci, masa unui mol gram din acest gaz este $m_1 = 44{,}18$

Problema 1273

Pe laturile AB si AC ale unui triunghi dat, se iau de la B si C către vîrful A, segmentele egale BD și CE; (AB < AC).

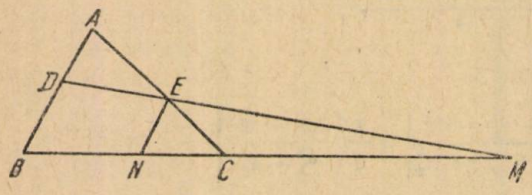
a) *Să se arate că dacă M este punctul de intersecție al dreptelor BC și DE avem relația AB.MD = AC.ME.*

b) *Să se examineze cazul particular cînd punctul D coincide cu punctul A.*

c) *Să se determine lungimea segmentului BD în funcție de laturile triunghiului astfel ca MC = CB.*

(Olimpiada Matematică, 1954)

Soluție. a) Din E ducem o paralelă la AB care intersectează pe BC în N. Se formează triunghiurile asemenea MEN și MBD; de asemenea, triunghiurile asemenea CEN și ABC care ne dau respectiv $\frac{EM}{MD} = \frac{NE}{BD}$ și $\frac{EC}{AC} = \frac{NE}{AB}$. Prin împărțire obținem $\frac{ME \cdot AC}{MD \cdot EC} = \frac{AB}{AD}$ ținînd seama că $BD = EC$ relația devine $\frac{AC \cdot ME}{MD} = AB$ sau $AB \cdot MD = AC \cdot ME$.



b) Cînd D coincide cu A atunci M coincide cu C iar E se află pe AC astfel ca $EA = AC - AB$. În acest caz $MD = AC$ și $ME = AB$ așa că relația de la punctul *a)* devine $AB \cdot AC = AB \cdot AC$.

c) Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului $ABCD$ tăiat de transversala MED obținem: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$ (1). Deoarece $CE = BD$ și $MB = 2MC$ relația (1) devine $\frac{2AD}{AE} = 1$ dar $AD = AB - BD$ și $AE = AC - EC = AC - BD$. Prin urmare, $2(AB - BD) = AC - BD$ sau $2AB - 2BD = AC - BD$, deci, $BD = 2AB - AC$

Problema 1274

Două mașini auto pornesc în același timp din același loc în aceiași direcție. Prima merge cu 50 km/oră, iar a doua cu 40 km/oră. După 30 minute pornește în același loc în aceiași direcție, o a treia mașină și ajunge una din aceste mașini cu 1 1/2 ore mai tîrziu decît pe cealaltă Ce viteză are mașina a treia?

(Olimpiada Matematică, 1954

Soluție. Mașina a treia ajunge pe cea cu viteza de 40 km/oră în B iar pe cea cu 50 km/oră în C.

Notăm t timpul necesar ca mașina cu 50 km/oră să străbată distanța AC.

$$AC = 50\,t = x\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad AB = 40\left(t - \frac{1}{2}\right) = x\,(t - 2)$$

Avem de rezolvat sistemul

$$50\,t = x\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

$$40\left(t - \frac{3}{2}\right) = x\,(t - 2) \tag{2}$$

unde x este viteza celei de-a treia mașini. De unde $5t - 10t^2 = (4t - 6)\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Deci

$$5t^2 - 10t = (2t - 3)(2t - 1) \text{ sau}$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \text{ cu rădăcinile } 3 \text{ și } -1.$$

Înlocuim în a doua ecuație a sistemului $t = 3$ și obținem

$$x = 60 \text{ km/oră}$$

PROBLEME PROPUSE

1583. Să se demonstreze că:

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

se împarte exact cu 26460.

* * *

1584. Două piese tronconice au generatoarele înclinate cu unghiul α față de axa de simetrie. Una este introdusă în cealaltă astfel că între funduri rămîne o distanță a mm. Cu ce grosime trebuie să se scoată un strat din piesa care intră pentru ca distanța a să se micșoreze cu h mm?

Ștefan Olteanu strungar, București

1585. Dacă ecuația $x^2 + px + q = 0$ are rădăcinile reale, să se arate că ecuațiile:

$$x^2 - (p^2 - 2q + 2)\,x + p^2 + q^2 - 2q + 1 = 0$$

are rădăcinile reale și pozitive.

Simon St. Petre

1586. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$y_1 = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}$$

$$y_2 = \sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 - \cos x}$$

C. Ionescu-Țiu

1587. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$$

cînd numărul termenilor este infinit.

N. C. Ciomu

1588. O greutate de 100 kgf este ridicată la o înălțime de 10 m în timp de 5 secunde. Să se calculeze:

a) lucrul mecanic necesar;

b) Puterea necesară a motorului de antrenare considerînd randamentul total de 0,5

c) energia cinetică în cădere liberă.

* * *

1589. Două sarcini punctiforme de + 10 și — 20 unități CGS se află la distanța de 58 cm una de alta în vid. Să se calculeze forța de interacțiune.

* * *

1590. Un obiect se află la o depărtare de 4 cm de vîrful unei oglinzi sferice, distanța focală fiind de 12 cm. să se afle distanța imaginei. Să se construiască imaginea formată.

* * *

1591. Un vagon de 10 tone se mișcă uniform cu viteza de 36 km/h. Care este energia cinetică și ce forță de frînare necesară pentru a se opri pe o distanță de 20 m.

* * *

1592. *a)* Să se calculeze grafic și analitic rezultanta a două forțe paralele de același sens $F_1 = 20$ kgf și $F_2 = 80$ kgf situate la o distanță de 100 cm.

b) Să se calculeze componentele unei forțe de 100 kgf după două direcții paralele situate de o parte și de alta a forței, la o distanță de 20 cm și 30 cm.

* * *

1593. Se dă un triunghi ABC. Cevienele AM și AN împart unghiul A în trei părți egale. Fie R și R' razele cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor ABC și AMN și fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar I mijlocul segmentului MN. Să se stabilească relațiile:

$$\frac{R'}{R} = \frac{BM \cdot CN}{MN^2}$$

$$(1 + MN)(AC \cdot BM + AB^2 \cdot CN) = 2BC(R^2 + AI^2 - OI^2)$$

Nicolae Tița student, București

1594. Intr-un triunghi oarecare ABC se notează cu l_a și l'_a respectiv bisectoarea interioară și exterioară unghiului A. Să se arate că:

$$l_a = l'_a \operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$$

M. D. Zigulescu, elev, R. Vîlcea

1595. Pe latura BC a unui triunghi ABC sau pe prelungirile ei, se iau două puncte oarecare I, D. Din I se duc paralelele la laturile AB, AC pînă întîlnesc în E, F respectiv laturile AC, AB. O paralelă la dreapta EF întîlnește în N, P respectiv dreptele DF, DE. Se coboară perpendicularele NN' pe AC, PP' pe AB și înălțimile BB', CC'. Să se arate că:

$$\frac{NN'}{BB'} \pm \frac{PP'}{CC'} = 1 \quad \text{și} \quad S_{NAC} \pm S_{PAB} = S_{ABC}$$

Dan C. Panu

1596. Se dă un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ și se notează: $A_4A_1A_2 = \alpha$; $A_2A_1A_3 = \beta$: $A_3A_1A_4 = \gamma$, și fețele opuse vîrfuriloe A_2, A_3, A_4 respectiv cu S_2; S_3; S_4; Dacă $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ să se stabilească relația:

$$\cos(S_2, S_3) + \cos(S_2, S_4) + \cos(S_3, S_4) = 1$$

prin (S_2, S_3) înțelegîndu-se unghiul diedru format de fețele S_2 și S_3.

Mircea Bocu, Oradea

1597. Un băiat învîrtește în plan vertical, o piatră cu masa de 1 kg atîrnată de un fir care poate să suporte o tensiune egală cu 14 kgf. Axul de rotație se află la o distanță $h = 4$ m de la pămînt; raza cercului descrisă de o piatră este $l = 1$ m. Cu ce viteză unghiulară trebuie să învîrtească băiatul piatra pentru ca firul să se rupă? La ce distanță s de la băiat va cădea piatra?

* * *

1598. Un corp cu masa egală cu m alunecă fără frecare din V punctul superior a unei sfere cu raza R. La ce înălțime se va desprinde corpul de suprafața sferei?

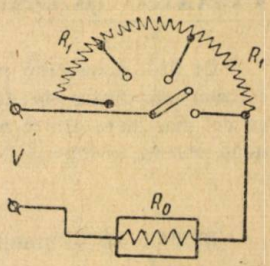
* * *

1599. La temperatura t_0 pendulul unui ceas are lungimea l_0 și ceasul merge exact. Coeficientul de dilatare al materialului din care este făcut pendulul este $\alpha = 1{,}85 \cdot 10^{-5}$.

Cu cît va înainta sau va rămîne în urmă ceasul în 24 ore dacă temperatura din încăpere va fi cu 10° mai mare decît t_0? La deducerea formulei se va ține seama de micimea valorilor coeficientului de dilatare lineară a materialului din care este confecționat pendulul.

* * *

1600. Cum trebuie să fie resistențele unui reostat R_1 R_2, și R_3 din figură, pentru ca intensitatea curentului care trece printr-un aparat cu rezistența $R_0 = 30$ ohmi la deplasarea comutatorului reostatului de pe un contact pe altul să se schimbe cu 1 A. Schema este alimentată dela o sursă cu tensiunea de 120 V.



* * *

1601. Intr-un patrulater inscriptibil $ABCD$ se cunosc laturile $AB = a$. $BC = b, CD = c, DA = d$. Să se exprime lungimile diagonalelor AC și BD și raza cercului circumscris.

1602. Să se verifice egalitatea:

* * *

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$$

Gheorghe Stoian elev, Tîrgoviște

1603. Prin vîrful B al pătratului $ABCD$ ducem o dreaptă interioară care face un unghi de 30° cu latura BC. Ea taie diagonala AC în E. Fie F simetricul lui E față de vîrful C. Să se arate că triunghiul BFD este echilateral.

N. N. Mihăileanu

1604. Să se determene m astfel ca funcția $y = mx^2 + (m-1)x + \frac{1}{m}$ să admitem un minim egal cu m^2.

Gh. I. Bercea, student, Timișoara

1605. Laturile unui unghi drept cu vîrful în punctul fix A, întîlnesc o dreaptă fixă dată în punctele B și C. Insemnînd cu AH înălțimea triunghiului ABC, cu HM mediana triunghiului AHB și cu HL bisectoarea triunghiului AHC, Să se arate că aria triunghiului HLM rămîne constantă cînd unghiul drept se rotește în jurul punctului A.

Gh. Bazacov

1606. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}+\frac{x-x}{x+c}=3$$

și să se arate că oricare ar fi a, b, c numere reale și rădăcinile sînt tot reale.

Ion Cristea elev, Constanța

1607. Să se demonstreze că dacă $a \leqslant b$ și $c \geqslant d$. avem:

$$(\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(c-d)^2})^2=(a-b-c+d)^2$$

și

$$(\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(c-d)^2})^2=(a-b+c-d)^2.$$

Să se verifice apoi cu valori numerice.

C. Ionescu-Țiu

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E: 610. Împărţind produsul a două numere întregi prin suma lor, restul este egal cu cel mai mic dintre ele; împărţind acelaşi produs prin diferenţa numerelor, restul este egal cu cel mai mare dintre numere. Notînd cu a şi b cîturile respective, să se determine cele două numere în funcţie de a şi b. Caz particular: $a = 2$ şi $b = 3$.

N. C. Ciomu

E: 611. Să se stabilească identitatea:

$$(3\,ac + bd)^2\,(ac - bd)^2 + 2\,(3\,a^2b^2 + c^2d^2)^2 + (3\,ac - bd)^2\,(ac + bd)^2 =$$
$$= (3\,ab + cd)^2\,(ab - cd)^2 + 2\,(3\,a^2c^2 + b^2d^2)^2 + (3\,ab - cd)^2\,(ab + cd)^2.$$

Ilie N. Constantinescu

E: 612. La crosul desfăşurat în cinstea zilei de 7 Noiembrie pe o distanţă anumită, li s-a alocat primilor trei cîştigători un premiu în valoare de 707 lei. Ştiind că primul a sosit la start după 10 minute, al doilea după 11 minute şi al treilea după 14 minute, cît li se cuvine fiecăruia din această sumă? Sumele cîştigătoare sînt invers proporţionale cu timpul.

Ion N. Munteanu, Zăpodeni

E: 613. Eu am azi, vîrsta pe care o avea fratele meu cînd eu aveam vîrsta lui plus vîrsta pe care o avea sora mea cînd eu aveam vîrsta ei. Cînd fratele meu va avea vîrsta pe care o am eu azi, eu voi avea vîrsta pe care o va avea el cînd sora mea va avea vîrsta lui. Iar cînd ea a avut vîrsta pe care o avea fratele meu cînd eu aveam vîrsta sorei mele, ei împreună aveau vîrsta pe care aşi fi avut-o eu peste 4 ani. Care e vîrsta fiecăruia dintre noi.

I. I. Cristea, elev, Constanţa

E: 614. Într-un pachet sînt bomboane. Dacă împărţim copiilor cîte 7 bomboane la fiecare rămîn doi copii fără bomboane şi unul numai cu 4 bomboane; iar dacă dăm copiilor cîte 5 bomboane mai rămîn 41 bomboane. Cîte bomboane şi cîţi copii au fost?

* * *

E: 615. Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}} = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Verificare pentru $a = 0{,}6$.

E: 616. Să se simplifice expresiile

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z} \quad \text{şi} \quad \frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x^2+y^2+z^2-xy-zx-yz}.$$

C. I. Ţ.

*) Clasa V: (614, 620), VI: (611, 619, 621, 622), VII: (610, 611, 613, 615, 616, 617, 618, 623).

E: 617. Se dă un cerc cu lungimea de 8 metri. În acest cerc este înscris triunghiul ABC, astfel ca lungimea arcului $AB = 5$ metri şi lungimea arcului $BC = 2$ metri. Înălţimile triunghiului ABC se prelungesc pînă taie a doua oară cercul respectiv în punctele A_1, B_1, C_1. Să se calculeze în grade, minute şi secunde sexagesimale unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$.

* * *

E: 618. Să se arate că:

$$E = \frac{\sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{7+\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{13}+1}.$$

C. Păun, elev, Cluj

E: 619. Cîtă ghiaţă cu temperatura de — 30°C trebuie să punem în 5 l de apă cu temperatura de 80°C pentru a se răci pînă la temperatura finală de 18°C?

I. Stepan, elev, Constanţa

E: 620. La proba de germinaţie a seminţelor prevăzută de « Directivele Congresului al II-lea al Partidului », din 100 boabe de grîu, unui ţăran individual i-a răsărit numai 80 fire. Cît grîu va semăna el la hectar dacă gospodăria agricolă colectivă din localitate căreia i-a răsărit sută la sută grîul la proba de germinaţie, însămînţează cîte 180 kg grîu la hectar?

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 621. Desenaţi două drepte perpendiculare (D_1) şi (D_2), şi notaţi cu O punctul în care se întîlnesc. Pe dreapta (D_1) luaţi două puncte A şi B, astfel încît O să fie situat între ele. Fie A' şi B' punctele aşezate pe (D_2) care satisfac la relaţiile: $OA' = OA$ şi $OB' = OB$. Să se arate că:

1. Dacă A' şi B' sînt de aceiaşi parte a lui O, dreptele AA' şi BB' sînt perpendiculare.
2. Dacă A' şi B' sînt de o parte şi de alta a lui O, dreptele AA' şi BB' sînt paralele.

Mihail I. Popescu, student, Bucureşti

E: 622. Să se efectueze împărţirea

$$\frac{3x^5 - 2x^3 - 5x^2 - 7}{2x^3 - x^2 + 3x - 1}$$

apoi să se împartă cîtul la rest. Indicaţie: coeficienţii vor fi fracţionari.

* * *

E: 623. Pe toată întinderea unui islaz iarba creşte la fel de des şi la fel de repede. Dacă vacile pasc în aceiaşi măsură constantă iarba existentă cît şi cea care creşte, şi dacă 50 vaci ar mînca-o în 14 zile; iar 20 de vaci în 45 zile să se calculeze cîte vaci ar putea să pască timp de 10 săptămîni.

C.I.Ţ.

ÎNTRECEREA ÎNTRE CERCURILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN ŞCOLILE MEDII

Ca urmare la « Chemarea la întrecere, adresată tuturor cercurilor din ţară », de către cercurile de elevi din Oraşul Stalin, publicată în G.M.F.-B Nr. 12, decembrie 1954, indicăm mai jos punctajul la obiectivele acestei întreceri, care cuprinde toate cercurile de matematică şi fizică din fiecare şcoală medie.

Se acordă:

a. Cîte *un punct* de fiecare problemă trimisă de elevii şcolii şi anunţate în G. M. F.-B numerele 2, 3, 4, 5, 6 la rubrica rezolvitorilor;

b. Cîte *zece puncte* de fiecare evienţiere a elevilor şcolii apărută în numerele 2, 3, 4, 5, 6 din G. M. F.-B.

c. Cîte *un punct* de fiecare elev participant la epata II (locală) a Olimpiadei de matematică (respectiv de fizică) 1955.

d. Cîte *10 puncte* de fiecare elev participant la etapa III (regională) a Olimpiadei de matematică (respectiv de fizică) 1955.

e. Cîte *15 puncte* de fiecare elev participant la una din etapele pe ţară ale Olimpiadei 1955;

f. Cîte *20 puncte* de fiecare elev reuşit la etapa finală (pe ţară) de matematică sau de fizică.

g. Cîte *5 puncte* de fiecare şedinţă a unui cerc de matematică sau de fizică din şcoală, ţinute în intervalul 1 ianuarie 1955—1 iunie 1955.

h. Cîte *2 puncte* de fiecare elev abonat la G. M. F. -B din şcoala respectivă în intervalul de la 1 ianuarie 1955—1 iunie 1955.

Fişa cu punctajul va fi întocmită de colectivul de profesori de Matematică şi Fizică şi de responsabilii de cercuri din şcoli şi vizată de direcţia şcolii respective. Termentul de expediere a acestor fişe este 15 iunie 1955.

Pentru datele de la aliniatele *a* şi *b*, care se referă la numerele 5 şi 6 din G. M. F.-B punctele vor fi adăugate în fişa şcolii de către Societatea de Matematică şi Fizică.

Participă la această întrecere, şcolile care şi-au anunţat pînă acum adeziunea cît şi cele care o vor face pînă la 30 mai.

În fişa şcolii se va menţiona şi numărul de clase de învăţămînt mediu care funcţionează în şcoală, deoarece punctajul final al întrecerilor va fi obţinut prin împărţirea la acest număr de clase a totalului de puncte obţinute conform aliniatelor *a-h*.

Publicarea rezultatelor întrecerii pe ţară se va face odată cu începerea viitolului an şcolar.

Şcolile care obţin rezultate bune în această întrecere pe ţară, vor primi ca premii cărţi de matematică şi fizică pentru biblioteca şcolii respective.

Cititorii revistei sînt sfătuiţi să popularizeze întrecerea în şcolile lor şi să determine participarea activă a cercurilor respective la această acţiune.

IN CINSTEA ANIVERSĂRII A 60 DE ANI DELA APARIŢIA PRIMULUI NUMĂR AL «GAZETEI MATEMATICE»

PREMIILE «GAZETEI MATEMATICE ŞI FIZICE» SERIA B, PE ANUL 1954

Pentru activitatea deosebită desfăşurată de unii corespondenţi evidenţiaţi în anul 1954 şi *în cinstea aniversării a 60 de ani de la apariţia primului număr al «Gazetei Matematice (1895)»*, se acordă următoarele premii şi menţiuni în cărţi, trecute în dreptul fiecăruia printr-un număr de ordine, u.mătorilor tovarăşi:

Premiul I

1. **Cristea I. Ion,** clasa X-a, Constanţa (1, 2, 3, 4, 10, 15, 21, 25, 28, 33).
2. **Iosifescu V. Marius,** Piteşti, student Matematici, Bucureşti (1, 2, 3, 4, 15, 20, 25, 28, 33).
3. **Donescu St. Dragomir,** absolvent clasa XI-a, Focşani (2, 5, 8, 11, 18, 23, 28, 33).

4. **Torjescu St. Florin,** Ploieşti, student Institutul Politehnic, Bucureşti (2, 5, 7, 10, 17, 23, 28, 33).

5. **Pandrea Nicolae,** absolvent clasa XI-a, Focşani (2, 5, 11, 18, 21, 23, 28, 33).

6. **Andreescu Gh. Radu,** Bucureşti, student Institutul Politehnic, (2, 5, 7, 11, 21, 23, 28, 33).

7. **Bocu Mircea,** Oradea, student Electrotehnică, Bucureşti (1, 5, 10, 16, 17, 25, 28, 33).

8. **Buzuloiu Vasile,** Oradea, student Electrotehnică, Bucureşti (1, 2, 4, 11, 16, 23, 30, 33).

9. **Şerb Gabriel Adrian,** clasa X-a, Piteşti (1, 5, 15, 18, 21, 23, 30, 33).

10. **Zigulescu Marin,** student Construcţii, Bucureşti (5, 14, 15, 21, 23, 25, 30, 33).

11. **Lupuţiu Ioan,** clasa X-a, Ploieşti (1, 5, 15, 18, 21, 25, 30).

12. **Rus A. Ioan,** clasa X-a, Oradea (5, 9, 15, 18, 21, 25, 30).

13. **Bătineţu M. Dumitru,** absolvent clasa XI-a, Giurgiu (5, 9, 15, 21, 23, 25, 30).

14. **Dabija Sorin,** Galaţi, student Mecanică, Bucureşti (6, 8, 15, 18, 23, 25, 30).

15. **Cocoş Emanuel,** Constanţa, student Institutul Politehnic, Bucureşti (2, 8, 15, 18, 23, 25, 30).

Premiul II

1. **Iordache Ion Dan,** clasa X-a Constanţa (6, 14, 17, 21, 23, 29).

2. **Matei A. Nicolae,** absolvent clasa XI-a Tg. Mureş (6, 9, 11, 17, 21, 23, 27).

3. **Nicolae St. Alexandru,** Bucureşti, student Mecanică (6, 7, 17, 18, 23, 27).

4. **Baeră Bogdan,** absolvent clasa XI-a Focşani (6, 9, 15, 21, 23, 25).

5. **Petcu I. Dumitru,** absolvent clasa XI-a Giurgiu (6, 9, 17, 21, 23, 29).

6. **Stroe Radu,** clasa X-a Ploieşti (2, 6, 17, 21, 23, 29).

7. **Alexa Ioan,** absolvent Predeal, U.M. Sibiu (6, 8, 17, 21, 23, 29).

8. **Galaţky Gheorghe,** clasa X-a Tîrgovişte (6, 9, 17, 21, 23, 32).

9. **Mişcol Mircea,** clasa X-a Giurgiu (9, 11, 17, 21, 23, 32).

10. **Popescu Al. Dan,** Reşiţa, student Bucureşti (9, 17, 21, 23, 25, 32).

11. **Tănase Dumitru,** anul IV s.m.t. Măsurători terestre Bucureşti (9, 17, 21, 23, 25).

12. **Minuţ M. Petru,** absolvent clasa X-a P. Neamţ (6, 9, 17, 21, 23).

13. **Ionescu I. Ion,** Tîrgovişte, student Institutul Politehnic Bucureşti (7, 8, 17, 21, 25).

14. **Oprea A. Aureliu,** absolvent clasa X-a Tîrgovişte (12, 17, 23, 26, 27).

15. **Uţă Marin,** absolvent Predeal, U. M. Sibiu (12, 17, 23, 26, 27).

16. **Stepan Ionel,** anul III, şc. Hidrotehnică Constanţa (12, 17, 23, 26, 27).

17. **Bărbuică Nicolae,** anul IV şc. medie tehnică Craiova (2, 17, 23, 26, 27).

18. **Gervescu M. Ion,** clasa VII-a, com. Roznov P. Neamţ (12, 14, 17, 23, 26).

Premiul III

1. **Bunica M. Octavian,** absolvent clasa XI-a Tg. Mureş (12, 17, 23, 26, 27).
2. **Ionescu V. Savin,** Piteşti, student Bucureşti (3, 4, 23, 26, 27).
3. **Corban Adrian,** Tecuci, student Matematici Bucureşti (3, 4, 22, 23, 27).
4. **Berechet M. Oprea,** clasa X-a, şc.m.5, Bucureşti (12, 13, 23, 26, 27).
5. **Silion Dinu,** absolvent Ploieşti (12, 13, 17, 25, 26).
6. **Fotă M. Stan,** Giurgiu, student Construcţii Bucureşti (12, 13, 17, 25, 26).
7. **Weszely Tiberiu,** Tg. Mureş, student Matematici Bucureşti (3, 4, 14, 20, 25).
8. **Saraci M. Dumitru,** absolvent Piteşti (12, 13, 17, 25, 26).
9. **Guiaşu Silviu,** Oradea clasa X-a (12, 13, 17, 25, 26).
10. **Budai Teodor,** s.m. tehnică construcţii Suceava (12, 13, 17, 25, 26).
11. **Colibaba Tiberiu,** clasa X-a Galaţi (12, 14, 17, 25, 26).
12. **Brebente P. Corneliu,** clasa X-a Tîrgovişte (12, 14, 17. 25, 26).
13. **Brebu Gheorghe,** clasa IX-a Tîrgovişte (12, 14, 17, 25, 26).
14. **Dinu Gheorghe,** anul III, şc. electrotehnică Craiova (12, 14, 17, 25, 26).
15. **Nan Stelian,** Oraşul Stalin, student Politehnica Timişoara (12, 14, 17, 25, 26).
16. **Popescu Sergiu,** absolvent Slatina (12, 14, 17, 25, 26).
17. **Stoian Gheorghe,** clasa IX-a, Tîrgovişte (12, 17, 18, 25, 26).
18. **Vrăjitoru Dan,** clasa X-a, Aiud (12, 22, 25, 26, 34).
19. **Pupăzan V. Nicolae,** absolvent Predeal (12, 17, 22, 24, 26).
20. **Popovici I. Radu,** clasa X-a, şc.m.6, Bucureşti (12, 22, 24, 25, 26).
21. **Epuraş Mircea,** absolvent Predeal, U.M. Sibiu (12, 17, 22, 24, 26).

Menţiuni

1. **Petrică Zamfira,** Bucureşti, studentă (12, 12, 19, 24, 26).
2. **Petrovici Radu,** Focşani, student Bucureşti (12, 13, 19, 24, 26).
3. **Vidan Marius,** Giurgiu, student Bucureşti (12, 13, 19, 24, 26).
4. **Căluianu Nicolae,** anul IV s.m. mecanizarea agriculturii, Roman (12, 13, 19, 24, 26).
5. **Ianuci Corneliu,** absolvent Focşani (12, 13, 24, 26).
6. **Velicu Mitu,** absolvent Giurgiu (12, 13, 24, 26).
7. **Cristea Aurel,** clasa IX-a, Focşani (12, 13, 24, 26).
8. **Bostan Hötte,** absolvent Vaslui (12, 13, 24, 26).
9. **Lambă Stelian,** anul IV hidrotehnică, Constanţa (12, 13, 24, 26).
10. **Morozan Teodor,** absolvent Tecuci (12, 13, 24, 26).
11. **Pieleanu I. Dumitru,** clasa IX-a Giurgiu (12, 13, 24, 26).
12. **Savin Dan,** absolvent Cîmpulung Muscel (12, 13, 24, 26).
13. **Vasilescu Constantin,** Călăraşi, student Bucureşti (12, 13, 24, 26).
14. **Greculescu V. Ioan,** absolvent Predeal (12, 13, 24, 26).
15. **Gavriluţ Mihai,** clasa X-a Roman (12, 13, 24, 26).
16. **Elenberg Manfred,** clasa X-a, şc. m. 6, Bucureşti (12, 13, 24, 26).
17. **Voicu Traian,** anul IV, s. m. tehnică Craiova (12, 13, 24, 26).

18. **Cetăţeanu Cecilia,** Craiova, studentă (12, 13, 24, 26).
19. **Arsintescu Virgil,** clasa X-a Iaşi (13, 17, 25, 26).
20. **Arsenovici Tiberiu,** clasa IX-a Timişoara (13, 17, 25, 31).
21. **Bădan M. Alexandru,** clasa X-a, Corabia (13, 17, 25, 26).
22. **Neguţ Nicolae,** c. m. mecanică Bucureşti (13, 17, 25, 26).
23. **Mihăilă Ieronim,** absolvent Roman (13, 17, 25, 26).
24. **Tofan V. Ioan,** absolvent Bacău (13, 17, 25, 26).
25. **Vlădescu Gheorghe,** s. m. « Aurel Vlaicu » Bucureşti, student (13, 24, 25, 26).
26. **Vlaga Marius,** absolvent Arad (13, 24, 25, 26).
27. **Stanciu E. Mirel,** absolvent Giurgiu (13, 24, 25, 26).
28. **Buruiană Gheorghe,** absolvent Focşani (13, 24, 25, 26).
29. **Grabcev Boris,** absolvent Predeal (13, 24, 25, 26).
30. **Draica Constantin,** clasa VIII-a « A. Vlaicu » Bucureşti (13, 24, 25, 26).
31. **Cseke Petru,** clasa V-a, Cluj (13, 17, 24).
32. **Péterfy Attila,** clasa VIII-a Tg. Mureş (13, 24, 25, 26).
33. **Butenco Igor,** clasa X-a, Oraşul Stalin (13, 24, 25, 26).
34. **Bacalu Ion,** sbsolvent Roman (13, 24, 25, 26).
35. **Aldea Vasile,** absolvent Bucureşti (13, 24, 25, 26).
36. **Pupăză M. Nicolae,** absolvent clasa XI-a Tg. Mureş (13, 24, 26).

Lista cărţilor cu numărul lor de ordine, acordate premianţilor pentru rezolvări de probleme din „G.M.F." seria B, pe anul 1954

Nr. crt.	Autorul şi titlul lucrării
1	N. Luzin — Calcul integral
2	Gh. Vrănceanu — Geometria analitică şi proiectivă
3	N. Teodorescu — Metode vectoriale în fizică, vol. I
4	N. Teodorescu — Metode vectoriale în fizică, vol. II
5	N. Luzin — Calcul diferenţial
6	N. Mihăileanu — Geometria neeuclidiană
7	E. V. Spolski — Fizica atomică I
8	I. N. Veselovski — Mecanica şi rezistenţa materialelor
9	Gh. Mihoc — Elemente de calcul probabilităţilor
10	S. Friş şi Timoreva — Curs de fizică generală I
11	N. E. Cocin — Calcul vectorial şi tensorial
12	A. O. Ghelfand — Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi
13	F. I. Zighel — Cometele
14	O. Sacter — Conice şi alte curbe
15	I. Şklovski — Radioastronomia
16	N. Mansurov — Electrotehniea teoretică
17	Bolyai — Viaţa şi opera
18	M. Leontovici — Introducerea în termodinamică
19	Ion Ionescu — Maxime şi minime geometrice
20	V. G. Levici — Introducerea în Fizica statistică
21	I. Vinogradov — Bazele teoriei numerelor
22	Vasetchi — Concepţia filosofică a lui Lomonosov
23	P. S. Alexandrov — Introducere în teoria grupurilor
24	I. S. Sominski — Metoda inducţiei matematice
25	H. Ionescu — Calcule numerice
26	A. I. Marcuşevici — Arii şi logaritmi

(urmare)

Nr. crt.	Autorul şi titlul lucrării
27	A. Stan şi Grumăzescu — Probleme de mecanică şi rezistenţă
28	S. P. Finicov — Geometrie diferenţială
29	Acad. R.P.R. — Problemele modelării electrice
30	Strelcov — Introducere în teoria oscilaţiilor
31	Ianovscaia — Ideile progresiste ale lui Lomonosov
32	B. Gnedenco şi Hincin — Introducere în calculul probabilităţilor
33	V. I. Smirnov — Curs de matematici superioare, vol. II

Premianţii şi menţionaţii pe 1954 sînt rugaţi să comunice adresa lor exactă, sau să se prezinte la Sediul Societăţii de Matematică şi Fizică pentru a primi cărţile acordate.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *)

Evidenţiaţi

În cursul lunii ianuarie 1955 *s-au evidenţiat următorii rezolvitori:*

Cristea I. Ion (clasa X-a. Şcoala medie, Constanţa), *Berechet M. Oprea* (clasa X-a, S. m. 20, Bucureşti), *Lupuţiu Ioan* (clasa X, Ploieşti), *Bătineţu M. Dumitru* (absolvent, Zimnicea), *Brebente P. Cornel* (clasa IX-a, Tîrgovişte), *Elenberg Manfred* (clasa X-a, S. m. 12, Bucureşti), *Bogdan Mircea* (clasa IX-a, Ploieşti), *Pieleanu I. Dumitru* (clasa IX-a, Giurgiu), *Mitroaica I. Gheorghe* (clasa X-a, Calafat), *Popovici Gh. Iulian* (clasa X-a, Şcoala medie I. L. Caragiale Ploieşti), *Voicu I. Traian* (an II, S. m. electrotehnică, Craiova), *Hegedüs Atila* (clasa IX-a, Tg. Mureş), *Pupăzan Nicolae* (absolvent, Sibiu), *Bogaciu Valeriu* (clasa X-a, Piteşti), *Sămărescu F. Dan* (clasa X-a, Piteşti), *Rotaru N. Constantin* (clasa X-a, Suceava), *Draica Constantin* (clasa VIII-a, S. m. 4, Bucureşti), *Alexa Dumitru* (clasa X-a, Iaşi), *Leaţ Gh. Mihai* (clasa VII-a, Roznov, Piatra Neamţ), *Mitrofan Gheorghe* (absolvent, Caransebeş), *Chirică Andrei* (clasa IX-a, Ploieşti), *Tănase Dumitru* (anul IV, S. m. măsurători terestre, Bucureşti), *Rus A. Ioan* (clasa X-a, Oradea), *Stănciuleascu Mihai* (clasa IX-a, Tîrgovişte), *Parepa C. Grigore* (absolvent, Ploieşti), *Crăcană Petrea* (anul II, Sc. pedagogică, Iaşi), *Alexandru Gheorghe* (absolvent, Sibiu), *Galaţki Gheorghe* (clasa X-a, Tîrgovişte), *Stănăşilă Octavian* (clasa X-a, S. m. 4, Bucureşti), *Ţurlea I. Corneliu* (clasa X-a, Craiova), *Guiaşu A. Silviu* (clasa X-a, Oradea), *Kupferberg Albert* (clasa X-a, Ploieşti), *Vrăjitoru Dan* (clasa X-a Aiud), *Drăgan Şt. Marin* (student, Bucureşti), *Miu Gh. Filipoiu* (Student Bucureşti), *Constantin Ion* (clasa X-a, S. m. a Bucureşti), *Dumitrescu Badea Ovidiu* (clasa X-a, S. m. 4. Bucureşti, *Popescu Paul* (Anul II S. m. măsurători terestre, Bucureşti), *Delu Gh. Ştefan* (clasa IX-a, Corabia), *Grăjdeanu I. Petre* (Anul IV, Şc. pedag. Iaşi), *Antonescu Victor* (absolvent Reghin), *Arsenovici Tiberiu* (clasa IX-a, Timişoara) şi *Mettler Martin* (Anul IV Şc. pedag. Timişoara).

În cursul lunii ianuarie 1955, *s-au primit cîte cel puţin zece soluţii bune la problemele propuse în ultimele* 4 *numere ale G.M.F. — B, dela:*

AIUD. Clasa IX-a. Fischer Gheorghe (1372, 374, 379, 416, 436, E: 550, 558, 563, 568, 574); clasa X-a. Ghimbuţan Viorel (1323, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385), Vrăjitoru Dan (1372, 373,374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 388, 389, 390, 391, 395, 396, 402, 403, 404, 405, 407, P).

ARAD. *Şcoala pedagogică*, anul II. Dîrlea F. Ştefan (E: 539, 549, 583, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 584, 586, 587, 588); clasa X-a. Mare A. (1372, 374, 377, 378, 381, 384, 396, 402, E: 552, 553, 558, 559, 560, 561).

---

*) *Erată:* La problema 1525 se adaogă DE=8 cm. La E : 591 în loc de unui număr se va scrie unui număr impar.

BACĂU. Clasa IX-a. Zilberman Mircea (1375, 377, 378, 383, 408, 410, 411, 416, 436, 437, E: 551, 552, 559, 563, 565, 567, 568, 570, 572, 574); clasa X-a. Palaghiţă I. Ştefan (1349, 372, 373, 375, 377, 379, 383, 385, 409, 411, 416, 434, 436), Simion I. Emil (1303, 323, 354, 375, 377, 378, 379, 382, 383, E: 528, 540, 546).

BAIA MARE. Clasa IX-a. Babici Valer (1372, 377, 378, 380, 403, E: 550, 558, 559, 560, 561, 564, 569, 571,84, 575), Conţiu Ioan (1354, 372, 378, E: 535, 536, 537, 540, 542, 543, 544, 546, 547).

BALŞ. (Reg. Craiova). Clasa IX-a. Cosăceanu Florentina (1372, 373, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 410, 416, 436, E: 558, 559, 560, 561, 568, 574).

BÎRLAD. Clasa X-a. Pavel Nicolae Constantin (1378, 383, 403, 316, 431, 43 7,E: 549, 554, 558, 559, 563, 564, 567, 568, 572, 578, 585, 574).

BEZDEAD (Ploieşti). Clasa VII-a. Paraschiv G. Elena (E: 563, 564, 565, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575).

BOLINTINUL-DE-VALE (Reg. Bucureşti). Clasa X-a. Martin Stoian (1372, 374, 377, 378, 402, 410, 416, 432, 449, E: 559).

BOTOŞANI. Clasa VIII-a, Ionescu V. Cristina (1335, 337, 372, E: 522, 524, 528, 532, 533, 546, 561); clasa IX-a. Davidson Pesa (1403, 409, 449, E: 563, 568, 571, 574, 581, 586, 587, 588), Freiberg Ella (1403, 409, 412, 416, 449, E: 563, 568, 571, 574, 581, 586, 587, 588), Filip Mariana (1403, 409, 410, 412, 441, E: 560, 561, 563, 568, 571, 574, 586, 587, 588); clasa X-a. Ceauşu Iulian (1373, 381, 382, 392, 396, 403, 405, 416, 436, E: 550, 563, 568, 571, 574), Ciofu Fevronia (1408, 409, 410, 414, 416, 441, 442, E: 563 564, 568, 571, 574, 478, 486, 487, 488), Dimitriu Zamfir (1372, 374, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 385, 396, 402, 403, 404, 405, 409, 413, 416, 436, 437, E: 558, 559, 568, 571), Marin Corneliu (1372, 375, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 392, E: 546, 552, 558, 559), Scutelnicu Radu (1354, 364, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378 379 380 381, 382, 383, 392, 396, 402, 403, 404, 405, 407, E: 559, 561), Sin Moise Silvia (1409, 449, E: 563, 568, 571, 574, 481, 586, 587, 588), Ştefan Vasile (1363, 372, 375, 377, 378, 379, 386, 404, 407, E: 558, 559, 560, 561), Sapira Noch (1372, 374, 377, 378, 379, 383, 404, 405, E: 559), Schwartz Mina (1408, 409, 413, 416, 441, 442, E: 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574, 576, 477, 582, 583, 586, 587, 588, P), Vieru Tatiana (1403, 409, 449, E: 563, 568, 571, 574, 581, 586, 587, 588), absolvent Darabani: Viorel Grigore (13.72, 373, 374, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 386, 403, 406).

BUCECEA (Botoşani). Clasa VII-a. Cojocaru Elena (E: 505, 570, 519, 522, 533, 538, 540, 546, 544, 557), Heltstanschi Eugenia (1336, 372, E: 522, 528, 532, 533, 535, 538, 554, 555, 557, 558, 561, 563, 568, 574).

BUCUREŞTI. *Absolvenţi*. Costescu Matei (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 380, E: 536, 537, 538, 540, 547, 557, 559, 561).

Studenţi: Cîmpu Eugen (1320, 322, 323, 332, 347, 348, 349, 350, 351, 362, 353, 354, 355, 356, 358, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369), *Drăgan St. Marin* (1320, 323, 324, 325, 336, 337, 338, 339, 342, 346, 351, 354, 358, 359, 360, 361, 362, 365, 371, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 406, 407, E: 528, P), *Miu Gh. Filipoiu* (1326, 323, 333, 339, 342, 372, 373, 375, 376, 377, 378, 380, 403, 404, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 415, 416, 418, 434, 436, 439, 4 P).

Şcoala medie de 10 ani «N. Bălcescu», nr. 1 băieţi. Clasa IX-a. Cernica Radu (1348, 354, 358, 363, 372, 375, 378, E: 536, 537, 540, 544, 546, 547,) David José (1374, 377, 409, 411, 413, 415, 416, 436, E: 563, 572, 578), Ioanid Ioan (1358, 363, 374, 377, 378, 381, 383, E: 528, 529, 537, 540, 544, 546, 558, 559), Schileru I. Dinu (1375, 377, 378, 379, 381, 382 383, 384, 390, 392, 407, 434, 636, 460, E: 558, 559, 563, 569, 571, 574); clasa X-a. *Constantin Ion* (1350, 351, 358, 362, 363, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380 ,381, 382, 383, 384, 385, 390, 391, 392 403, 404, 405), Dicu Gheorghe (1346, 372, 375, 377, 378, 380, 385, 389, 416, 434, P).

Şcoala medie nr. 2. Clasa VIII-a. Ţurcanu Aurel (E: 546, 563, 564, 568, 571, 574, 580, 584, 587, 588); Clasa IX-a. Popa Adrian (1408, 409, 411, 416, 418, 423, 434, 436, E: 565, 567, 570, 572).

Şcoala medie de băieţi nr. 4. *« Aurel Vlaicu » Griviţa Rosie* — Clasa VIII-a. Bejan Ilie (1316, E: 505, 519, 526, 531, 559, 563, 568, 571, 574, 587, 588), Diculescu Lucian (E: 529, 557, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 580, 587, 588), Dinu Vasile (1316, 335, 337, E: 505, 519, 526, 531, 559, 563, 571, 574), *Draica Constantin* (1282, 288, 306, 318, 359, 375, 437, 449, 460, E: 509, 511, 520, 535, 553, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 581, 583, 584, 586, 587, 588), Gruia M. Nicolae (E: 546, 558, 563, 568, 572, 574, 580, 586, 587, 588), Zvorişteanu Alexandru (1335, 337, 346, 360, 361, 362, 431, 432, 441, E: 553, 565, 567, 572, 576, 577, 578, 579, 580, 588), Ionescu Dumitru (1373, 393, 402, E: 527, 536, 537, 541, 560, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 57,1 572, 573, 574, 578, 586, 587, 588), Liţoiu D. Savu (E: 505, 508, 510, 555, 559, 561, 563, 566, 568, 569, 571, 574, 5780, P), Kodman Ion (1393, 402, 437, E: 533, 537, 463, 564, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575. 586, 587, 588), Mănescu Lucian (1389, E: 524, 465, 563, 568, 571, 574, 580, 586, 587, 588), Pavel Gh. Ionel (E. 560, 563, 567, 568, 571, 573, 574, 586, 587, 588), Peţanca Ion (E: 526, 531, 563, 564, 571, 574, 580, 586, 587, 588), Pandele Constantin (1347, 349, 354, 358, 363, E: 536, 538, 540, 542, 544, 546, 547), Rădulescu Constantin (E: 537, 546, 561, 563, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 586), Stamatoiu Petre (1434, E: 524, 541, 543, 546, 554, 558, 561, 563, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 586, 587, 588), Vasilescu Gheorghe (1402, 437, E: 563, 564, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575); clasa IX-a. Cristache Aurel (1372, 375, 377, 378, 379, 382, 436, E: 558, 559, 561, 563, 568, 751, 574, 577, 578, 586, 587, 588), Petre T. Tudor (1374, 410, 416, 436, E: 563, 564, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 586, 587); clasa X-a. *Dumitrescu Badea Ovidiu* (1356, 358, 363, 377, 378, 379, 383, 407, 409, 410, 411, 412, 414, 416, 418, 431, 432, 436, 441, 442, 443, 449, 465, E: 510. 325, 538, 544, 559, 567, 568, 570, 572, 574, 578, 586, 587), Dănescu Stelian (1375, E: 560, 561, 563, 567, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584, 486, 487, 488), Georgian Dan (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 381, 382, 404, 409, 410, 411, 413, 466, 436), Ghiţescu Liviu (E: 522, 523, 526, 528, 531, 538, 541, 549, 559, 560, 561), Hanganu Ştefan (1372, 373, 374, 375, 378, 436, 449, E: 558, 567, 574, 586, 587, 588), Iovan Dumitru (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 382, 436, E: 558, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 577, 578, 586), Movanu Radu (1373, 375, 402, E: 563, 367, 568, 571, 574, 578, 586, 587, 588), Petre T. Petre (1358, 374, 410, 416, 436, 442, E: 563, 564, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 585, Rădoi D. Mircea (1328, 362, 372, 374, 377, 416, E: 526, 528, 530, 532, 540, 544, 546, 547, 549, 558, 559, 563, 564, 565, 570, 574), Zlătaru Adrian (1375, 437, 449, 460, E: 553, 558, 563, 568, 569, 574, 576, 578, 587), Spătaru Ion (1396, 402, 410, 413, 414, 416, 436, E: 551, 552, 553, 560, 563, 565, 566, 568, 570, 571, 573, 574, 579), *Stănăşilă Octavian* (1295, 303, 310, 326, 328, 354, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 392, 403, 409, 410, 412, 431, 432, 441), Voicu Constantin (1374, 404, 416, 436, E: 563, 567, 568, 571, 572, 574, 581, 584, 586).

Şcoala medie nr. 5 *de fete*, clasa IX-a. Cîmpu Demetra (1354, 362, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, E: 558, 559).

Şcoala medie nr. 6. *de băieţi*, clasa V-a. Popovici I. Radu, (1389, 385, 392, 409, 411, 416, 434, 437, 441, 442, 449, 453, 458, 459, 460, 461, 465, E: 563, 568, 571, 572, 574, 575, 587, 588). Clasa VI-a. Nicolau A. Cristian (E. 563, 564, 566, 568, 571, 574, 575, 581, 582, 586).

Şcoala medie nr. 11 *de fete*, clasa VI-a. Păduret Victoria (E: 539, 540, 541, 544, 546, 554, 555, 558, 560, 561, 562, 563, 566, 568, 569, 571, 574, 575).

Şcoala medie nr. 12 *de băieţi*, clasa IX-a. Zisu Silviu (1340, 372, 374, 375, 381, 411, 416, E: 528, 532, 533, 558, 563, 565, 568, 569, 574); clasa X-a. Daia Viorel (1354, 362, 363, 365, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 380, 383, 392, 396, E: 524, 535, 538, 540, 546,

(va urma)

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F. — seria B.*

— *Se primesc soluții numai* la problemele și exercițiile din ultimele *patru* numere apărute.

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului* 1955, *se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul* 1955.

— *Pentru anul* 1955, *G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii si mențiuni.*

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *In redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute, corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții au fost scrise îngrijit și sînt bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a «Olimpiadei matematice si fizice»*, pentruca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a presei București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat *să facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

Cititorii și colaboratorii revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care doresc să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15—18, miercuri între orele 10—13 și sîmbătă între orele 15—18 la sediul redacției din strada Academiei 14.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,15)
7. *Calcule numerice* de **H. Ioneseu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi* de **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **I. S. Şklovski** (lei 6,85)

VA APARE:

Structura materiei de **V. Atanasiu**

• • •

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI

LEI 7,50 PENTRU NUMERELE 4—12 (9 NUMERE)

249. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul **Lei 1** exemplarul

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEN - CSERE
WYMIANA - WYMIANA
TAUSCH - OBMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Tineri şi tinere! Munciţi cu tot entuziasmul şi avîntul vostru tineresc pentru însuşirea ştiinţei, tehnicii şi culturii înaintate! Fiţi luptători hotărîţi şi activi pentru victoria măreţei cauze a socialismului în patria noastră scumpă!

(Din Chemările Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn cu prilejul zilei de 1 Mai 1955)

Anul VI — Aprilie 1955

4

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 4 — Aprilie 1955

SUMARUL:

Pag.

1. *V. I. Lenin, marele geniu al omenirii progresiste* 149
2. *Elemente de teoria grupurilor finite în matematica elementară (urmare) de Conf. Univ. T. Roman*.... 151
3. *Aspectul electronic al fenomenelor electrice principale de Conf. Univ. N. Stănescu* 165
4. *Cercuri adjuncte de Prof. Gh. Dobrotescu* 178
5. *Simple experienţe privind legea lui Arhimede*..... 180
6. *Probleme rezolvate (1276; 1286; 1301; 1306; 1309; 1311)* 183
7. *Probleme propuse (Chestiuni de examen 1560—1582)* 186
8. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 624—E: 637)* 188
9. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 189

ANUL VI 4 APRILIE 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Könyvtár
TULAJDONA

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VI * Nr. 4 Aprilie 1955

V. I. LENIN, MARELE GENIU AL OMENIRII PROGRESISTE

ANIVERSAREA a 85 de ani de la naşterea lui Lenin, marele geniu al omenirii, întemeietorul şi conducătorul Partidului Comunist al Uniunii Sovietice şi a primului stat socialist din lume, este pentru oamenii muncii din lumea întreagă un prilej de adîncă cinstire a memoriei lui, un prilej de a strînge şi mai mult rîndurile sub steagul leninist. De numele iubit al lui V. I. Lenin, de învăţătura lui, sînt legate triumful Marei Revoluţii Socialiste din Octombrie şi măreţele victorii ale oamenilor sovietici.

Cercetînd dezvoltarea societăţii şi cuceririle ştiinţei, sintetizînd experienţa mişcării muncitoreşti mondiale, Lenin a dus mai departe ştiinţa marxistă, ridicînd-o pe o treaptă superioară corespunzătoare noilor condiţii istorice. El este acela care a dat o temeinică analiză ştiinţifică a imperialismului dezvăluind plăgile şi condiţiile pieirii lui ***inevitabile.***

V. I. Lenin a dezvoltat ideea marxistă a hegemoniei proletariatului în revoluţie şi învăţătura lui Marx şi Engels despre dictatura proletariatului, arătînd în mod concret formele şi mijloacele construirii socialismului în condiţiile încercuirii capitaliste.

Leninismul a influenţat în mod hotărîtor dezvoltarea istorică a poporului nostru. Pe baza învăţăturilor lui Lenin, a fost creat şi s-a dezvoltat Partidul Comunist din Romînia, sub steagul ideilor lui Lenin şi Stalin, a condus partidul, pe oamenii muncii din patria noastră, în lupta împotriva claselor exploatatoare şi apoi, pe drumul construirii socialismului.

Lenin a arătat uriaşa însemnătate pe care o are dezvoltarea atitudinii socialiste faţă de muncă, iniţiativa creatoare a maselor, întrecerea socialistă, răspîndirea experienţei înaintate în lupta pentru triumful noii orînduiri.

Urmînd această învățătură leninistă, oamenii muncii din țara noastră desfășoară în momentul de față o largă întrecere socialistă în cinstea zilei de 1 Mai, în vederea obținerii de noi victorii în îndeplinirea sarcinilor ultimului an al cincinalului.

V. I. Lenin a arătat întotdeauna năzuința constantă spre pace a Rusiei Sovietice, el a subliniat posibilitatea coexistenței pașnice între sistemul socialist și cel capitalist.

Politica de pace a U.R.S.S. și a țărilor de democrație populară își are origina în mărețele idei leniniste. In sprijinul acestei politici vine lupta unită a popoarelor împotriva imperialismului aflător la un război atomic. Sutele de milioane de semnături puse pe Apelul de la Viena al Consiliului Mondial al Păcii, care cere distrugerea stocurilor de arme atomice și oprirea fabricării lor, sînt o mărturie vie a luptei mereu crescînde a partizanilor păcii.

Lucrările teoretice ale lui V. I. Lenin constituie și azi un îndreptar prețios pentru oamenii de știință din diferite sectoare de activitate. In « Materialism și Empiriocriticism », lucrarea de susținere a bazelor teoretice ale partidului de tip nou — Lenin combate cu o deosebită vigoare încercările de a introduce în fizica modernă principii idealiste și concluzii fideiste. Ideile lui Lenin sînt pe deplin actuale în dezvoltarea cu succes a tuturor cuceririlor științelor moderne ale naturii.

Operele teoretice și activitatea practică ale lui V. I. Lenin închinate problemelor educației comuniste și învățămîntului, răspund la toate problemele principale ale școlii de tip nou. Învățătura lui Lenin cu privire la școală este una din părțile cele mai importante ale învățăturii lui cu privire la construirea socialismului. De aceea Lenin leagă fiecare problemă a învățămîntului public de problemele construirii societății socialiste.

Discursul lui Lenin la Congresul al III-lea al Comsomolului, în 1920, reprezintă un document în care sînt precizate problemele educației comuniste a tinerei generații și problemele cadrelor didactice.

Lenin ne învață că tineretul care vrea să construiască comunismul trebuie să învețe comunismul. In acest sens tineretul trebuie să fie înzestrat cu cunoștințele necesare dezvoltării multilaterale a oamenilor și construirii socialismului, iar nu cu cunoștințe scolastice, moarte. Lenin a formulat principiile unor noi metode de asimilare a cunoștințelor care să contribuie la elaborarea concepțiilor și convingerilor comuniste. Lenin este împotriva buchiselii și pentru dezvoltarea și perfecționarea memoriei elevilor prin cunoașterea faptelor esențiale. In locul vechiului dresaj trebuie să se creeze capacitatea de a prelua în așa fel cunoștințele omenești încît comunismul să nu fie ceva învățat pe de rost, ci ceva gîndit de el însuși, să fie concluzia ce se impune din punctul de vedere al culturii moderne.

Aceste principii precum și alte învățături ale lui Lenin cu privire la educația comunistă au fost și rămîn temelia pe care se zidește atît teoria formării și a educației științei pedagogice sovietice cît și activitatea practică a școlii.

Urmînd drumul trasat de Lenin, partidul nostru acordă o mare importanță operei de dezvoltare și propagare a culturii socialiste, pentru crearea unei intelectualități noi, populare, pentru crearea de cadre necesare construirii socialismului

Folosind bogata experiență a Partidului Comunist al Uniunii Sovietice, aplicînd în mod creator mărețele învățături ale lui Lenin, să luptăm necontenit pentru ridicarea puterii economice și a nivelului cultural, să luptăm pentru a face din patria noastră un puternic bastion în marele front al păcii condus de Uniunea Sovietică.

ELEMENTE DE TEORIA GRUPURILOR FINITE ÎN MATEMATICA ELEMENTARĂ

TIBERIU ROMAN
Conf. Univ.

În cele ce urmează vom folosi rezultatele şi expemplele din articolul «Noţiunea de grup în matematica elemenatră», apărut în numărul precedent al acestei publicaţii.

17. Teorema din § 14 a arătat că într-un grup pot fi cuprinse alte grupuri: un element A al unui grup cu toate puterile sale cuprinse într-un grup finit **formează** un grup ciclic. De exemplu, elementele L, Q, N din tabloul (2), elementele L, R^3 din tabloul (3) sau R_0, R_1, R_2 din tabloul (7). Un astfel de grup cuprins într-un grup poartă numele de subgrup propriu.

Se numeşte s u b g r u p al unui grup G, *o mulţime de elemente ale sale care formează grup faţă de operaţia definită în grupul G.*

Pentru a dovedi că un număr (nenul) de elemente (a căror totalitate să o notăm cu H) ale unui grup G *formează un subgrup al său* nu-i necesar să verificăm toate condiţiile precizate în § 10; *este suficient ca:*

a) *produsul a două elemente din* H *să aparţină lui* H,

b) *odată cu un element oarecare al său,* H *să conţină şi inversul elementului respectiv.*

În adevăr, asociativitatea existînd pentru elementele grupului G, ea se păstrează pentru o parte a lor, elementele din H. Elementul unitate există în H, căci, odată cu elementele A şi A^{-1} (care există în H pe baza condiţiei *b)* H cuprinde şi produsul lor (pe baza conditiei *a)*, adică pe $AA^{-1} = E$.

Astfel, ca exemple de subgrupuri ale grupului numerelor complexe (exemplul 4° din § 11) avem grupul numerelor raţionale, ca subgrup al său, avem grupul numerelor întregi (ex. 1°) şi ca subgrup al acestuia grupul numerelor întregi pare (ex.2°), cu operaţia de grup adunarea.

Grupul polinoamelor de grad $\leqslant n$, cu coeficienţi raţionali, admite ca subgrup grupul polinoamelor de grad $\leqslant n$ cu coeficienţi întregi (pozitivi, negativi sau nuli), iar acesta admite ca subgrup totalitatea polinoamelor de grad $\leqslant n$, cu coeficienţi întregi pari, operaţia de grup fiind adunarea.

Grupul numerelor raţionale (diferite de zero) admite ca subgrup mulţimea numerelor raţionale pozitive (ex. 3°, § 11) dar şi grupul format din -1 şi $+1$ (ex. de la 2°, § 16), operaţia de grup fiind înmulţirea.

Este indicat ca cititorul să verifice îndeplinirea condiţiilor *a* şi *b* de mai sus, pe exemplele acestea.

În cazul grupurilor finite, teorema de mai sus ia o formă mai simplă:

O mulţime H *de elemente ale unui grup finit formează un subgrup dacă produsul a două oricare elemente din* H *aparţine lui* H.

În adevăr, din această condiţie rezultă că în H, odată cu elementul A, de ordin n, există şi puterile sale succesive A^2, A^3, ..., A^{n-1}: adică există şi inversul lui A: A^{n-1} şi deci este îndeplinită şi condiţia 2) a teoremei precedente.

Ca exemplu de subgrup al grupului diedric (grupul rotaţiilor şi răsturnărilor unei bipiramide drepte, regulate) (ex. 11°, § 11) avem grupul ciclic al rotaţiilor

bipiramidei (ex. 8°, § 11) şi ca subgrup al acestuia (dacă numărul laturilor poligonului de bază este par), rotaţiile de 0° şi 180° în jurul axei bipiramidei, operaţia de grup fiind compunerea rotaţiilor (definită în § 2).

Grupul rădăcinilor ecuaţiei $x^{2n} - 1 = 0$ are ca subgrup mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $x^n - 1 = 0$, operaţia de grup fiind înmulţirea.

Şi în aceste exemple este bine ca cititorul să verifice îndeplinirea condiţiei teoremei ce le precede.

Evident că această teoremă nu se aplică şi grupurilor infinite. Astfel, de exemplu, mulţimea numerelor raţionale supraunitare verifică această teoremă, totuşi ea nu este un subgrup al grupului numerelor raţionale pozitive, cu operaţia de grup înmulţirea.

Este evident că *proprietatea de a fi subgrup este transitivă*: dacă H este subgrup al lui K, iar K este subgrup al lui G atunci şi H este subgrup al lui G. Exemple sînt date mai sus, după fiecare teoremă.

Orice grup are două subgrupuri improprii. Grupul însuşi şi subgrupul format doar din elementul unitate.

18. Să demonstrăm o teoremă cu privire la subgrupurile grupurilor ciclice (al căror studiu a fost început în § 14) şi anume:

Fiecare subgrup al unui grup ciclic este ciclic.

Să notăm cu A elementul de ordin n care generează grupul ciclic G.

Dacă subgrupul conţine elementul A, conţine toate puterile sale şi deci coincide cu G, formînd un subgrup impropriu. Fie $A^m = B$ cea mai mică putere a lui A care intervine în subgrupul propriu H. Aceasta conţine toate puterile lui B. Să dovedim că m este un divizor al lui n. Exponenţii succesivi ai lui A^m sînt

$$m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots,\ (k-1)\,m,\ km,\ \ldots$$

Dacă m nu ar divide pe n, între două numere ale şirului de mai sus s-ar găsi numărul n, adică $(k-1)\,m < n < km$.

Din prima inegalitate rezultă

$$km - m < n \quad \text{sau} \quad km - n < m.$$

Însă,

$$B^k = A^{km} = A^{km-n}$$

(deoarece $A^m = B$ şi $A^n = E$). Rezultă deci că B^k este puterea km-n a lui A, se găseşte în subgrupul H, dar are un exponent mai mic decît m, ecea ce este contrar ipotezei. Deci m este un divizor al lui n.

Să dovedim acum că subgrupul H nu conţine decît puterile lui B. Dacă A^p ar fi un alt element al lui H, p ne divizînd pe m, atunci ca mai sus, p s-ar afla între doi multipli ai lui m

$$hm < p < (h+1)\,m.$$

Din a doua inegalitate rezultă

$$p < hm + m \quad \text{sau} \quad p - hm < m.$$

Elementul $A^p B^{-h} = A^p A^{-hm} = A^{p-hm}$ este el însuşi cuprins în H, dar exponentul $p - hm$ al lui A este mai mic decît m, ceea ce este contrar ipotezei.

Am dovedit deci, că subgrupul H al grupului ciclic G coincide cu grupul ciclic generat de $B = A^m$, unde m este un divizor al ordinului n al grupului G.

Rezultă din teorema de mai sus că elementele de forma A^m din G au ordinul n atunci şi numai atunci cînd m este prim cu n. Dacă notăm — aşa cum se obişnuieşte — cu $\varphi(n)$ indicatorul lui n, sau numărul numerelor prime cu n şi mai mici ca n, se poate spune că într-un grup ciclic de ordin n există $\varphi(n)$ elemente de ordin n, celelalte avînd ca ordin divizori ai lui n. Dacă n este un număr prim, toate elementele grupului ciclic au ordinul n.

Ca exemplu se poate lua grupul ciclic de ordinul 6 (cu tabela de compunere 3), § 2). Subgrupul de ordin trei (L, R^2, R^4) este ciclic; de asemenea cel de ordin doi (L, R^3).

19. O metodă importantă de studiu în teoria grupurilor este *descompunerea unui grup* G *în clase (la dreapta sau la stînga) faţă de un subgrup* H.

Să scriem elementele subgrupului H

$$E, A, B, \ldots, F. \tag{1}$$

Înmulţind pe rînd, la stînga, fiecare din aceste elemente cu un element X al grupului G, obţinem elemente distincte între ele (după cum s-a arătat la § 13):

$$XE = X, XA, XB, \ldots, XF. \tag{2}$$

Dacă elementul X aparţine subgrupului H, rîndurile (1) şi (2) conţin aceleaşi elemente independent de ordine, conform celor stabilite în paragraful 13.

Dacă elementul X nu aparţine subgrupului H, rîndurile (1) şi (2) nu au nici un element comun. Dacă ar avea un element comun am putea scrie egalitatea

$$A = XB;$$

prin înmulţirea ei la dreapta cu B^{-1} rezultă $AB^{-1} = X$, ceea ce arată că X este element în H, ca produs a două elemente din H; cum aceasta este contrar ipotezei rezultă că (1) şi (2) nu au un element comun, dacă X nu aparţine subgrupului H.

Al doilea rînd de elemente se numeşte clasă la stînga a subgrupului H şi se notează simbolic XH. Însuşi subgrupul H poate fi considerat clasa la stînga EH.

Putem construi şi alte clase la stînga?

În caz că cele două rînduri de elemente epuizează grupul G, nu mai există alte clase la stînga. Dacă însă G conţine şi alte elemente, de pildă Y, putem construi clasa la stînga

$$YE = E, YA, YB, \ldots YF. \tag{3}$$

Dacă Y nu aparţine subgrupului H şi nici clasei la stînga XH, să arătăm că nu există elemente comune între rîndul (2) şi (3). Dacă ar exista un element comun, am putea scrie $XA = YB$.

Înmulţind la dreapta cu B^{-1} obtinem $XAB^{-1} = Y$, adică Y aparţine clasei XH (căci AB^{-1} aparţine subgrupului H); cum acest rezultat este contrar ipotezei, înseamnă că rîndurile (2) şi (3) sau clasele XH şi YH nu au elemente comune.

Rezultatele de mai sus se pot enunţa astfel:

Un grup se descompune în clase la stînga faţă de subgrupul H

$$G = H + XH + YH + \ldots$$

clase care nu au elemente comune două cîte două şi care conţin doar elemente ale grupului G.

Dacă cu clasele H, XH, YH nu am epuizat grupul G, continuăm operaţiile ca mai sus cu clasele $ZH, \ldots$. Dacă după un număr finit de asemenea operaţii epuizăm toate elementelele grupului G, acesta se poate scrie simbolic sub forma

$$G = H + XH + YH + ZH + \ldots + WH, \tag{4}$$

$X, Y, Z, \ldots, W$ fiind elemente ale lui G, fiecare nefiind cuprins în nici una din clasele precedente.

Pe baza demonstraţiei date sub rîndul (3) de elemente, rezultă că rolul lui $X, Y, \ldots, W$ în fiecare clasă poate fi jucat de oricare element al clasei respective.

Prin urmare, descompunerea unui grup G în clase la stînga faţă de un subgrup H este unică, în ceea ce priveşte natura claselor, ordinea poate fi desigur şi alta decît cea din (4).

Numărul claselor la stînga din (4), inclusiv H, se numeşte *indicele* subgrupului H.

20. Dacă ordinul grupului G este finit, indicele subgrupului H este de asemenea finit şi rezultă imediat *teorema:*

Ordinul şi indicele unui subgrup sînt divizori ai ordinului grupului.

Aceasta se mai poate enunţa şi astfel: indicele *unui subgrup este cîtul dintre ordinul grupului şi al subgrupului respectiv.*

Deoarece ordinul unui element coincide cu ordinul subgrupului său ciclic, rezultă din această teoremă că *ordinul oricărui element al unui grup finit este un divizor al ordinului grupului.*

Din aceiaşi teoremă rezultă că *orice grup al cărui ordin este un număr prim* p *este un grup ciclic,* deoarece el ne avînd subgrupuri proprii trebuie să coincidă cu subgrupul ciclic de ordinul p generat de un element oarecare al său, diferit de E.

Din toate clasele scrise în descompunerea simbolică (4) doar H este un subgrup; celelalte nu conţin elementul E şi deci nu sînt subgrupuri.

21. În descompunerea (4) am folosit clasele la stînga ale subgrupului H. În mod asemănător ca mai sus, o clasă la dreapta a subgrupului H este formată din elementele

$$EX' = X', \; AX', \; BX', \ldots, \; FX' \tag{2'}$$

ceea ce se notează şi HX'.

Procedînd ca mai sus, se ajunge la o descompunere a grupului G în clasele la dreapta faţă de subgrupul H

$$G = H + HX' + HY' + \ldots + HW'. \tag{5}$$

Să arătăm că indicele subgrupului H este acelaşi pentru o descompunere la stînga sau la dreapta şi să determinăm elementele $X', Y', \ldots, W'$ din (5) în funcţie de elementele $X, Y, \ldots, W$ din (4). Să observăm că elementele subgrupului H din (1) se pot scrie şi

$$E, \; A^{-1}, \; B^{-1}, \ldots, \; F^{-1} \tag{1'}$$

datorită definiţiei subgrupului şi deci, în notaţie simbolică, $H^{-1} = H$.

Să considerăm două clase la stînga din descompunerea (4): UH şi VH unde U şi V sînt distincte şi pot fi oricare din elementele $E, X, Y, Z, \ldots, W$. Să luăm inversele acestor clase la stînga:

$$(UH)^{-1} = H^{-1}U^{-1} = HU^{-1} \quad \text{şi} \quad (VH)^{-1} = H^{-1}V^{-1} = HV^{-1}.$$

Am ţinut seama de regula de calculare a elementului invers unui produs (stabilită în § 12) şi de observaţia de mai sus.

Clasele astfel obţinute nu au elemente comune. În adevăr, dacă am avea

$$AU^{-1} = BV^{-1}$$

prin înmulţirea la stînga cu A^{-1} şi la dreapta cu V ar rezulta

$$U^{-1}V = A^{-1}B$$

sau, înmulţind la stînga cu U,

$$V = UA^{-1}B,$$

adică V ar aparţine clasei UH (căci $A^{-1}B$ aparţine subgrupului H), ceea ce este contrar ipotezei cu privire la elementele U şi V.

Din cele de, mai sus rezultă că, *dacă descompunerea unui grup în clase la stînga este*

$$G = H + XH + YH + \ldots + WH,$$

descompunerea în clase la dreapta se poate scrie

$$G = H + HX^{-1} + HY^{-1} + \ldots + HW^{-1} \qquad (5')$$

iar indicele subgrupului H este acelaşi atît pentru descompunerea în clase la dreapta cît şi pentru cea în clase la stînga.

Într-un grup comutativ, clasele la stînga şi cele la dreapta coincid. Pentru grupurile necomutative, descompunerile sînt în general diferite, în afara unor anumite subgrupuri H — subgrupurile invariante — pe care le studiem în § 31.

22. Să dăm acum, cîteva exemple de descompuneri în clase.

1°. În cazul grupului ciclic de ordin 6 cu tabela de grup (3) dela § 2, dacă luăm ca subgrup $H = (L, R^3)$ clasele sînt: H; $RH = HR = (R, R^4)$ şi $R^2H = HR^2 = (R^2, R^5)$; iar dacă luăm ca subgrup $K = (L, R^2, R^4)$ clasele sînt : K şi $RK = KR = (R, R^3, R^5)$.

Subgrupul H are indicele 3 iar K indicele 2.

2°. În cazul grupului necomutativ de ordin 6, cu tabela de grup (7) dela § 6, dacă luăm **ca** subgrup $H = (R_0, L)$, clasele la stînga sînt H, $R_1H = (R_1, M)$ şi $R_2H = (R_2, N)$, iar clasele la dreapta sînt: H, $HR_1^{-1} = HR_2 = (R_2, M)$ **şi** $HR_2^{-1} = HR_1 = (R_1, N)$. **Dacă luăm ca subgrup** $K = (R_0, R_1, R_2)$ clasele sînt K şi $LK = KL = (L, M, N)$.

Subgrupul H are indicele 3 atît pentru descompunerea în clase la dreapta cît şi pentru cea în clase la stînga, iar subgrupul K de indice 2, are aceiaşi descompunere în clase la dreapta şi la stînga.

3° Elementele grupului diedric (grupul rotaţiilor şi răsturnărilor unei bipiramide drepte cu baza un poligon regulat cu n laturi) (ex. 11°, §11) sînt: $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$, dacă notăm cu A rotaţia de

$\frac{2\pi}{n}$ în jurul axei şi cu B o răsturnare (o rotaţie de π în jurul unei axe de simetrie a bazei).

Fată de subgrupul ciclic al rotaţiilor $H = (E, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ grupul se descompune în clasele la stînga

$$H \text{ şi } BH = (B, BA, B^2A, \ldots, BA^{n-1})$$

şi în clasele la dreapta

H şi $HB = (B, AB = BA^{-1} = BA^{n-1}; A^2B = BA^{-2} = BA^{n-2}; \ldots BA^2, BA)$.

Se observă că nu există o deosebire între clasele la dreapta şi cele la stînga (cît priveşte natura elementelor în fiecare clasă şi nu ordinea lor).

Subgrupul H are indicele 2 şi ordinul $n = \frac{2n}{2}$.

4° Grupul I al numerelor întregi (pozitive, negative şi zero) (ex 1°, § 11) admite ca subgrup de indice doi grupul P al numerelor întregi pare (ex. 2°, § 11) faţă de operaţia de adunare aritmetică. Descompunerea în clase la stînga (sau la dreapta, grupul fiind comutativ) este P şi $P + 1$ unde $P + 1$ reprezintă mulţimea numerelor întregi impare, care se obţine adunînd unitatea la fiecare element al grupului P.

5° Grupul I de mai sus (4°) admite ca subgrup de indice m grupul H al multiplilor lui m. Clasele la stînga (sau la dreapta) sînt

$$H, H + 1, H + 2, \ldots, H + m - 1,$$

unde $H + l$ reprezintă mulţimea numerelor întregi care la împărţirea prin m dau restul l.

6°. Se numesc *întregii lui Gauss* numerele de forma $\gamma = m + in$ unde m şi n sînt numere întregi, iar $i = \sqrt{-1}$. Se arată îndată că mulţimea Γ a numerelor γ formează un grup comutativ faţă de adunare şi că mulţimea I a numerelor întregi (de la 4°, de mai sus) este un subgrup al lui Γ. Indicele lui I în Γ este infinit căci descompunerea în clase a lui Γ este

$$\ldots, I - ki, \ldots, I - 2i, I - i, I, I + i, I + 2i, I + 3i, \ldots I + ki, \ldots$$

23. În teoria grupurilor un loc important îl ocupă studiul grupurilor reprezentate prin *substituţii*. Din punct de vedere istoric, primele cercetări sistematice de teoria grupurilor s-au făcut pe grupurile de substituţii. Ele reprezintă un model destul de uşor de folosit, dau un exemplu concret de grup necomutativ şi pot fi puse în corespondenţă cu orice grup finit.

Exemplul dat în § 9 este bine să fie revăzut, înainte de a merge mai departe.

Numim *substituţie de n obiecte operaţia prin care trecem de la o permutare la o altă permutare.*

Ceea ce este esenţial în această operaţie este corespondenţa care se stabileşte între fiecare obiect al primei permutări şi obiectul cu acelaşi număr de ordine din a doua permutare.

Astfel, de exemplu, substituţia $\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$ arată că a este înlocuit prin b, b prin d, d prin c iar c prin a. Aceeaşi substituţie se poate scrie $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} a & b & d & c \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$ ...

În general, ordinea în care se scriu elementele primei permutări nu are importanță, ea putînd fi schimbată. Desigur că în mod corespunzător, se schimbă ordinea elementelor permutării a doua.

Deobicei, elementele primei permutări se așează în ordinea naturală, primitivă. Întrucît natura obiectelor care se permută nu are nicio importanță în substituție, elementele ei se notează cu litere cu indici sau mai simplu, cu primele n numere naturale, astfel

$$P = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ a_i a_j \dots a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

unde $i_1, i_2, \dots i_n$ sînt tot numerele $1, 2, \dots, n$ așezate într-o anumită ordine.

Rezultă de aci ce înseamnă *egalitatea a două substituții*: două substituții de același număr de elemente sînt egale atunci și numai atunci cînd, la un anumit element, ambele substituții fac să corespundă un același element.

Produsul a două substituții P și Q (în această ordine) este substituția ce se obține aplicînd indicilor $1, 2, \dots, n$ în mod succesiv, substituțiile P și Q. Pentru a efectua produsul este mai bine a scrie prima linie a lui Q la fel cu a doua linie a lui P.

Astfel dacă $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ și $Q = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$

atunci $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, adică tot o substituție de n elemente.

De exemplu, pentru $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

avem $$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

iar $$QP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, în general, *produsul a două substituții nu este comutativ* $PQ \neq QP$.

Se poate demonstra însă, că produsul substituțiilor este asociativ: $P(QR) = (PQ)R$. Cititorul poate verifica aceasta pe substituțiile de trei elemente dela §9.

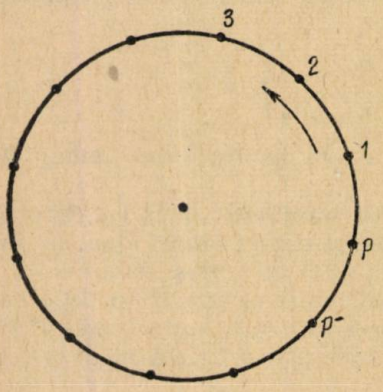
Între substituțiile de n elemente există și *substituția identitate* $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ care are proprietatea că, pentru orice substituție P, $PE = EP = P$, ceea ce se verifică imediat făcînd înmulțirile.

Oricărei substituții P îi corespunde *o substituție inversă* P^{-1} așa că $PP^{-1} = P^{-1}P = E$. Dacă $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ atunci $P^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ cum se verifică imediat.

Din cele de mai sus rezultă că *substituțiile de n elemente formează un grup necomutativ*, îndeplinind condițiile din § 10.

Întrucît numărul permutărilor care se pot face cu n elemente este $n! = 1.2.3 \ldots n$ rezultă că grupul substituțiilor de n elemente, numit și *grupul simetric*, are ordinul $n!$ (ex. 10° din § 11).

24. Fiecare substituție P de n elemente are un anumit ordin (§ 14) m, cel mai mic întreg așa ca $P^m = E$ unde prin P^m înțelegem efectuarea succesivă a substituției P de m ori. Astfel, substituția $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = Q$ este de ordin 3, căci $Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = E$, iar substituția $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = R$ este de ordin 4, căci $R^4 = E$.



O substituție de n elemente se numește o *substituție circulară* sau un *ciclu* dacă, în afară de elementele care rămîn neschimbate, celelalte pot fi scrise astfel ca primul să treacă în **locul celui de al** doilea, al doilea în **al celui de** treilea, ..., al $p-1$-lea în **locul celui de al** p-lea, iar acesta în **locul** primului (**avînd** $p < n$). Un ciclu se notează prescurtat așezînd într-o singură linie între paranteze, doar elementele ce se schimbă și în ordinea respectivă. Astfel,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\,2\,4); \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3\,4);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3\,5\,7\,8).$$

Numărul p de mai sus este *ordinul* ciclului.

Să arătăm că *orice substituție se poate reprezenta ca un produs de cicluri fără elemente comune.*

În adevăr, prin substituție lui 1 îi corespunde un element i_1, acestuia i_2, și așa mai departe pînă revenim la 1. Dacă nu s-au epuizat elementele substituției, luăm unul din cele rămase și formăm ciclul său, și așa mai departe. Ciclurile astfel obținute nu au elemente comune iar ordinea acestor cicluri în produs este indiferentă. Produsul unor astfel de substituții — ciclurile ce formează o substituție oarecare — este comutativ. De exemplu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)\ (3\ 5) = (3\ 5)\ (1\ 2\ 4)$$

sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 8 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)\ (2\ 7\ 5)\ (4\ 8) = (2\ 7\ 5)\ (1\ 3)\ (4\ 8)$$

Este indicat ca cititorul să scrie efectiv aceste cicluri ca substituții și să efectueze produsul lor verificînd descompunerea și comutativitatea.

25. *Transpoziția* este un ciclu de ordinul doi sau altfel spus, o substituție ce mută două elemente între ele, celelalte rămînînd neschimbate.

De exemplu $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix} = (1\ 2)$ sau $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = (2\ 3)$.

Se poate ușor dovedi că *orice ciclu se poate reprezenta ca produsul unui număr finit de transpoziții sub forma*

$$(1\ 2\ 3 \ldots p-1\ p) = (12)\ (13) \ldots (1\ p-1)\ (1\ p).$$

Este bine ca cititorul să calculeze produsul transpozițiilor din dreapta și să arate că se obține ciclul din stînga. Verificarea se poate face pe exemplul:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&4&3&5&7&6&9&8&1\end{pmatrix} = (1\ 2\ 4\ 5\ 7\ 9) = (1\ 2)\ (1\ 4)\ (1\ 5)\ (1\ 7)\ (1\ 9)$$

și apoi în cazul general.

Reprezentarea unui ciclu printr-un produs de transpoziții nu este, în general, unică. Astfel pentru ciclul (1 2 3) avem, printre altele, următoarele produse

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)\ (1\ 3) = (2\ 3)\ (1\ 2) = (1\ 3)\ (2\ 3).$$

Din cele două teoreme de mai sus rezultă ca o consecință imediată: orice *substituție se poate reprezenta ca produs de transpoziții* (și de cicluri de ordinul unu). Acest produs nu este unic, iar factorii nu sînt comutativi.

De exemplu: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&6&1&4&7&3\end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 4)\ (3\ 6\ 7) =$

$= (1\ 2)\ (1\ 5)\ (1\ 4)\ (3\ 6)\ (3\ 7) = (1\ 2)\ (1\ 3)\ (1\ 5)\ (3\ 5)\ (1\ 4)\ (3\ 6)\ (3\ 7) =$
$= (1\ 6)\ (1\ 2)\ (6\ 2)\ (1\ 4)\ (1\ 5)\ (4\ 5)\ (1\ 4)\ (3\ 6)\ (3\ 4)\ (3\ 7)\ (4\ 7) =$ etc.

26. Există vre-o regulă cu privire la numărul transpozițiilor în care se descompune o substituție?

Pentru a răspunde la această întrebare să introducem o nouă noțiune utilă și în alte capitole de matematică și anume, noțiunea de *inversiune* și *cea de paritate a unei substituții.*

Numim o **inversiune** într-o substituție — în care prima linie conține indicii în ordinea lor naturală — existența în linia a doua a unei perechi de numere din care primul este mai mare decît al doilea. Orice substituție prezintă un număr de inversiuni. Astfel, E are zero inversiuni. Substituția $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ conține două inversiuni: 2 înainte de 1 și 3 înainte de 1.

Substituția $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$ conține nouă inversiuni: 5 fiind înainte de 3, 4, 2 și 1; 3 înainte de 2 și 1; 4 înainte de 2 și 1; 2 înainte de 1.

O substituție se numește *pară* dacă conține un număr par de inversiuni și *impară* în caz contrar.

Dacă într-o substituție se efectuează o transpoziție, numărul inversiunilor se mărește sau se micșorează cu un număr impar.

Pentru a demonstra această teoremă, considerăm întîi că efectuăm transpoziția a două elemente vecine. În acest caz, se păstrează inversiunile pe care

le aveau elementele precedente celor transpuse ca şi cele următoare. De asemeni, se păstrează inversiunile pe care le aveau elementele transpuse însăşi cu cele următoare. Ceea ce se schimbă este situaţia relativă a celor două elemente transpuse: dacă ele prezentau o inversiune înainte, după transpunere nu o mai prezintă şi reciproc.

Să considerăm acum cazul general: între cele două elemente transpuse sînt m elemente. Mutăm primul element al transpoziţiei pînă ajunge după cel de al doilea, prin $m + 1$ transpoziţii de elemente vecine. Apoi mutăm al doilea element al transpoziţiei pînă ajunge în locul ce fusese ocupat de primul, prin m transpoziţii de elemente vecine. În total am făcut $m + 1 + m = 2m + 1$ transpoziţii de elemente vecine. Deoarece fiecare din aceste transpoziţii schimbă numărul inversiunilor cu o unitate (cum am arătat în prima parte a demonstraţiei) rezultă că în total, numărul inversiunilor s-a schimbat cu un număr impar.

Din această teoremă rezultă o consecinţă importantă: *numărul substituţiilor pare de n elemente este egal cu numărul substituţiilor impare de n elemente.*

Să notăm cu p numărul substituţiilor pare şi cu i numărul substituţiilor impare. Efectuînd în toate aceste $p + i = n!$ substituţii o aceiaşi transpoziţie, obţinem p substituţii impare şi i substituţii pare, pe baza teoremei precedente. Cum substituţiile au rămas în totalitate aceleaşi, rezultă că $p = i$.

Cu această introducere despre transpoziţii şi paritatea substituţiilor putem răspunde la întrebarea pusă mai înainte:

Ştiind că o substituţie se poate descompune în diferite produse de transpoziţii, există vre-o relaţie între numerele transpoziţiilor care intră în aceste produse?

Dacă o substituţie se prezintă ca un produs de h *şi de* k *transpoziţii*, h *şi* k *sînt de aceiaşi paritate* (adică sînt ambele pare sau ambele impare).

În adevăr, pe baza teoremei precedente, fiecare transpoziţie producînd un număr impar $(2n + 1)$ de inversiuni, cele h transpoziţii ale primei descompuneri vor produce $h(2n + 1) = 2N + h$ inversiuni, iar cele k transpoziţii ale descompunerii celeilalte vor produce $k(2n + 1) = 2N' + k$ inversiuni. Aceste numere sînt însă egale, ele reprezentînd numărul de inversiuni al substituţiei date:

$$2N + h = 2N' + k$$

de unde

$$h - k = 2(N' - N)$$

adică h şi k diferă printr-un număr par, sînt deci de aceiaşi paritate.

În exemplul dat după teorema că orice substituţie se poate descompune într-un produs de transpoziţii, substituţia este descompusă în 5, 7 sau 11 transpoziţii, adică într-un număr impar de transpoziţii.

27. Pe baza teoremei demonstrate acum şi a observaţiei că o transpoziţie este o substituţie impară, rezultă îndată că *orice substituţie pară este produsul unui număr par de transpoziţii şi orice substituţie impară este produsul unui număr impar de transpoziţii.*

Cititorul poate verifica uşor această afirmaţie pe exemplele din paginile precedente, descompunîndu-le pe toate în produse de transpoziţii socotind totodată numărul inversiunilor.

Deoarece substituția identică E este o substituție pară și produsul a două substituții inverse $PP^{-1} = E$, rezultă îndată că *inversa unei substituții are aceeiași paritate cu substituția dată.*

De exemplu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) = (1\ 3)\ (1\ 2) \text{ și}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) = (1\ 2)\ (1\ 3)$$

sînt substituții pare; iar

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4\ 5) = (1\ 2)\ (1\ 4)\ (1\ 5)$$

$$\text{și } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4\ 2) = (1\ 5)\ (1\ 4)\ (1\ 2)$$

sînt substituții impare.

Din considerațiile anterioare rezultă că toate substituțiile pare de n elemente formează un subgrup de indice doi al grupului simetric, numit *grupul altern de n elemente* (A_n) cuprinzînd $\frac{n!}{2}$ substituții. Cititorul va verifica lesne că sînt îndeplinite condițiile din § 10 sau teorema din § 17.

28. Putem demonstra acum teorema care arată importanța grupurilor de substituții pentru teoria generală a grupurilor:

Orice grup poate fi reprezentat ca un grup de substituții cu ajutorul permutărilor exercitate asupra elementelor grupului. Sau într-o altă formulare:

Orice grup de ordin n este isomorf cu un grup de substituții de n elemente (subgrup al grupului simetric).

Să notăm elementele grupului cu $E, A, B, C, \ldots$ iar cu U oricare dintre ele. Să punem în corespondență acest element cu substituția

$$\begin{pmatrix} E & A & B & C & \ldots \\ EU & AU & BU & CU & \ldots \end{pmatrix}$$

Este evident că substituția

$$\begin{pmatrix} S & AS & BS & CS & \ldots \\ SU & ASU & BSU & CSU & \ldots \end{pmatrix}$$

(unde S este un element al grupului) este identică celei precedente, deoarece ea duce de la un element al grupului, la produsul la dreapta al acestuia cu U. Diferența față de substituția precedentă, constă doar în ordinea în care sînt scrise elementele.

În mod asemănător, punem în corespondență cu elementul V substituția $\begin{pmatrix} E & A & B & C & \ldots \\ V & AV & BV & CV & \ldots \end{pmatrix}$ iar cu elementul UV al grupului, substituția

$$\begin{pmatrix} E & A & B & C & \ldots \\ UV & AUV & BUV & CUV & \ldots \end{pmatrix}$$

Deoarece în baza observaţiei de mai sus, avem identitatea

$$\begin{pmatrix} E & A & B & C \dots \\ V & AV & BV & CV \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & AU & BU & \dots \\ UV & AUV & BUV & \dots \end{pmatrix}$$

putem scrie

$$\begin{pmatrix} E & A & B & C \dots \\ U & AU & BU & CU \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & A & B & C \dots \\ V & AV & BV & CV \dots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} E & A & B & C \dots \\ U & AU & BU & CU \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U & AU & BU & CU \dots \\ UV & AUV & BUV & CUV \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E & A & B & C \dots \\ UV & AUV & BUV & CUV \dots \end{pmatrix}$$

ceea ce arată că produsul substituţiilor corespunzătoare elementelelor U şi V este substituţia corespunzătoare elementului UV.

Cele n substituţii, corespunzătoare elementelor grupului dat, aparţin grupului simetric de n elemente. Am dovedit că produsul a două din aceste substituţii este una din aceste substituţii. Pe baza teoremei din § 17 (o mulţime H de elemente ale unui grup finit formează un grup dacă produsul a două oricare elemente din H aparţine lui H), am demonstrat că substituţiile construite mai sus formează grup. Isomorfismul cu grupul dat se constată din corespondenţa biunivocă stabilită şi din rezultatul obţinut după înmulţirea substituţiilor.

Ca exemplificare a acestei teoreme să luăm grupurile de ordin patru (ex. 4°, § 16). Grupul ciclic de ordin patru are ca elemente: E, A, A^2, A^3. Acestea pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu următoarele substituţii de patru elemente:

$$E \text{ cu } \begin{pmatrix} E & A & A^2 & A^3 \\ E & A & A^2 & A^3 \end{pmatrix} = (E); \qquad A \text{ cu } \begin{pmatrix} E & A & A^2 & A^3 \\ A & A^2 & A^3 & E \end{pmatrix} = (E\,A\,A^2\,A^3);$$

$$A^2 \text{cu} \begin{pmatrix} E & A & A^2 & A^3 \\ A^2 & A^3 & E & A \end{pmatrix} = (EA^2)\,(AA^3); \; A^3 \text{cu} \begin{pmatrix} E & A & A^2 & A^3 \\ A^3 & E & A & A^2 \end{pmatrix} = (E\,A^3\,A^2\,A).$$

Se poate uşor verifica isomorfismul grupului ciclic de ordinul patru cu grupul substituţiilor: (E), $(E\,A\,A^2\,A^3)$, $(E\,A^2)\,(A\,A^3)$ $(E\,A^3\,A^2\,A)$.

Grupul de ordin patru, **neciclic** are ca elemente: E, A, B şi AB $(= C)$. Acestea pot fi puse în **corespondenţă** biunivocă cu următoarele substituţii de patru elemente:

$$E \dots \begin{pmatrix} E & A & B & AB \\ E & A & B & AB \end{pmatrix} = (E); \quad A \dots \begin{pmatrix} E & A & B & AB \\ A & E & AB & B \end{pmatrix} = (EA \quad (B\,AB)$$

$$B \dots \begin{pmatrix} E & A & B & AB \\ B & AB & E & A \end{pmatrix} = (EB)\,(A\,AB);$$

$$AB \dots \begin{pmatrix} E & A & B & AB \\ AB & B & A & E \end{pmatrix} = (E\,AB)\,(A\,B).$$

Rămîne ca cititorul să verifice isomorfismul grupului de ordin patru avînd ca elemente E, A, B, AB, cu grupul de substituţii: (E), $(E\ A)(B\ AB)$, $(E\ B)\ (A\ AB)$, $(E\ AB)\ (A\ B)$.

29. Să revenim la studiul grupurilor oarecari şi să introducem noţiunea de *elemente conjugate* şi cea de *clasă de elemente conjugate.*

A şi B *fiind elemente ale unui grup* G, B *se numeşte conjugatul lui* A *dacă există în* G *un element* U, *astfel încît să putem avea* $B = U^{-1}AU$.

Faptul că două elemente ale unui grup sînt conjugate se bucură de proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate şi anume:

Reflexivitate: fiecare element este conjugat cu el însuşi, deoarece, E fiind elementul identic, avem: $A = E^{-1}AE$;

Simetrie: Dacă B este conjugatul lui A (faţă de U) şi A este conjugatul lui B (faţă de $U^{-1} = V$) căci din $B = U^{-1}AU$, prin înmulţirea cu U^{-1} la dreapta şi cu U la stînga, rezultă

$$A = UBU^{-1} = V^{-1}BV.$$

Tranzitivitate: dacă A este conjugat cu B, iar B este conjugat cu C atunci şi A este conjugat cu C. În adevăr, din ipoteză şi din proprietatea de simetrie rezultă: $B = U_1^{-1}AU_1$ şi $B = U_2^{-1}CU_2$ (U_1 şi U_2 fiind două elemente din G). Egalînd membrii doi ai egalităţilor de mai sus, rezultă

$$U_1^{-1}AU_1 = U_2^{-1}CU_2$$

sau, înmulţind la dreapta cu U_1^{-1} şi la stînga cu U_1

$$A = U_1U_2^{-1}CU_2U_1^{-1} = (U_2U_1^{-1})^{-1} \cdot C \cdot U_2U_1^{-1} = W^{-1}CW$$

unde $W = U_2U_1^{-1}$ este de asemeni element din G iar $W^{-1} = (U_2U_1^{-1})^{-1} = U_1U_2^{-1}$ (după cum s-a arătat în § 12).

În cazul că avem un grup de substituţii, elementul B conjugatul lui A faţă de U se calculează astfel. Notăm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{pmatrix} \ (\S\ 23).$$

Cu aceste notaţii putem calcula:

$$B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

adică conjugatul lui A faţă de U se obţine efectuînd substituţia U în ambele rînduri ale substituţiei A.

Folosind acest rezultat, cititorul poate dovedi proprietăţile precedente pentru un grup de substituţii şi deci, pentru orice grup (§ 28).

Toate elementele unui grup, conjugate între ele, formează o clasă de elemente conjugate.

Această noţiune de clasă de elemente conjugate este diferită de noţiunea de clasă la stînga (sau la dreapta) a unui subgrup H, într-un grup, intro-

dusă la § 19. Acele clase aveau toate același număr de elemente (cît conține și H). Clasele de elemente conjugate au un număr diferit de elemente distincte, cum se va arăta mai jos.

În baza proprietăților stabilite, rezultă că o clasă de elemente conjugate este determinată de unul din elementele sale. Dîndu-se un element A, clasa elementelor conjugate cu A se obține prin relația $U^{-1}AU$, în care U devine pe rînd fiecare element din G.

Clasa elementelor conjugate cu E este formată doar din E, deoarece $U^{-1}EU = E$, oricare ar fi U în G.

Dacă elementul A este de ordin p, adică $A^p = E$ (p fiind cel mai mic întreg pozitiv cu această proprietate, § 14), un conjugat al lui A are același ordin:

$$(U^{-1}AU)^p = U^{-1}AU \cdot U^{-1}AU \cdot U^{-1}AU \ldots U^{-1}AU) =$$
$$= U^{-1}A^pU = U^{-1}EU = E$$

(ținînd seama de proprietatea de asociativitate în G și de relația $UU^{-1} = E$). Am arătat astfel că, într-o clasă de elemente conjugate, toate elementele au același ordin.

Într-un grup comutativ, conjugatul oricărui element este doar el însuși $U^{-1}AU = AU^{-1}U = A$ și, deci, fiecare clasă de elemente conjugate este formată din cîte un singur element. Cititorul poate verifica aceasta pe exemplul grupurilor dela § 2—5 sau pe exemplele 3°, 4°, 5° din § 16.

Să găsim clasele de elemente conjugate pe exemplul din § 6, dat prin tabela de grup (7), care reprezintă un grup necomutativ, de ordin șase.

Clasa de elemente conjugate cu R_0 este formată din R_0. Clasa de elemente conjugate cu R_1 este formată din R_1 și R_2, cum se verifică ușor calculînd toate conjugatele cu R_1 față de elementele grupului. Ambele elemente R_1 și R_2 au ordinul trei.

Clasa de elemente conjugate cu L este formată din L, M, N ceea ce cititorul poate verifica îndată. Aceste trei elemente au fiecare ordinul doi.

30. Noțiunea de elemente conjugate permite introducerea noțiunii de *subgrupuri conjugate.*

Într-un grup G, H este un **subgrup**. Dacă A este un element al lui G, notăm prin $A^{-1}HA$ totalitatea elementelor conjugate fiecărui element din H, față de A, deci în același număr cu elementele lui H.

Să demonstrăm că *elementele notate prin* $A^{-1}HA$ *formează și ele un subgrup.* Va trebui să verificăm condițiile prevăzute în § 17.

Dacă U_1 și U_2 sînt două elemente din H **atunci** și U_1U_2 este un element din H și deci, $A^{-1}U_1A \cdot A^{-1}U_2A = A^{-1}U_1U_2A$, adică produsul a două elemente din $A^{-1}HA$ este cuprins în $A^{-1}HA$; inversul unui element din $A^{-1}HA$ este de asemenea cuprins în $A^{-1}HA$, căci $(A^{-1}U_1A)^{-1} = A^{-1}U_1^{-1}A$ iar U_1^{-1} aparține lui H. Deci, afirmația a fost dovedită.

Se poate ușor dovedi că subgrupurile H și $A^{-1}HA$ sînt isomorfe, folosind rezultatele scrise mai sus și stabilind corespondența $U_1 \longleftrightarrow A^{-1}U_1A$.

Subgrupul $A^{-1}HA$ se numește *transformatul* lui H prin A.

Două subgrupuri ale aceluiași grup G se numesc subgrupuri conjugate dacă unul este transformatul celuilalt.

Din definiție și din rezultatele de mai sus, se pot trage și următoarele *consecințe*:

a) dacă G este un grup comutativ, subgrupul $A^{-1}HA$ coincide cu subgrupul H;

b) dacă A este un element din H, subgrupul $A^{-1}HA$ coincide cu H;

c) dacă subgrupul H este transformatul unui subgrup K prin A, subgrupul K este transformatul lui H prin A^{-1};

d) subgrupurile conjugate între ele sînt isomorfe;

e) toate subgrupurile unui G se grupează în clase de subgrupuri conjugate.

Să exemplificăm concluziile de mai sus pe grupul necomutativ de ordin șase de la § 6, cu tabela de grup (7). Acest grup are următoarele subgrupuri:

S_1 format din elementul R_0;

S_2' format din elementele R_0, L; S_2'' din R_0, M; S_2''' din R_0, N;

S_3 format din elementele R_0, R_1. R_2;

S_6 format din elementele R_0, R_1, R_2, L, M, N.

Acestea se grupează în următoarele clase de subgrupuri conjugate: $I \ldots S_1$; $II \ldots S_2', S_2'', S_2'''$; $III \ldots S_3$; $IV \ldots S_6$ (S_1 și S_6 sînt subgrupuri improprii).

ASPECTUL ELECTRONIC AL FENOMENELOR ELECTRICE PRINCIPALE

N. STĂNESCU

Conf. univ.

ESTE greu să ne închipuim astăzi, cum s-ar înfățișa viața noastră zilnică fără energia curentului electric. Datorită faptului că energia electrică se obține ușor, fie prin arderea combustibililor inferiori, fie prin transformarea energiei mecanice a căderilor de apă naturale sau create prin bararea rîurilor, datorită faptului că energia electrică poate fi transportată cu ușurință la mari distanțe, precum și datorită faptului că această energie poate fi utilizată în cantități mari pentru mașini grele, dar și în cantități neînsemnate pentru mașini minuscule, energia curentului electric stă la baza tehnicii moderne. Cercetările științifice au arătat că toate manifestările electricității se datoresc celor mai variate forme de mișcare ale electronului. Vom încerca de aceea, să arătăm cîteva aspecte ale comportării electronilor în cazul unor fenomene electrice mai importante.

În metale există electroni «liberi»

Într-un articol apărut în nr. 7 din 1953 al «Revistei Matematice și Fizice», s-a analizat structura metalelor și s-a arătat cum se comportă electronii în atomii care formează rețeaua cristalină a metalelor. În microcristalele ce alcătuiesc metalul, atomii se află la distanțe așa de mici unul față de altul, încît nivelele electronice de la periferia atomilor se întrepătrund unul cu altul. În aceste condiții electronul de valență e_1 sau e_2, care se rotește în jurul nucleului de care este legat prin forțe atractive, atunci cînd atomii

A şi B se află la distanţe mai mari (fig. 1 *a*), poate ajunge la poziţia C (fig. 1 *b*), unde este egal acţionat de cele 2 nuclee vecine A şi B. De aceea, electronul de valenţă nu mai este legat de un anumit atom, ci se află sub acţiunea tuturor nucleelor atomilor vecini. Acest electron se poate mişca prin tot metalul, de la un ion la altul, ca şi cum ar fi « liber ». Prin urmare într-un metal electronii de valenţă se vor mişca dezordonat printre ionii reţelei cristaline ca şi moleculele unui gaz închis într-un vas. Amintim că mişcarea unei mari mulţimi de microparticule — molecule, atomi sau electroni — se spune că este dezordonată, înţelegînd prin aceasta faptul că ele nu au o direcţie *comună* de mişcare. Rezultanta vitezelor tuturor particulelor la un moment dat este nulă. Considerată ca un tot această mulţime de microparticule nu posedă o deplasare mecanică de ansamblu, ci este în echilibru statistic. În felul acesta, un metal poate fi considerat ca un ansamblu format din ionii reţelei cristaline şi din « gazul electronic » care populează spaţiile dintre ioni, împrăştiindu-se uniform în tot volumul metalului. Se deduce că într-un cm^3 de metal se găsesc circa 10^{22} electroni liberi care au viteza medie de circa 100 km/s, ceea ce ar corespunde unei temperaturi de 20.000°K ! Adică, energia medie a unui electron din gazul electronic ar corespunde energiei pe care ar avea-o o moleculă de gaz obişnuit abia la 20 000°K. Se vede prin urmare, că mişcarea dezordonată a electronilor din metale nu este în totul asemănătoare mişcării unui gaz. De aceea concepţia unui gaz electronic este numai o primă aproximaţie a teoriei electronice a metalelor, suficientă să explice fenomenele de conductibilitate electrică şi termică a metalelor. Pentru a obţine rezultate riguros valabile şi necontradictorii în interpretarea electronică a fenomenelor, mişcarea electronilor trebuie tratată pe baza mecanicii cuantice. Pe cînd moleculele gazului se mişcă liber, fără a avea interacţiuni între ele în afara ciocnirilor lor, electronii se mişcă în cîmpurile create de nucleele ionilor din reţeaua cristalină. Ei nu sînt deci, complet liberi. Afară de aceasta ei sînt supuşi aşa numitului principiu de excluziune, care spune că nu pot exista doi electroni în stări absolut identice de mişcare. De aceea, calculele statistice clasice aplicate mişcărilor moleculare nu pot fi aplicate şi electronilor decît în primă aproximaţie a « gazului electronic »; lor li se aplică statistica bazată

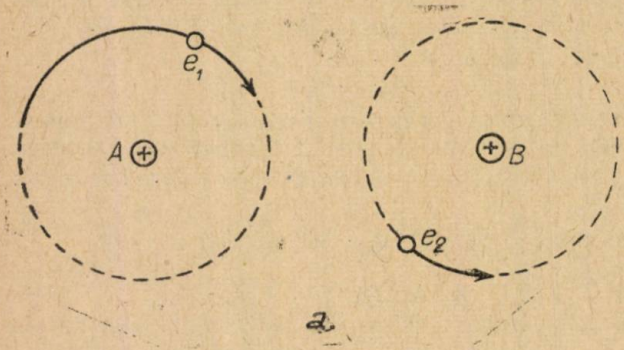


Fig. 1 *a*

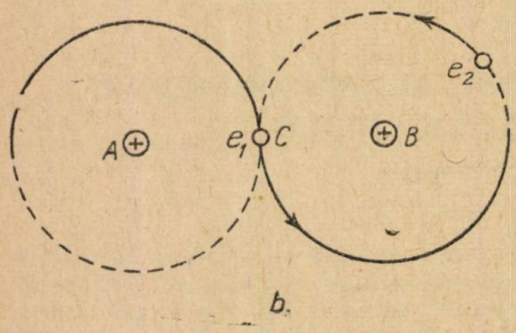


Fig. 1 *b*

pe legile cuantice şi principiul excluziunii. În cele ce urmează vom vorbi despre electronii metalului, înţelegînd prin aceasta, aşa numiţii «electroni liberi».

În lumina concepţiilor electronice, un corp electrizat pozitiv este un corp care a pierdut o parte din electroni, încît sarcinile pozitive ale ionilor care

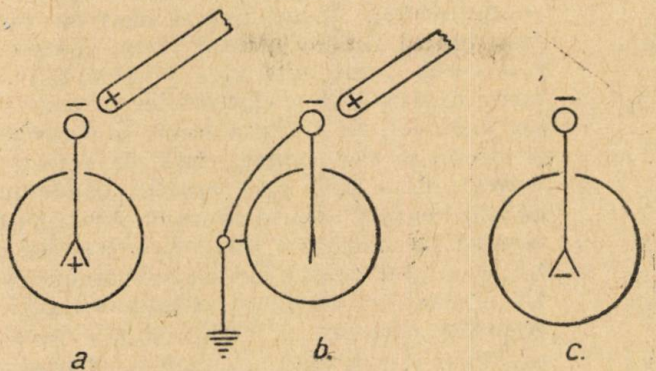


Fig. 2*a*, *b*, *c*

n-au fost neutralizate dau caracterul de electrizare pozitivă. De asemenea, un exces de electroni pe un corp îl încarcă cu electricitate negativă. Să analizăm succint, fenomenul simplu de electrizare prin influenţă a unui electroscop. Bastonul încărcat pozitiv (fig. 2*a*) este apropiat de electroscopul neutru: electronii sînt atraşi spre sfera de sus, iar în foiţele electroscopului rămîne un exces de sarcini pozitive ce nu sînt neutralizate, şi de aceea foiţele se resping. Prin urmare, s-a produs o nouă repartizare, neuniformă, a electronilor datorită atracţiei dintre ei şi bastonul pozitiv. Punînd tija electroscopului în contact cu pămîntul (*b*), vin din pămînt electronii necesari neutralizării sarcinilor pozitive din foiţe şi acestea nu se mai resping fiind neutre. Dacă se întrerupe contactul cu pămîntul şi apoi se îndepărtează bastonul pozitiv (*c*), electronii se răspîndesc iarăşi uniform; electroscopul nu mai este acum neutru, deoarece conţine un exces de electroni provocat de electronii veniţi din pămînt în faza (*b*) a experienţei. Aşa dar, electrizările de un fel sau altul sînt produse de deplasările electronilor, adică a sarcinilor negative, nu a celor pozitive.

Ce este curentul electric?

Toţi ştim că un curent electric constă în «curgerea» sarcinilor electrice prin conductori. Sensul curentului a fost stabilit convenţional, ca fiind sensul în care se deplasează o sarcină pozitivă de-a lungul liniilor cîmpului electric, de la polul pozitiv spre cel negativ. Dar am văzut că de fapt se mişcă electronii, care sînt sarcini elementare negative, deci sensul real al curentului este sensul deplasării electronilor, de la polul negativ spre cel pozitiv, tocmai invers celui stabilit de tehnica curentului electric. În general, ne închipuim că un curent electric constă în curgerea electronilor prin sîrme cum curge apa printr-o conductă, dar cu o viteză uriaşă. Această imagine nu corespunde realităţii.

Într-un conductor electronii sînt în mişcare dezordonată cu o viteză mijlocie $\bar{v}$: prin conductor nu trece curent electric, deoarece nu există mişcare dirijată a electronilor de-a lungul conductorului (fig. 3 *a*). Pentru ca electronii să capete o deplasare comună de-a lungul conductorului ar trebui să existe un cîmp electric E, creat de o tensiune electrică U aplicată la capetele conductorului. Atunci fiecare electron va fi acţionat de-a lungul liniilor acestui cîmp electric cu o forţă $f = -eE$, îndreptată spre polul pozitiv. Peste mişcarea dezordonată a electronilor se suprapune mişcarea *ordonată*, cu o viteză medie $\bar{u}$. Consideraţi global, electronii se vor deplasa faţă de reţeaua cristalină, îndreptîndu-se toţi spre capătul conductorului legat de polul pozitiv al generatorului. Apare astfel o *direcţie comună* de mişcare a tuturor electronilor din conductor, cu o viteză medie $\bar{u}$, care se compune cu $\bar{v}$ (fig. 3 *b*). Un electron cu sarcina e ar avea viteza $\bar{v}$ în absenţa cîmpului exterior E. Sub acţiunea acestui cîmp va căpăta o viteză medie $\bar{u}$, încît electronul se va mişca după rezultanta acestor viteze desenată plin pe fig. 3 *b*. Prin urmare, în forfota lor dezordonată, electronii se deplasează treptat după o direcţie rezultantă a celor doi vectori $\bar{v}$ şi $\bar{u}$. Între electronii şi ionii reţelei se produc neînchipuit de multe ciocniri, încît direcţia de mişcare a fiecărui electron variază în fiecare moment.

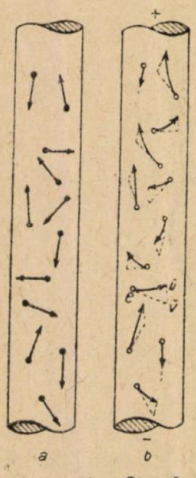


Fig. 3 *a, b*

Numai rezultanta globală a mişcării lor este o deplasare lentă într-o direcţie comună. Între două ciocniri consecutive electronul parcurge o distanţă medie de circa 10^{-6} cm, numită drum liber mijlociu $\bar{\lambda}$. Ţinînd seamă că $\bar{v} \cong 100$ km/s, un electron va suferi într-o secundă $z = \frac{v}{\lambda} = \frac{10^7}{10^{-6}} = 10^{13}$ ciocniri, adică zece mii de miliarde ciocniri pe secundă şi tot atîtea schimbări de viteză şi energie ! Prin ciocnire atomul transmite reţelei cristaline, deci metalului, aproape toată energia cinetică pe care a primit-o de la cîmpul electric care l-a accelerat; apoi, este iar accelerat de forţa f a cîmpului electric de-a lungul distanţei λ, pînă ce capătă viteza $\bar{u}_1 = \gamma\tau$, unde $\gamma = \frac{f}{m} = \frac{eE}{m}$ este acceleraţia electronului, iar $\tau = \frac{\lambda}{v}$ este timpul scurs între două ciocniri consecutive. Viteza medie dirijată a electronului va fi deci $\bar{u} = \frac{0 + \bar{u}_1}{2} = \frac{\bar{u}_1}{2}$. Energia cinetică medie a unui electron în momentul imediat anterior ciocnirii cu un ion şi pe care o transmite acestuia prin ciocnire va fi $\bar{w} = \frac{1}{2} m\bar{u}_1^2 = 2m\bar{u}^2$; imediat după ciocnire electronul are viteză dirijată nulă, apoi este iar accelerat pînă la viteza $\bar{u}_1$, primind de la cîmpul electric energia W pe care o transmite reţelei cristaline prin ciocnire, etc. Cu alte cuvinte, electronul este un fel de vehicul care primeşte energie de la cîmpul electric exterior şi o transmite reţelei cristaline prin ciocniri, în care timp el se deplasează sacadat şi mereu în direcţia liniilor cîmpului electric. Curentul electric într-un conductor este

deci un proces de dezechilibru în repartiția statistic uniformă a electronilor din conductor. Energia necesară pentru a pune electronii în mișcare ordonată de-a lungul conductorului este energia cîmpului electric exterior. Ea este furnizată de către generatorul electric care produce și menține tensiunea electromotoare U, care generează cîmpul electric E. Electronii transmit această energie metalului prin ciocnirile cu ionii rețelei cristaline, iar aceștia își sporesc amplitudinea de oscilație în jurul pozițiilor lor de echilibru, adică metalul se încălzește prin fenomenul Joule-Lenz. Numeroasele ciocniri ale electronilor cu ionii metalului produc un fel de frînare a mișcării electronilor, care reprezintă rezistența R a circuitului la trecerea curentului electric. Intensitatea curentului electric I este tocmai sarcina care trece printr-o secțiune s în timp de o secundă $I = \frac{q}{t}$. Aceasta este dată tocmai de numărul de electroni care străbat acea secțiune într-o secundă, adică:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{n_0 esl}{t} = \frac{n_0 es\bar{u}t}{t}$$

de unde:

$$I = n_0 e\bar{u}s \text{ amperi}$$

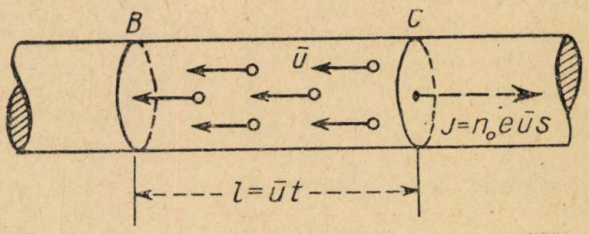


Fig. 4

unde n_0 este numărul de electroni cuprinși în unitatea de volum a metalului din care-i făcut circuitul. Introducînd în expresia lui I valoarea lui $\bar{u}$, obținem succesiv:

$$I = n_0 es\frac{\bar{u}_1}{2} = \frac{1}{2}n_0 es\gamma\tau = \frac{1}{2}n_0 es\frac{eE}{m}\cdot\frac{\bar{\lambda}}{v} = \frac{1}{2}\frac{n_0 e^2\lambda s}{mv}E.$$

Dar cîmpul E, creat de tensiunea U, aplicată la capetele unui fir de lungime l (fig. 4) este $E = \frac{U}{l}$, deci

$$I = \frac{1}{2}\frac{n_0 e^2\lambda su}{m\cdot v\cdot l}.$$

Notăm:

$$\rho = \frac{2mv}{n_0 e^2\lambda}$$

o constantă care depinde de constantele fizice universale m și e precum și de constantele v, n_0, specifice metalului. Atunci obținem:

$$I = \frac{sU}{\rho l} = \frac{U}{\rho\frac{l}{s}} = \frac{U}{R}$$

tocmai legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit, în care ρ este rezistivitatea metalului. Prin raționament s-a ajuns la legea lui Ohm, legea macroscopică de bază a curentului electric; aceste raționamente sprijinite pe concepția electronică a metalelor constituie o confirmare a acestei legi, cel puțin în primă aproximație.

Pe aceeaşi cale se poate găsi şi legea Joule-Lenz. În adevăr energia calorică w dezvoltată într-o secundă pe unitatea de volum a conductorului va fi egală cu energia cedată de cei n_0 electroni în cele $n_0 z$ ciocniri dintr-o secundă. Printr-o ciocnire, un electron cedează energia $\overline{w} = \frac{1}{2} m\overline{u}_1^2$, deci:

$$w = n_0 Z \overline{W} = n_0 \frac{v}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} m\gamma^2 \tau^2 = \frac{1}{2} n_0 \frac{v}{\lambda} m \frac{e^2 E^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda^2}{v^2} =$$

$$= \frac{n_0 e^2 \lambda}{2mv} E^2 = \frac{E^2}{\rho} = \frac{U^2}{\rho l^2}.$$

Puterea curentului va fi:

$$P = \frac{W}{t} = sl\,w = sl \frac{U^2}{\rho l^2} = \frac{U^2}{\rho \frac{l}{s}} = \frac{U^2}{R} = \frac{R^2 I^2}{R}$$

sau

$$P = RI^2$$

iar căldura dezvoltată va fi:

$$Q = \frac{Pt}{J} = \frac{1}{J} RI^2 t = 0{,}24\, RI^2 t$$

tocmai legea Joule-Lenz demonstrată electronic.

Ca să concretizăm cele de mai sus, să dăm un exemplu. Fie un bec de 100 w, avînd filament de wolfram cu diametrul de 0,05 mm, conectat la reţeaua de 110 V. În medie vor fi atîţia electroni liberi cîţi atomi se află în metal. Dar într-un cm³ de wolfram vor fi $n_0 = \frac{N}{V_0} = \rho \frac{N}{A}$ cm^{-3}, unde ρ este densitatea metalului, N este numărul lui Avogadro, iar A masa lui atomică. Deci, un cm³ de wolfram va conţine $n_0 = 19{,}1 \frac{6{,}06 \cdot 10^{23}}{184} = 6{,}2 \cdot 10^{22}$ electroni. Viteza medie dirijată $\overline{u}$ a acestor electroni care formează curentul electric ce trece prin filament, se deduce din:

$$\overline{u} = \frac{I}{n_0 es} = \frac{W}{U n_0 e \pi r^2}$$

în care înlocuim datele numerice:

$$\overline{u} = \frac{100}{110 \cdot 6{,}2 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}000625} \cong 4{,}5 \text{ cm/s}.$$

Aşa dar, printr-o secţiune a filamentului incandescent al acestui bec electric, trec 62 000 miliarde de miliarde electroni în fiecare secundă, cu viteza dirijată de numai 4,5 cm/s !

De ce se aprinde atunci becul chiar în momentul în care învîrtim întrerupătorul? Ceea ce numim noi de obicei, viteză a curentului electric nu este nici viteza medie $\overline{v}$ a mişcării dezordonate, care n-are efect macroscopic,

nici viteza medie $\bar{u}$ a mişcării ordonate a electronilor, ci viteza $c = 300\,000$ km/s cu care se propagă prin conductor liniile cîmpului electric produs de tensiunea reţelei oraşului, pe care o aplicăm becului prin învîrtirea întrerupătorului. Acest cîmp electric pune în mişcare dirijată electronii «liberi» din circuit. Faţă de $\bar{v} \cong 100$ km/s, viteza dirijată $\bar{u}$ este neglijabilă, fiind de circa $\frac{100\text{ km}}{1\text{ cm}} = 10^7$ ori mai mică, deci $\bar{u} \ll \bar{v}$. Dacă am figura vitezele dezordonate $\bar{v}$ ale electronilor într-un fir (fig. 3) atunci ele vor fi toate deviate spre polul pozitiv cu aceiaşi valoare $\bar{u}$, dacă firului i s-ar aplica o tensiune; va rezulta o deplasare de ansamblu a electronilor.

Ce este curentul alternativ?

Un curent alternativ îşi schimbă sensul de un anumit număr de ori pe secundă. Ce fel de mişcare au electronii din metal la «trecerea» unui asemenea curent electric? Deoarece peste mişcarea dezordonată cu viteza medie $\bar{v}$ se suprapune o deplasare dirijată cu viteza medie $\bar{u}$ spre capătul pozitiv al sîrmei, urmează că electronii se vor deplasa într-un sens în timpul primei jumătăţi de perioadă, apoi, se vor deplasa în sens opus în timpul celeilalte jumătăţi de perioadă. Prin urmare, curentul alternativ înseamnă de fapt, *mişcarea oscilatorie* a electronilor din metal suprapusă peste mişcarea lor dezordonată. Dacă în exemplul analizat în paragraful precedent, tensiunea unui curent industrial este alternativă, înseamnă că amplitudinea medie $\bar{a}$ de oscilaţie a unui electron va fi $\bar{a} = \bar{u}\frac{T}{2} = \frac{\bar{u}}{2\nu} = \frac{4{,}5}{2.50} = 0{,}045$ cm $= 0{,}45$ mm.

Energia cheltuită de uzină nu serveşte deci, la «pomparea» electronilor prin circuite pînă la noi, ci pentru a pune în oscilaţie electronii din fire, din filamentele becurilor, din electromotoare, din rezistenţele reşourilor, etc. Energia vine de la uzină prin cîmpul electric creat de tensiunea electrică.

Principalele deosebiri dintre curentul continuu şi cel alternativ se datoresc numai faptului că în cel dintîi electronii au o deplasare continuă în acelaşi sens, pe cînd în cel de-al doilea ei sînt în mişcare oscilatorie, adică, ating acceleraţii mari. Un exemplu: curentul continuu nu poate trece printr-un condensator; acesta echivalează cu o întrerupere de curent, deoarece electronii nu-şi pot continua mişcarea dirijată prin izolatorul dintre armăturile condensatorului. Curentul alternativ trece relativ uşor printr-un condensator, deoarece electronii oscilează fără a trebui să treacă prin izolatorul condensatorului. Prin izolator trec însă, cu uşurinţă liniile de forţă a cîmpului electric care este furnizor de energie electrică pentru oscilaţia electronilor.

Emisia electronilor din metale

În interiorul metalului, electronii sînt comuni adică aparţin metalului, nu unor anumiţi atomi. De aceea ei se repartizează uniform în metal şi se pot deplasa în toate punctele din interiorul metalului prin mişcare dezordonată. Îndată ce însă, un electron ar ajunge la suprafaţa metalului, pe care ar depăşi-o foarte puţin, apar forţe de atracţie între el şi ionii reţelei cristaline, încît energia lui potenţială ar creşte brusc la valori mari faţă de interiorul metalului. Pentru învingerea acestor forţe de atracţie ar fi necesare energii cinetice mari, pe care ar trebui să le primească electronul ca să poată

ieşi din metal. Forţele de atracţie readuc electronul în interiorul metalului. care se comportă ca o «groapă» de potenţial (fig. 5) de adîncime U_0 volţi, Se ia ca nivel zero de energie, energia unui electron în repaos aflat în afara metalului, de aceea energia potenţială U_0 în metal este considerată ca negativă. Suprafaţa metalului este ca o barieră de potenţial pentru electroni. Teoria cuantelor demonstrează şi experienţa confirmă, că electronii din metal nu sînt în repaus nici la temperatura de zero absolut. Ei au o energie cinetică chiar la această temperatură. Energia cinetică a fiecărui electron variază de la 0 la o valoare maximă ε_0, iar electronii ocupă cele mai joase nivele de energie numite nivele fundamentale. Această energie se numeşte energie de zero a gazului electronic. La temperaturi obişnuite ionii reţelii cristaline posedă energie termică, iar prin ciocnirile dintre electroni şi ionii reţelei, electronii vor primi şi ei energie cinetică peste valoarea maximă ε_0. O parte din electroni vor trece pe nivelele superioare de energie, adică vor trece în zona nivelelor de conductibilitate; ei se vor mişca liber în groapa de potenţial putînd asigura conductibilitatea electrică şi cea termică a metalului. Energia totală a unui electron este însă, mai mică decît energia corespunzătoare barierii de potenţial U_0 (fig. 5). De aceea electronii nu pot ieşi din metal fiind reflectaţi în interior de către forţele repulsive ale barierii de potenţial. Pentru ca electronii să poată ieşi din metal trebuie ca metalul să primească energie din exterior. Această energie se numeşte lucru mecanic de extragere sau de ieşire a electronului din metal. Ea este egală cu diferenţa $eU_0 - \varepsilon_0 = e\varphi_0$ unde φ_0 este potenţialul de extragere a electronului, adică potenţialul care ar asigura energia de extragere $eU_0 - \varepsilon_0$. Acest potenţial este de ordinul de mărime al cîtorva volţi. Pentru wolfram $\varphi_0 = 4{,}63$ V, pentru wolfram acoperit cu toriu $\varphi_0 = 2{,}63$ V, pentru platin $\varphi_0 = 5{,}32$ V, etc.

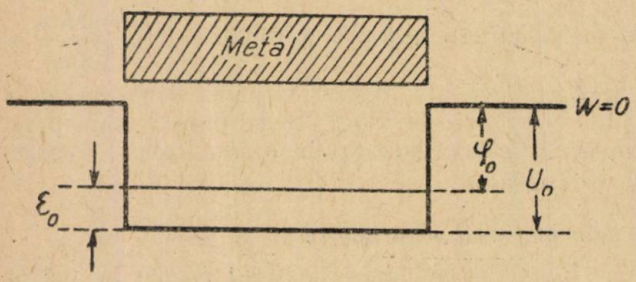


Fig. 5

Energia necesară ieşirii electronului poate fi primită din extreior de către metal în mai multe feluri.

a) Emisie termoelectronică. Prin încălzirea metalului creşte agitaţia termică a ionilor reţelei cristaline, iar prin ciocnirile cu electronii aceştia primesc o cantitate de energie care face să crească energia cinetică a mişcării lor dezordonate, care poate chiar depăşi energia corespunzătoare barierii de potenţial $\frac{mv^2}{2} \geqslant eU_0$. Atunci electronul respectiv iese din metal, iar fenomenul se numeşte *emisie termoelectronică.*

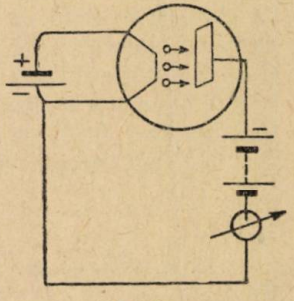


Fig. 6

Această metodă de scoatere a electronilor din metale formează cel mai important izvor de electroni liberi şi este folosită în tehnica tuburilor electronice (fig. 6), a tuburilor de raze Roentgen şi în general ca sursă de elec-

troni pentru scopuri de laborator. Detalii se pot găsi în R.M.F. nr. 8 din 1952.

b) *Bombardarea catodului cu ioni pozitivi.* Pentru a transmite electronilor energia necesară ieşirii lor dintr-un metal se bombardează metalul cu ioni pozitivi accelerați în prealabil de un cîmp electric. Pe această cale se produc razele catodice în cazul descărcărilor electrice.

c) *Emisia fotoelectronică.* Dacă pe suprafaţa metalului cade o radiaţie electromagnetică (infraroşie, vizibilă, ultravioletă sau Roentgen), metalul primeşte energia suplimentară necesară ieşirii electronilor prin bariera de potenţial. Fenomenul de emisie a electronilor de către un metal iluminat cu o radiaţie se numeşte *emisie fotoelectronică.* Pe baza fenomenului fotoelectronic s-au construit celulele fotoelectrice (fig. 7), numite fotoemisive, mult folosite în cinematografia sonoră, televiziune, automatizarea în tehnică, etc. S-a constatat că energia adusă de fotonii radiaţiei serveşte în parte $e\,\varphi_0 = h\,\nu_0$ pentru a extrage electronul din metal, iar restul este dusă de electron ca energie cinetică:

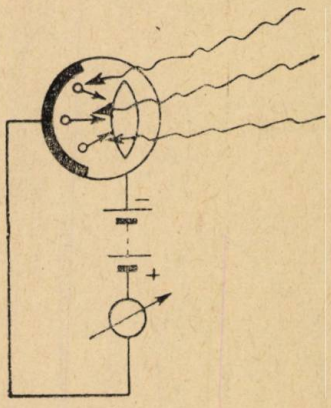


Fig. 7

$$h\,\nu = e\,\varphi_0 + \frac{mv^2}{2}$$

Fenomenul se produce numai dacă energia fotonului incident $h\nu \geqslant e\varphi_0 = h\,\nu_0$, adică dacă acesta este mai mare decît energia de extragere $e\,\varphi_0$, căreia îi corespunde pragul fotoelectric; fotonul incident să aibă deci, o cuantă de energie $h\,\nu > h\,\nu_0$, adică frecvenţa radiaţiei incidente $\nu > \nu_0$. Detalii se pot găsi în R.M.F. 9/1952.

d) Emisia secundară de electroni. Dacă pe suprafaţa unui metal loveşte un electron cu o anumită energie, din metal vor fi « smulşi » mai mulţi electroni numiţi electroni secundari. Pe baza acestui fenomen se construieşte multiplicatorul electronic.

Electronul în mişcare creează cîmp magnetic

Experienţa lui Oersted (1819) a arătat că în jurul unui curent electric se generează un cîmp magnetic ale cărui linii de forţă sînt circulare, concentrice pe circuit, iar sensul lor este dat de regula burghiului. Biot, Savart şi Laplace au dovedit că acest cîmp magnetic creat de o porţiune Δl de circuit, parcurs de o intensitate I de curent, într-un punct M, are intensitatea H dată de relaţia

$$H = \frac{I\,\Delta l \sin \alpha}{r^2} \qquad (2)$$

unde r este distanţa de la M la porţiunea de circuit, iar α este unghiul format de curent cu r (fig. 8 *a*). Teoria electronică a arătat şi experienţa a confirmat,

că un curent electric este un flux de electroni prin conductor. Experienţele fizicianului rus A. Einchenwald şi a fizicianului romîn, N. Vasilescu-Karpen, au dovedit că în adevăr, sarcinile electrice în mişcare generează cîmp magnetic. Fizicianul sovietic A. F. Joffe a arătat experimental că un flux de electroni, razele catodice, îşi înfăşoară traiectoria în ţesătura unui cîmp magnetic. Prin urmare, cîmpul magnetic produs de către porţiunea de circuit Δl este produs de însumarea cîmpurilor magnetice h produse de fiecare electron ce alcătuieşte curentul ce trece prin Δl adică $H = \Sigma h$

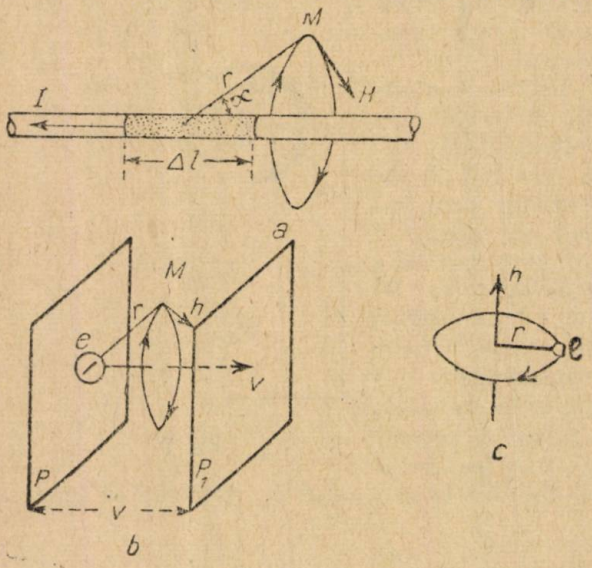


Fig. 8 *a*, *b*, *c*

Ne propunem să calculăm cîmpul magnetic h, produs de un electron ce se mişcă cu viteza v (fig. 8 *b*). Într-o secundă el va parcurge distanţa v dintre planele P şi P_1. Cîmpul în M, produs la un moment dat, fixat de poziţia din fig. 8 *b* va fi h, dat de relaţia (2) aplicată acestui caz. Din definiţia intensităţii urmează că într-o secundă prin secţiunea dată de planul P_1 va trece un electron, adică sarcina e. Prin urmare, $I\,\Delta l = e\,v$, iar ecuaţia (2) devine:

$$h = \frac{ev \sin \alpha}{r^2} \text{ oersted} \qquad (3)$$

adică un electron cu viteza $\bar{v}$ generează în jur un cîmp magnetic a cărui intensitate este h într-un punct M, aflat la distanţa r de electron. Deoarece r variază necontenit trecînd printr-un minim r_0 urmează că în M cîmpul creşte pe măsură ce electronul se apropie, devine maxim $h_0 = \frac{ev}{r_0^2}$ pentru r_0 minim şi apoi scade pe măsură ce electronul se depărtează. Acest cîmp magnetic variabil h, produce la rîndul său cîmp electric care se suprapune şi se compune cu cîmpul electric ce este antrenat de electron în mişcarea sa. Rezultă o shimbare de repartiţie a liniilor cîmpului electric, ce are ca urmare o creştere de masă a electronului, odată cu creşterea lui v.

S-a dovedit că masa m a electronului ce are o viteză v este dată de relaţia:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

unde m_0 este masa de repaus a electronului, adică masa pe care o are cînd $v \ll c$.

Cîmpul magnetic creat prin mişcarea electronilor din atomii substanţelor este cauza fenomenelor magnetice ale corpurilor. Un electron care se roteşte în jurul nucleului de ν ori într-o secundă (fig. 8 *c*) echivalează cu un curent electric de intensitate $I = \nu e$ şi deci, produce un cîmp magnetic de intensitate $h = \frac{2\pi\nu e}{r}$ oersted.

Deoarece într-un atom sînt mai mulţi electroni care se rotesc în jurul nucleului pe diferite orbite care nu se găsesc în acelaşi plan, cîmpul magnetic al atomului va fi rezultanta cîmpurilor magnetice ale fiecărui electron în parte. Se pot întîmpla două cazuri:

a) Această rezultantă să fie nulă. În acest caz, atomul nu posedă moment magnetic adică nu prezintă însuşiri magnetice în mod obişnuit; astfel de substanţă se numeşte *diamagnetică.*

b) Cîmpul magnetic rezultant al atomului nu este nul: în acest caz, atomul posedă moment magnetic. Atomii fiind în agitaţie dezordonată, momentul, magnetic total al substanţei se anulează, de aceea substanţa nu este magnetizată.

În mod obişnuit însă, atomii se pot orienta în acelaşi sens dacă se găsesc sub acţiunea unui cîmp magnetic exterior şi substanţa devine magnetică; astfel de substanţă se numeşte *paramagnetică.* Dar electronii au şi rotaţie în jurul axei lor proprii şi produc astfel efecte magnetice numite *de spin,* care au ca efect existenţa substanţelor *feromagnetice,* adică a magneţilor naturali şi permanenţi. Detalii asupra acestor fenomene s-au publicat în « Revista Matematică şi Fizică » nr. 7/950.

Ce este forţa Lorentz?

Dacă în mişcarea sa un electron intră într-un cîmp magnetic exterior se produce o interacţiune între cîmpul magnetic exterior şi cîmpul magnetic al electronului, ceea ce are ca urmare schimbarea direcţiei de mişcare a electronului. Cîmpul magnetic exterior exercită o forţă electromagnetică asupra electronului în mişcare. Această forţă se numeşte *forţa Lorentz* şi este îndreptată perpendicular pe planul format de direcţia cîmpului H şi viteza electronului v, formînd împreună un triedru (fig. 9). Mărimea acestei forţe se deduce din formula lui Ampere:

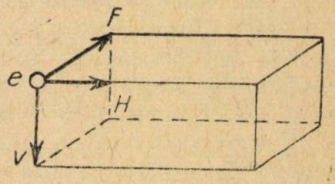


Fig. 9

$$F = HI \cdot \Delta l \sin \alpha \text{ dyne} \qquad (5)$$

care dă forţa electromagnetică F exercitată de un cîmp magnetic exterior H, asupra unei porţiuni Δl mobile de circuit parcursă de un curent I, care face unghiul α cu H (fig. 10 a). Am văzut că în cazul unui electron care se mişcă cu viteza v se poate considera echivalenţa $I \cdot \Delta l = ev$, deci forţa Lorentz f exercitată de H asupra lui e va fi:

$$f = He v \sin \alpha \text{ dyne} \qquad (6)$$

În această formulă sarcina electronului trebuie luată în unităţi CGSe.m; dacă se exprimă e în CGSe.s, iar H în oersted, atunci trebuie să se împartă

prin c pentru ca f să rămînă tot în dyne:

$$f = \frac{Hev}{c} \sin \alpha \text{ dyne.}$$

Valoarea forţei Lorentz este foarte mică. Un electron accelerat de $U = 10\,000$ V care intră transversal într-un cîmp magnetic omogen de 3 000 Oe este supus unei forţe Lorentz de

$$f = \frac{3000 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 5{,}92 \cdot 10^{9}}{3 \cdot 10^{10}} = 2{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ dyne}$$

deoarece $v = 5{,}92 \cdot 10^{7} \sqrt{10\,000} = 5{,}92 \cdot 10^{9}$ cm/s. Deoarece însă un curent electric constă din foarte mulţi electroni valoarea forţei electromagnetice devine mare. Din cauza ciocnirilor dintre electroni şi ionii reţelei cristaline a metalului, forţa electromagnetică rezultată din însumarea forţelor Lorentz pune în mişcare cadrele mobile ale instrumentelor de măsură electronice, pune în mişcare roţile electromotoarelor, etc. Constatăm aşa dar, că după cum maşinile termice sînt puse în mişcare de forţa născută din însumarea forţelor produse de ciocnirea moleculelor substanţei gazoase fierbinţi de pereţii mobili ai pistoanelor, tot aşa electromotoarele sînt puse în mişcare de forţa născută prin însumarea forţelor Lorentz pe care cîmpul magnetic exterior le exercită, asupra electronilor ce formează curentul electric în circuitul rotorului.

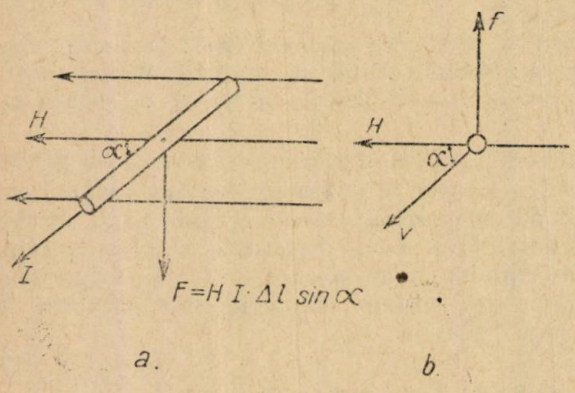


Fig. 10 *a, b*

De ce nu se mişcă un rotor aflat într-un cîmp magnetic exterior, dacă nu trece curent electric prin conductor, deoarece şi în acest caz electronii sînt în mişcare, adică asupra fiecăruia se exercită o forţă Lorentz? Mişcarea electronilor fiind dezordonată, forţele Lorentz au toate orientările posibile, deci dau o rezultantă macroscopică nulă: conductorul stă pe loc.

Tot această forţă lorenţiană este utilizată în dirijarea şi focalizarea fasciculelor de electroni în toate aplicaţiile opticii electronice, alături de acţiunea dirijată a cîmpurilor electrice asupra electronilor. Se construiesc astfel, osciloscraful catodic, microscopul electronic, tuburile electronice, etc. despre care se pot găsi detalii în «Revista Matematică şi Fizică» nr. 4 din 1952 şi nr. 10 din 1951.

Forţa Lorentz şi inducţia electromagnetică

Încă din clasa VII elementară se ştie că într-un conductor care se mişcă într-un cîmp magnetic exterior aşa ca să taie liniile de forţă ale acestuia se naşte o tensiune electromotoare indusă.

Care este cauza acestui fenomen numit inducţie electromagnetică?

Să considerăm un conductor AB (fig. 11) aflat într-un cîmp magnetic omogen H. Electronii din el se află în mişcare dezordonată şi sînt deci, uniform repartizaţi în acest conductor. Forţele Lorentz dau şi ele rezultantă nulă şi nu modifică repartiţia uniformă a electronilor din conductorul AB. Să dăm o translaţie cu viteza v, conductorului, pînă ajunge în poziţia A_1B_1.

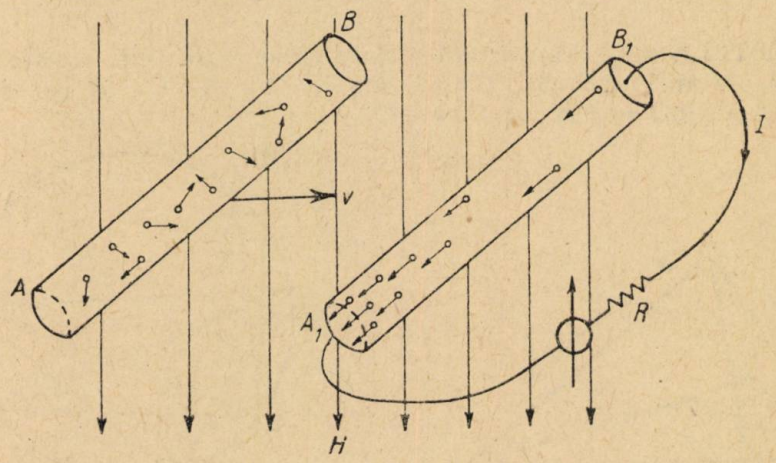


Fig. 11

În timpul translaţiei electronii descriu traiectorii paralele şi egale cu v, încît fiecare din ei este un electron în mişcare într-un cîmp magnetic H. Asupra fiecăruia se va exercita o forţă Lorentz suplimentară, dirijată spre capătul A al conductorului conform regulei din fig. 9. Prin urmare, *în timpul* translaţiei electronii vor fi îngrămădiţi spre capătul A care se va încărca negativ, pe cînd capătul B al conductorului se va încărca pozitiv. Între capetele A şi B ale conductorului se va produce o tensiune electrică de inducţie. Dacă unim cele 2 capete A şi B printr-un fir cu rezistenţa R, prin acest fir va curge un curent electric indus I, generat de tensiunea indusă, care acţionează ca o tensiune electromotoare prin care energia mecanică cheltuită pentru deplasarea conductorului se transformă în energie electrică. Dacă conductorul $AÉ$ se opreşte în poziţia A_1B_1 mişcarea de translaţie v a electronilor încetează, forţele Lorentz suplimentare şi ordonate se anulează, electronii se redistribuie uniform şi tensiunea electromotoare de inducţie, dispare. Prin urmare, inducţia electromagnetică se produce în timpul în care cîmpul magnetic este tăiat de conductor.

În « Gazeta Matematică şi Fizică » seria B nr. 6 din 1954 s-a arătat cum mişcarea oscilatorie a unei sarcini electrice este punctul de plecare al unui cîmp electromagnetic care se propagă în spaţiu cu viteza luminii: sînt undele electromagnetice.

Aşadar, toată varietatea fenomenelor electrice, magnetice şi optice au la bază diferite aspecte ale mişcării electronilor.

CERCURI ADJUNCTE

GH. DOBROTESCU,

Profesor Predeal

DREPTELE duse prin vîrfurile triunghiului ABC sub acelaşi unghi α faţă de laturile AB, BC, CA se taie în A', B', C'. Să se arate că $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

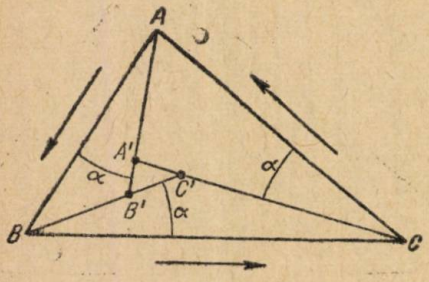


Fig. 1

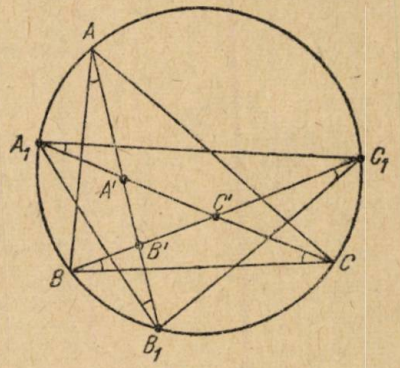


Fig. 2

Urmărind fig. 1, observăm că din triunghiul ABB' putem deduce egalitatea unghiurilor:

$$\sphericalangle B' = \hat{\alpha} + \hat{B} - \hat{\alpha};\ \sphericalangle B' = \sphericalangle B;\ \text{Analog } \sphericalangle A' = \sphericalangle A;\ \sphericalangle C' = \sphericalangle C.$$

Se consideră arcele egale $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{BB_1}$, $\overset{\frown}{CC_1}$ în sensul dela A la B la C.

Din fig. 2, avem: $2\hat{B'} = \overset{\frown}{BB_1} + \overset{\frown}{AC_1} = \overset{\frown}{CC_1} + \overset{\frown}{AC_1} = 2\hat{B}$, deci,

$$\hat{B'} = \hat{B},\ \hat{A'} = \hat{A},\ \hat{C'} = \hat{C}.$$

Deoarece $\overset{\frown}{BB_1} = \overset{\frown}{CC_1}$. figura BC_1CB_1 este un trapez isoscel şi $\overline{B_1C_1} = \overline{BC}$. La fel, din trapezele isoscele AC_1CA_1 şi BA_1AB_1, găsim: $\overline{A_1C_1} = \overline{AC}$ şi $\overline{B_1A_1} = \overline{AB}$, deci triunghiurile sînt egale.

Să construim cele trei drepte sub acelaşi unghi α în sensul contrar (fig. 3).

Triunghiul $A'B'C'$ este egal cu triunghiul $A''B''C''$. Patrulaterele BC_1AB_1 şi BA_2CB_2 sînt egale avînd laturile egale. Rezultă $BB'' = B_1B$.

Deasemenea, patrulaterele AB_1CA_1 şi AC_2BA_2 sînt egale avînd laturile egale. La fel, $\overline{AA'} = \overline{A_2A''}$; Cum $\overline{AB_1} = \overline{BA_2}$ şi ţinînd seama de cele două relaţii, avem $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$. Cele două triunghiuri au o latură comună şi unghiurile adiacente egale $\sphericalangle A' = \sphericalangle A''$, $\sphericalangle B' = \sphericalangle B''$, deci triunghiurile sînt egale.

Acum să construim dreptele sub unghiul α şi în exteriorul triunghiului.

Observînd pe fig. 4, obținem

$2 \sphericalangle B'' = \overset{\frown}{ACC_1} - \overset{\frown}{BB_1} = \overset{\frown}{AA_1C} = 2 \sphericalangle B$, deci $\sphericalangle B'' = \sphericalangle B$. sau din triunghiul $AB''B$,

$$\sphericalangle B'' = 180^\circ - [\alpha + (180 - B - \alpha)] = \sphericalangle B$$

și

$$\sphericalangle A'' = \sphericalangle A;\ \sphericalangle B'' = \sphericalangle B;\ \sphericalangle C'' = \sphericalangle C$$

În concluzie, proprietatea exprimată prin cazul din fig. 1 se menține și în cazul dat de fig. 4 și se observă că nu depinde de unghiul α.

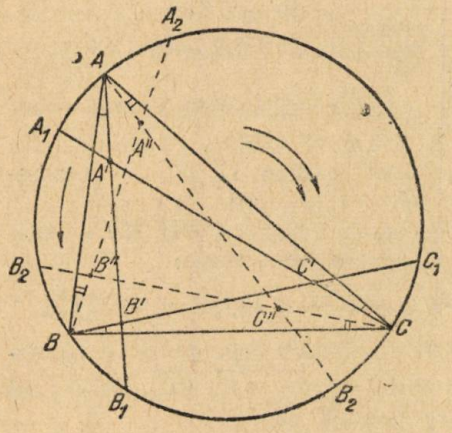


Fig. 3

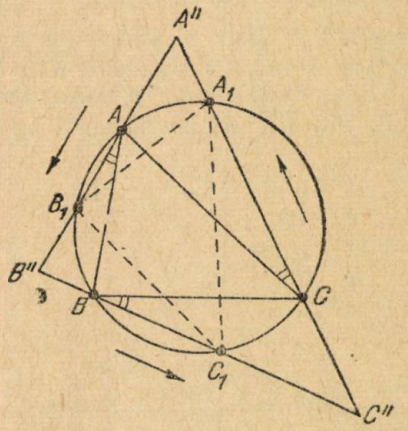


Fig. 4

— Să determinăm de exemplu, locul geometric al punctului B' intersecția drepțelor duse prin A și B sub același unghi variabil α față de AB și BC.

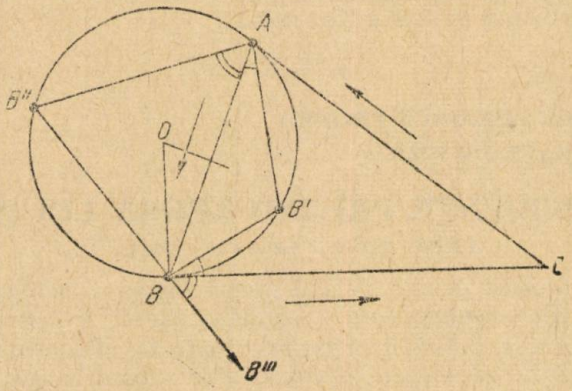


Fig. 5

În B, fig. 5, ridicăm perpendiculara care intersectează mediatoarea laturii AB în O. Cercul de centru O și raza $OB = OA$ trece prin B' deoarece $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle CBB'$ și $BC \perp BO$.

Invers, să considerăm un alt punct B'' pe cercul O care trece prin A şi este tangent în B laturii BC.

Să arătăm că $\sphericalangle BAB'' = \sphericalangle CBB'''$ Avem, privind figura 5, $\sphericalangle BAB'' = \frac{\overset{\frown}{BB''}}{2} = \sphericalangle CBB'''$ şi unghiurile sînt egale.

Oricare ar fi punctul B' care îndeplineşte condiţiile cerute de acelaşi unghi α, el se găseşte pe cercul de centru O ce trece prin A şi este tangent în B, laturii BC.

Astfel de cerc se notează cu $\overline{AB}$ şi poartă numele de cerc adjunct. Analog, punctele C' şi A' se găsesc pe cîte un cerc $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, În felul acesta avem un triplet de cercuri adjuncte $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

Este cazul acum, să construim cele trei cercuri adjuncte în sensul direct $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ sau în sensul invers $\overline{AC}$, $\overline{CB}$. $\overline{BA}$ şi să arătăm că ele au cîte un punct comun Ω şi Ω' numite punctele lui Brocard.

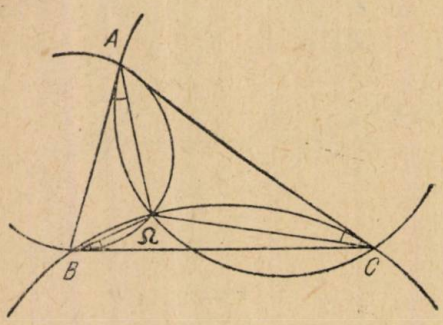


Fig. 6

Cercurile adjuncte AB, CA se taie în Ω pentru care avem:

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$$

relaţii unghiulare care dovedesc că tripletul de cercuri $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ are un punct comun Ω.

Analog relaţiile unghiulare $\sphericalangle \Omega'AC = \sphericalangle \Omega' CB = \sphericalangle \Omega'BA$. arată că tripletul $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$ are un punct comun Ω'.

În acest caz de figură, cele trei puncte A', B', C' coincid şi triunghiul A' B' C' se reduce la un punct Ω sau Ω', după cum considerăm tripletul de cercuri $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ sau $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

SIMPLE EXPERIENŢE PRIVIND LEGEA LUI ARHIMEDE

(după «Fizica v şcole» 4—1954)

Experienţele şcolare pentru demonstrarea legii lui Arhimede au cîteva lipsuri esenţiale. De exemplu, sub actualul ei aspect experienţa este puţina demonstrativă: lipsesc indicaţii clare privitoare la demonstrarea legii lui Arhimede aplicată la gaze (pentru clarificarea laturii cantitative a acestei legi); nu se fac experienţe privitoare la aplicaţiile practice ale legii lui Arhimede.

Luînd în considerare aceste lipsuri, am vrea să recomandăm cititorilor unele experienţe simple.

1. *Demonstrarea legii lui Arhimede privitoare la lichide.* Cilindrul trebuie să fie transparent. Se poate folosi un pahar de apă obişnuit sau un cilindru confecţionat din sticlă necolorată.

După ce ungem cu ulei de maşină pereţii interiori ai cilindrului, aşezăm pe fundul lui o sîrmă răsucită în spirală, astfel încît capătul ei îndoit ca un cîrlig să iasă din cilindru. Se umple apoi, cilindrul bine cu lut. Peste 3—4 zile se scoate cu băgare de seamă corpul de lut uscat şi se vopseşte cu vopsea de ulei (dacă este posibil se va întrebuinţa ciment în locul lutului).

Cilindrul şi corpul se atîrnă, după cum este arătat în figura 1, de cîrligul unui dinamometru tubular.

Pentru a mări vizibilitatea indicaţiilor dinamometrului se fixează de indicator o săgeată de carton (dacă e posibil, se sudează o săgeată de tablă); săgeata se vopseşte în culoare neagră, iar de tubul dinamometrului (corpul lui) se fixează un ecran alb prevăzut cu un indicator care se poate deplasa pe marginea lui, ca un fel de clemă.

Experienţa se efectuează la fel ca şi cu modelul obişnuit, cunoscut din laboratoare.

Această experienţă poate fi efectuată de elevi acasă cu un corp de altă formă şi cu alte lichide.

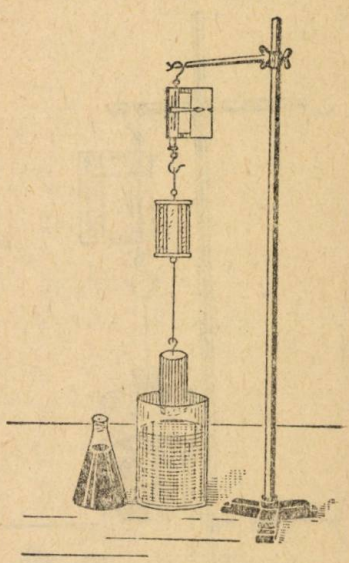


Fig. 1

2. *Demonstrarea legii lui Arhimede aplicată la gaze.* Pentru această experienţă trebuie pregătit un pahar cilindric de capacitate cît mai mare şi un cilindru închis (din hîrtie sau din carton subţire), care intră etanş în vas, umplîndu-l pe deplin.

Se întrebuinţează acelaşi dispozitiv ca şi în experienţa precedentă, însă în locul dinamometrului se foloseşte un cîntar farmaceutic (fig. 2).

Cilindrul de hîrtie atîrnat de pahar trebuie cufundat într-un vas mare de sticlă. Umplînd pe acesta din urmă cu CO_2, constatăm că cilindrul este împins afară. Umplem paharul cu CO_2 şi restabilim astfel, echilibrul balanţei.

Prezenţa bioxidului de carbon în vase se constată cu ajutorul unei lumînări aprinse.

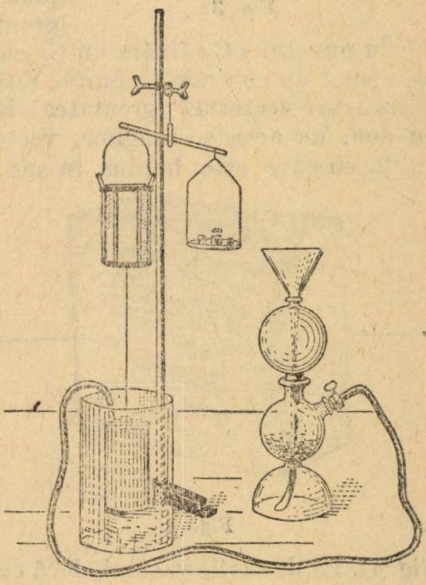


Fig. 2

Pe baza demonstrării legii lui Arhimede pentru lichide şi gaze se formulează legea, în felul următor: orice corp cufundat în lichid sau gaz este împins de jos în sus cu o forţă egală cu greutatea cantităţii de lichid sau gaz deslocuită de corp.

3. *Plutirea corpurilor.* Se atîrnă de cîrligul dinamometrului o sticlă (fig. 3) conţinînd o cantitate de apă colorată, suficientă pentru a determina cufundarea

ei în vasul cu apă necolorată. Micşorînd cantitatea de apă realizăm plutirea sticlei în interiorul apei din vas, iar apoi, deasupra ei. În toate trei cazurile explicăm forţele care acţionează asupra sticlei.

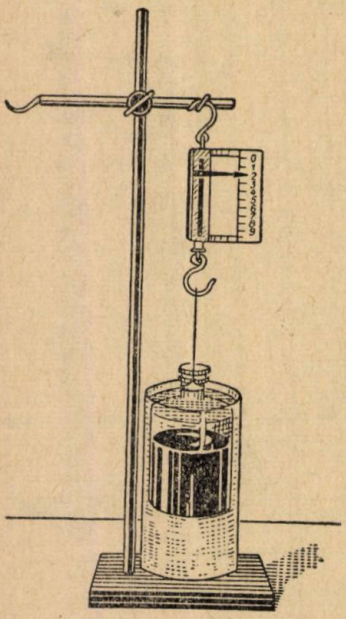


Fig. 3

Pe un cîntar obişnuit se echilibrează vasul de sticlă gol. Pe celălalt taler se pune sticla cu cantitatea de apă corespunzătoare plutirii ei cînd este cufundată cel mai mult în apă. Turnînd apă colorată în vasul gol restabilim echilibrul cîntarului, deci greutatea sticlei cu apă este egală cu greutatea apei colorate din vas.

Luăm apoi, un alt vas de sticlă, îngust, în care putem introduce sticla cu apă, îl punem într-o baie largă şi-l umplem cu apă colorată pînă cînd aceasta începe să se verse peste marginile lui. Sticla atîrnată de un fir va fi scufundată încet în vas. O parte din apă se va revărsa în baie. Scoatem apoi sticla din vas şi turnăm în acesta apa care a echilibrat sticla pe cîntar. Vasul va fi plin cu apă din nou pînă la margine.

4. *Plutirea vaselor.* Pentru explicarea plutirii vaselor trebuie confecţionat un model de vas sau pur şi simplu, o cutie din placaj. Încărcînd cutia, obţinem plutirea permanentă a vasului. Marcăm cu **vopsea de ulei** linia de plutire, centrul de presiune «*O*» şi centrul de greutate «*C*»*).

În punctul «*C*» fixăm un fir cu plumb, iar în punctul «*O*» un fir de care este legat un con mic de plută. Firul cu plumb reprezintă în mărimea corespunzătoare vectorul *P* (greutatea), iar firul cu con, de aceeaşi lungime, vectorul *F* (forţa cu care este împins în sus vasul)

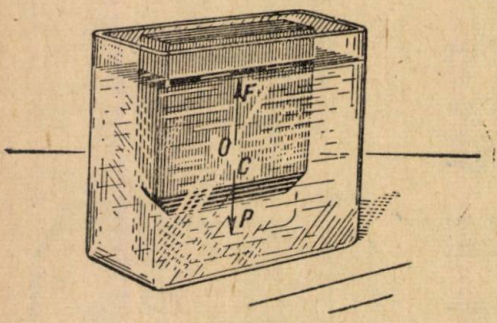
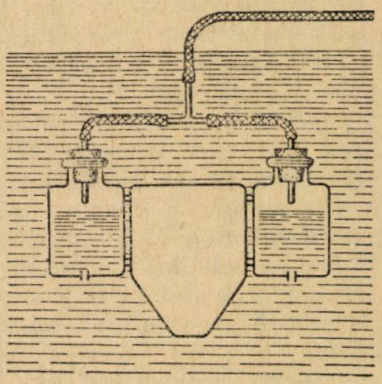


Fig. 4



Fgi. 5

(fig. 4). La devierile vasului, dacă centrul de presiune este mai sus decît centrul de greutate, se formează un cuplu de forţe care-l readuc în poziţia de echilibru. Aici nu se ia în considerare schimbarea centrului de presiune la devierile vasului.

*) In fapt, punctele «*O*» şi «*C*» sînt respectiv, proiecţiile centrului de presiune şi centrului de greutate pe peretele din faţă al cutiei.

5. *Ridicarea vaselor scufundate.* Două flacoane identice (ponton) legate de modelul de vas, se unesc cu ajutorul unui tub subțire de cauciuc (fig. 5). În fundul fiecărui flacon sînt perforate două orificii identice. Cufundăm dispozitivul în apă și-l lăsăm să se scufunde. Pompînd (suflînd) aer în flacoane, determinăm «vasul» să se ridice la suprafață.

6. *Ridicarea balonului.* Peste doi scripeți ficși montați pe tavan, se trece un fir subțire. De unul din capetele acestuia sa atîrnă un balon, iar de celălalt o sticluță.

Drept balon putem folosi un con mare confecționat din hîrtie de ziar, așezîndu-l cu baza (deschisă) în jos. Turnînd apă în sticluță echilibrăm conul. Încălzind cu un chibrit aerul din con, obținem ușor ridicarea lui bruscă pînă la tavan.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1276

Se dau progresiile aritmetice,

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots$$
$$4,\ 15,\ 26,\ 37,\ \ldots$$

Să se găsească termenii comuni ai acestor progresii și să se arate că acești termeni comuni formează o nouă progresie.

(«Olimpiada matematică 1954»)

Soluție. Termenii generali ai celor două progresii sînt respectiv:

$$a_n = 1 + (n-1)\,4;\quad b_p = 4 + (p-1)\,11$$

sau:

$$a_n = 4n - 3\qquad ;\quad b_p = 11p - 7$$

Dacă a_n și b_p sînt termeni comuni, atunci $t_r = a_n = b_p$; adică $4n - 3 = 11p - 7$, de unde: $11p = 4(n+1)$, sau $p = \dfrac{4(n+1)}{11} = M4$ atunci, fie $p = 4m$, rezultă $n = 11m - 1$.

Făcînd: $m = 1, 2, 3, 4, \ldots, r$ avem:
$n = 10, 21, 32, 43, \ldots, (11r - 1)$ și $p = 4, 8, 12, 16, \ldots, (4r)$, iar termenii comuni sînt $t_r = 37, 81, 125, 169, \ldots, [37 + (r-1)\,44]$.

Și în adevăr, șirul

$$37,\ 81,\ 125,\ 169,\ \ldots,\ [37 + (r+1)\,44]$$

este o progresie aritmetică cu primul termen 37 și rația 44.

Problema 1286

Un tractor poate să termine aratul unui lot în 48 ore. În timpul aratului el a fost înlocuit cu un alt tractor care ar fi terminat singur aratul întregului lot în 40 ore. Aratul lotului a durat în total, 42 ore. Cîte ore a lucrat fiecare tractor?

(«Olimpiada matematică 1954»)

Soluție algebrică. Fie x suprafața arată de primul tractor iar y suprafața arată de al doilea tractor. Primul tractor ară întreaga suprafață $(x + y)$ în 48 ore, deci el va ara porțiunea x în

$$t_1 = \frac{48x}{x+y} \text{ ore.}$$

Al doilea tractor ară întreaga suprafață $(x + y)$ în 40 ore, deci el va ara porțiunea y în

$$t_2 = \frac{40\,y}{x+y} \text{ ore}$$

Însă:

$$t_2 + t_1 = 42 \text{ ore; adică } \frac{48\,x}{x+y} + \frac{40\,y}{x+y} = 42 \text{ ore, de unde } y = 3\,x.$$

Avem,

$$t_1 = \frac{48\,x}{x+y} = \frac{48\,x}{x+3x} = \frac{48}{4} = 12 \text{ ore.}$$

Deci, $t_1 = 12$ ore și $t_2 = 30$ ore.

Soluție aritmetică. Diferența de timp între aratul celor două tractoare este $(48 - 40) = 8$ ore, iar între timpul aratului lotului de cele două tractoare și al doilea este $(42 - 40) = 2$ ore. Atunci, primul tractor a arat în cazul problemei $\frac{2 \text{ ore}}{8 \text{ ore}} = \frac{1}{4}$ din lot, adică în timpul

$t_1 = 48 \cdot \frac{1}{4} = 12$ ore.

Diferența între timpul total al aratului celor două tractoare din timpul normal de arat al tractorului al doilea este $(48 - 42) = 6$ ore. Atunci al doilea tractor a arat $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ din lot, adică în timpul:

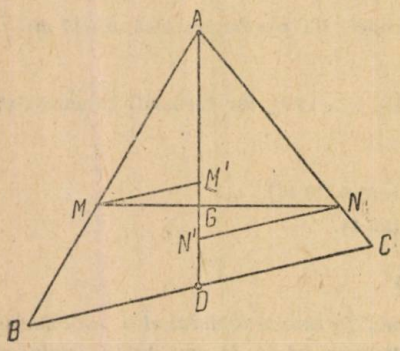
$$t_2 = 40 \cdot \frac{3}{4} = 30 \text{ ore.}$$

Problema 1301 *)

Prin punctul G, centrul de greutate al unui triunghi ABC; se duce o dreaptă oarecare care taie segmentele AB și AC respectiv în M și N. Să se arate că:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3.$$

Florin Constantinescu, elev, Cluj



Soluție. — Ducem MM' și NN' paralele cu BC (M' și N' pe mediana AD).

Avem: $\frac{c}{x} = \frac{AD}{AM'}$; $\frac{b}{y} = \frac{AD}{AN'}$, deci:

$$\frac{c}{x} + \frac{b}{y} = AD\left(\frac{1}{AM'} + \frac{1}{AN'}\right) \qquad (1)$$

Însă: $\frac{AD}{AM'} = \frac{MM'}{BD}$; $\frac{AN'}{AD} = \frac{NN'}{DC}$

și prin împărțire $\frac{AM'}{AN'} = \frac{MM'}{N'N}$ (2)

Se mai observă că:

$$\frac{GM'}{GN'} = \frac{MM'}{NN'} \qquad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) deducem că diviziunea $(AG'M'N')$ este armonică sau că:

$\frac{2}{AG} = \frac{1}{AM'} + \frac{1}{AN'}$ și înlocuind în (1), obținem relația cerută.

*) Generalizarea problemei 1301 a apărut ca notă în nr. 3. pag. 74.

Problema 1306

Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{3x^2 - x + 2} + 2x - 6x^2 + 2 = 0$$

Simon St. Petre

Soluție. — Ecuația dată se mai poate scrie:

Notăm $\sqrt{3x^2 - x + 2} = z$ și obținem $2z^2 - z - 6 = 0$. De unde $z_1 = 2$; $z_2 = -\frac{3}{2}$ și

Pentru $z_1 = 2$, avem $3x^2 - x - 2 = 0$; deci, $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{2}{3}$. Pentru $z_2 = -\frac{3}{2}$, avem $12x^2 - 4x - 1 = 0$. Deci, $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{1}{6}$.

Ecuația este verificată numai de $x_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{2}{3}$.

x_3 și x_4 verifică ecuația: $-\sqrt{3x^2 - x + 2} + 2x - 6x^2 + 2 = 0$.

Problema 1309

Să se arate dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, există inegalitatea:

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 3\,[a^2 + b^2 + c^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)]^2$$

Mihail I. Popescu, student, București

Soluție. — Considerăm inegalitatea evidentă:

$$(a-b)^4 \geqslant 0 \text{ care se mai poate scrie:}$$

$$a^4 + b^4 \geqslant 2\,[2(a^2 + b^2) - 3ab]$$

Impărțind cu $ab > 0$, obținem:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geqslant 2\,[2(a^2 + b^2) - 3ab]; \qquad (1)$$

Analog avem:

$$\frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b} \geqslant 2\,[2(b^2 + c^2) - 3bc]; \qquad (2)$$

$$\frac{c^3}{a} + \frac{a^3}{c} \geqslant 2\,[2(c^2 + a^2) - 3ca] \qquad (3).$$

Deasemenea avem:

$$\frac{a^3}{a} + \frac{b^3}{b} + \frac{c^3}{c} = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (4)$$

Adunăm relațiile (1), (2), (3), (4) și grupînd termenii convenabil, obținem relația din enunț.

Problema 1311

Să se demonstreze că dacă produsul MN este de forma $2^m - 1$ atunci $M + 1$ și $N - 1$ se divid prin aceeași putere n a lui 2.

Gh. Buiclin

Soluție. — Din egalitatea $M.N = 2^m - 1$ rezultă că M și N sînt neperechi, deci $M + 1$ și $N - 1$ sînt perechi. Fie $M + 1 = 2^n q$. Egalitatea precedentă devine $2^m - 1 = (2^n q - 1)N$

De unde, $N - 1 = 2^n qN - 2^m$ și fiindcă $n < m$, rezultă,

$$N - 1 = 2^n(Nq - 2^{m-n})$$

PROBLEME PROPUSE (CHESTIUNI DE EXAMEN) *

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL FORESTIER ORAŞUL STALIN, AUGUST 1954

Grupa I-a

1560. Se dă ecuaţia $mx^2 - 2(m+1)x + 8 = 0$ şi se cere: *a)* să se discute ecuaţia după valoarea parametrului m; *b)* să se determine m astfel încît să avem:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} > x_1 + x_2$$

x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei date.

1561. Să se determine m, n, p astfel ca polinomul:

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 8$$

să fie divizibil cu $(x-1)(x^2 + 6x + 8)$.

1562. Se dau două cercuri de raze R şi r tangente exterioare în punctul H. Se consideră tangenta comună exterioară AB (unde A şi B sînt puncte de contact diferite ale tangentei). Se cere să se demonstreze că cercul de diametru AB este tangent la dreapta definită de centrele celor două cercuri.

Grupa II-a

1563. Se dă ecuaţia $x^2 - mx + m - 1 = 0$ şi se cere: *a)* să se discute ecuaţia după valoarea parametrului m; *b)* să se determine m astfel încît să avem:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} > x_1 x_2$$

x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei.

1564. Să se determine m, n, p astfel ca polinomul

$$x^4 + mx^2 + nx + p$$

să fie divizibil cu $(x-1)^3$.

1565. Se dă un cerc de rază R şi fie A şi M două puncte de pe cerc. Considerăm punctul N proiecţia lui A pe tangentă în M la cerc. Să se arate că $AM^2 = 2R \cdot AN$.

Secţia „fără frecvenţă"

1566. Să se formeze ecuaţia de gradul II ale cărei valori x_1 şi x_2 satisfac relaţiile următoare:

$$4x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1+a};$$

a fiind cunoscut.

1567. Să se stabilească relaţiile:

$$\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 2x;$$

şi

$$\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \sin 2x$$

---

*) La aceste probleme se primesc soluţii pînă la 1 septembrie 1955.

1568. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara din A pe diagonala BD taie latura BC în F. Să se demonstreze că $AB^2 = BF \cdot BC$.

1569. Să se formeze ecuaţia de gradul II ale cărei rădăcini x_1 şi x_2 verifică relaţiile:

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0$$
$$a(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 3a + 4;$$

a fiind cunoscut.

1570. Suma diagonalelor unui romb fiind 70 cm şi raza cercului înscris în el de 12 cm, să se afle lungimea diagonalelor şi latura rombului.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL PEDAGOGIC TIMIŞOARA, 1954

1571. Se dă ecuaţia:

$$(m+1)x^2 - 2mx + 1 - x = 0 \qquad (1)$$

unde m este un parametru real. şi se cere:

a) să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei (1);

b) notînd cu x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei (1) să se scrie ecuaţia în y, ale cărei rădăcini sînt: $y_1 = x_1 + x_2$ şi $y_2 = x_1x_2$ şi să se discute natura rădăcinilor sale ţinînd seama de discuţia dela punctul *a)*;

c) Dacă x_1 şi x_2 au semnificaţia dela punctul *b)*, să se scrie ecuaţia în z, ale cărei rădăcini sînt: $z_1 = x_1^2$ şi $z_2 = x_2^2$ şi să se discute natura rădăcinilor sale ţinînd seama de discuţia dela punctul *a)*.

1572. Se dă polinomul:

$$P(x) = x^4 - (2 - \sin^2 a)x^3 + 2x^2 \cos a + (2 - 5\sin^2 a)x + 1$$

şi se cere:

a) să se determine toate valorile lui a pentru care polinomul $P(x)$ se divide cu $x-1$;

b) să notăm cu a_1 valoarea lui a cuprinsă între 0 şi $\frac{\pi}{2}$. Să se afle funcţiile trigonometrice ale unghiului b ştiind că $b = a_1 + \frac{\pi}{12}$.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE CHIMIE DELA UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI ÎN ANII 1952, 1953 şi 1954

1573. Să se simplifice fracţia:

$$1^\circ \quad E = \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2-16} + x^3 - 12x + 16}{(x^2-4)\sqrt{x^2-16} + x^3 - 12x - 16}$$

$$2^\circ \quad G = \frac{x^2 + y - 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y}}{x^2 - 1 - 1 + 2\sqrt{y}}$$

$$3^\circ \quad F = \frac{(m+1)x^2 - 2(m-1)x - 8}{mx^2 + 4m - x - 4}$$

1574. Să se arate, fără tabele, egalitatea:

$$\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{cotg} 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

1575. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin(x + 10^\circ) - \sin(x - 50^\circ) + \sin(x + 70^\circ) = 1$$

1576. Se consideră conurile drepte circumscrise unei sfere de rază dată r; printre aceste conuri există două cu volumul de $3\pi r^3$ fiecare. Să se afle unghiurile dela vîrf ale acestor două conuri.

1577. Se consideră un triunghi ABC în care $BC = 2 \cdot AB$. Fie M mijlocul lui BC, iar D şi E, punctele care împart latura AC în trei părţi egale, $AD = DE = EC$. Să se arate că triunghiul AME este dreptunghie.

1578. În triunghiul ABC se cunosc laturile: $AB = 5$ m; $BC = 6$ m; $CA = 7$ m. Se duce dreapta DE paralelă cu BC astfel ca triunghiul ADE şi trapezul $BDEC$ să aibe acelaş perimetru. Să se afle lungimea dreptei DE şi aria trapezului $BDEC$.

1579. Se consideră următoarea reacţie chimică:

$$x \cdot NO_3H + y \cdot HCl = z \cdot H_2O + u \cdot NO + v\,Cl_2$$

Să se determine algebric numerele întregi x, y, z, u şi v.

1580. Se consideră şirul de molecule:

$$CH_4 \ldots C_2H_6 \ldots C_3H_8 \ldots C_4H_{10} \ldots C_5H_{12} \ldots$$

Cîte molecule trebuie să luăm din acest şir ca să avem în total 270 atomi de hidrogen?

1581. Se dă ecuaţia de gradul II:

$$x^2 \sin a - 2x \cos a - 1 + \sin a = 0$$

unde a este un parametru. Să se studieze natura şi semnele rădăcinilor acestei ecuaţii cînd a variază dela 0 la 2π.

1582. Un triunghi dreptunghic ABC avînd cateta AB de 30 cm se roteşte în jurul ipotenuzei BC şi generează un solid al cărui volum este de 9600π cm^3. Să se afle laturile triunghiului.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI[1]

E: 624. Dacă am scrie toate numerele dela 1 la 1955, de cîte ori am întrebuinţa cifrele 3 şi 8?

* * *

E: 625. O sticlă goală cîntăreşte 600 grame iar plină cu ulei de densitate 0,93, cîntăreşte 1,3 kg. Care este capacitatea sticlei?

* * *

E: 626. Se dă un cerc cu diametrul AB şi un punct T pe cerc. În T se duce tangenta la cerc care taie pe AB în C. Să se determine poziţia lui T astfel că $AT = TC$.

Tiberiu Weszely, student, Bucureş

E: 627. Să se afle două numere ştiind că cel mai mic multiplu comun al lor este 1728 şi că de trei ori unul din ele este egal cu de patru ori celălalt.

* * *

E: 628. Să se arate că nu există niciun număr care împărţit cu 16 să dea restul 4 şi împărţit la 20 să dea restul 5.

* * *

E: 629. *a)* Dece apa din izvor iarna pare mai caldă?

b) Dece se aprinde focul cînd suflăm în el, cu toate că bioxidul de carbon pe care îl suflăm nu întreţine arderea?

S. V. Ionescu, student, Bucureşti

E: 630. Cel mai mare divizor comun a două numere este 54, iar cîtul lor este 0,8. Să se afle cele două numere.

* * *

---

[1]) Clasa V: (624, 625, 627, 630); VI: (629, 633, 634, 635); VII: (626, 628, 631, 632, 636, 637).

E: 631. Să se demonstreze că dacă împărțim două numere prin diferența lor, resturile obținute sînt egale.

* * *

E: 632. Produsul fracțiilor $\frac{4}{6}$ și $\frac{9}{4}$ se mai poate obține scriind numărător lîngă numărător și numitor lîngă numitor. Mai sînt și alte fracții cu termeni de o sigură cifră care să aibă aceiași proprietate?

* * *

E: 633. Care este fracția cu numărătorul cel mai mic, care să fie cuprinsă între $\sqrt{12}$ și $\sqrt{13}$?

* * *

E: 634. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a$$
$$\frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2}$$

* * *

E: 635. Dacă A, B, C sînt trei puncte așezate în ordinea dată pe o dreaptă, există un punct M pe această dreaptă astfel ca:

$$AM^2 + BM^2 + BM \cdot MC = MC^2$$

I. I. Loziciu, Student Timișoara

E: 636. Să se arate că

$$\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-nb+c}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^2 - bc =$$
$$= \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{ab}{2} - \frac{bc}{2} - \frac{ca}{2} = \frac{a}{2}\left(\frac{a-ab}{2}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{b-2c}{2}\right) +$$
$$+ \frac{c}{2}\left(\frac{c-2a}{2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{a-2c}{2}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{b-2a}{2}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{c-2b}{2}\right).$$

C. I. Ț.

E: 637. Să se arate că relațiile

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{ab}{cd} \quad \text{și} \quad ad = bc$$

sînt echivalente. (Se va arăta că dacă una din ele este adevărată, rezultă și cealaltă egalitate).

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din numărul precedent)

(Soluții primite în cursul lunii ianuarie 1955)

BUCUREȘTI. *Școala medie nr. 12 băieți.* Clasa X-a. Daia Viorel (E: 549, 551—559, 560, 561), Ionescu Cornel (1363, 365, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 380, 383, 392, 396, 402, E: 540, 545, 546, 547, 551, 554, 558, 559, 560, 561), *Ellenberg Manfred* (1315, 319, 333, 337, 339, 358, 360, 365, 367, 370, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 392, 397, 403, 406, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 419, 424, 436, 440).

Şcoala medie nr 13 *de băieţi*, clasa X-a. Eremia Dan (1374, 377, 378, 379, 383, 395, 403, 404, 409, 415, 416, 436, 442, 443, 467), Manea E. Mihai (1349, 354, 356, 363, 368, 373, 374, 376, 378, 379, 380, 383, 387, 392, 396, 409, 410, 413, 416, 436).

Şcoala medie nr. 15 *de fete*, clasa IX-a. Delcescu Rodica (1354, 372, 374, 375, 377, 378, 381, 383, 403, 404), Teodorescu Viorica (1372, 374, 375, 378, 381, 383, 402, P) (E: 540, 545, 546).

Şcoala medie nr. 17 *de băieţi*, clasa VIII-a. Aniţei Marian (1449, 467, E: 565, 568, 574, 575, 571, 586, 588, 590), Dinu Florin (1449, E: 559, 563, 568, 571, 584, 575, 586, 587, 588), Cantaragiu Gheorghe (1372, 374, 377, 383, 403, 437, E: 551, 559, 571), Iosif Gheorghe (1389, 403, 404, 405, 418, 434, 443, 449, 456, E: 559), Păunescu I. Lucian (1409, 410, 416, 418, 434, 449, E: 565, 569, 571, 574, 575), Zinger Herbert (1374, 413, 416,436, E: 563, 567, 568, 572, 574, 575, 578), Pop R. Andrei (1372, 374, 375, 377, 383, 392, 403, 449, E: 558, 559, 580), Lupu Adrian (1449, E: 558, 559, 563, 565, 574, 578, 581, P); clasa IX-a. Vitanyi Paul (1375, 377, 378, 413, 416, E: 559, 561, 567, 569, 571,

Şcoala medie nr. 19 *fete*. Clasa IX-a. Nicolau A. Ileana (1372, 374, 375, 378, 383, 408, 411, E: 563, 564, 566, 567, 568, 571, 574).

Şcoala medie nr. 20 *de băieţi*, clasa VIII-a. Iordănescu Radu Sorin (1372, 460, E: 526, 552, 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 580, 581); clasa X-a. *Berechet M. Oprea* (1320, 321, 322, 325, 330, 336, 348, 349, 350, 351, 353, 354, 355, 356, 358, 362, 363, 366, 367, 369, 370, 372, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 388, 392, 395, 396, 397, 401, 403, 404, 406, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 415, 416, 418, 419, 424, 436, 446), Cuperman Vladimir (1349, 354, 356, 358, 363, 372, 374, 376, 377, 378, 381, 383), Drăgoi St. Gheorghe (1372, 374, 375, 377, 386, 403, 412, 413, 436, E: 526, 540, 546, 559, 563, P), Motoc Ioan (1347, 354, 363, E: 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 544, 546, 547), Sava I. (1354, 362, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, E: 558, 559).

Şcoala medie 21 *de fete*, clasa VIII-a. Demayo Adriana (1431, 432, E: 524, 526, 529, 533, 546, 552, 563, 567, 568), Dogaru D. Viorica (1337, 354, 363, 378, 416, 436, E: 535, 537, 540, 546, 547, 549, 552, 558, 559, 561, 563, 567, 568, 571, 574).

Şcoala medie tehnică mecanică nr. 1, anul II. Grosu David (1372, 373, 376, 380, 408, 416, 436, E: 559, 565, 568, 574).

Şcoala medie tehnică de construcţii, anul IV. Fomov Mihai (1372, 411, E: 529, 532, 533, 539, 541, 543, 55, 558, 559, 560, 561, 562).

Şcoala medie tehnică de măsurători terestre, anul II. Nica Nicolae, (1377, E: 505, 518, 519, 526, 529, 546, 561, 562, 577), *Popescu Paul* [1349, 354, 363, 361, 370, 374, 377, 378, 379, 381, 383, 408, 409, 410, 411, 413, 416, 423, 426, 432, 436, 437, 440, 441, 442, 443, 449, 458, 459, 460, 461, 465, E: 546, 550, 551, 553, 554, 555, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 567, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 586, 587, 588, 390, P); anul IV. *Tănase Dumitru* (1347, 349, 350, 354, 356, 358, 362, 363, 365, 366, 370, 572, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, E: 536, 537, 538, 539, 540, 451, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549).

BUZĂU. Clasa VII-a. Ionescu D. Vasile (E: 559, 562, 563, 568, 571, 574, 575, 581, 586, 587); clasa X-a. Boerescu Dragoş (1365, 372, 374, 375, 377, 378, E: 538, 540, 552, 554, 558, 559), Constantinescu Mariana (1396, 436, 449, E: 558, 559, 561, 563, 565, 567, 568,570, 571, 572, 574, 584, 581, 586, 587, 588), Găgescu Liliana (1396, 436, 449, E: 558, 559, 561, 653, 567, 568, 570, 574, 575, 581, 586, 587, 588), Ioniţă Aurelia (1340, 437, E: 508, 510, 512, 522, 523, 527, 530, 531, 538, 541, 544, 547, 549, 550, 552, 560, 561, 562, 563, 565, 567, 568, 570, 571, 572, 574, 575), Mihăescu Laura Elena (1410, 411, 412, 413, 416, 419, 449, E: 563, 565, 567, 568, 571, 572), Milea V. Ioana (1426, E: 558, 559, 563, 568, 571, 574, 586, 587, 588).

CALAFAT. Clasa X-a. *Mitroaică I. Gheorghe* (1409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 418, 419, 421, 423, 427, 428, 440, 441, 443, 449, 451, 452, 453, 454, 456, 46Ş, 465, 466, 467, 468).

CĂLĂRAŞI. Clasa X-a. Dudă Gh. Nicolae (1323, 409, 416, 436, E: 563, 568, 569, 570, 571, 574, 575).

CARANSEBEŞ. Clasa X-a. Cîmpeanu Viorel (E: 535, 538, 539, 540, 541, 543, 544, 546, 547, 548, 549, 554, 558, 559, 561, 562), absolvent *Mitrofan Gheorghe* (1346, 347, 349, 351, 354, 365, 358, 362, 363, 364, 365, 370, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 379, 380, 381, 390, 392 396, 397, 406, 407, P).

CARACAL. Clasa X-a. Gheorghievici Ada (1351, 352, 353, 354, 355, 356, 362, E: 540, 542, 546).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa IX-a. Beloiu Daniel (1362, 363, 372, 374, 375, 377, 378, 383, 407, E: 554, 559); *Şcoala medie tehnică de cărbuni*, anul ICV. Opriş A. Ioan (1327, 339, 340, 341, 348, 351, 358, 363, 364, 365, 366, 367, 373, 377, 406, E: 531, P).

CERNAVODA (Constanţa). Clasa IX-a. Birda Tiberiu (1335, 337, 342, 360, 361, E: 528, 529, 540, 546), Tănase Vasile (1337, 342, 354, 416, E: 528, 529, 533, 537, 539, 540, 546).

CLUJ. *Facultatea muncitorească*, anul II. Coţea Nicolae (1416, 418, 423, E: 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574), Păun Constantin (1412, 413, 416, 418, 419, 423, 424, 436, E: 562, 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574).

CONSTANŢA. Clasa VIII-a. Ciortan R. (1372, 377, 384, 386, 405, 423, 437: E: 563, 564, 568, 569, 570, 574, 575), Ianuş I. Stere (E: 522, 524, 526, 529, 532, 533, 534, 535, 540, 541, 542, 544, 546, 547), Vlaicu Margareta (E: 526, 530, 540, 546, 558, 559, 563, 568, 569, 571, 572, 574); Clasa IX-a. Encica Traian (1380, 403, 305, 318, 423, 424, 426, 427, 437, E: 568, 574, 575), Stavrositu Tanţa (E: 524, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 536, 537, 539, 540, 544, 546, 547, 558, 559, 560, 563, 567, 568, 571, 572, 574); Clasa X-a. *Cristea Ion* (1347—1356, 1358, 1359, 362, 365, 367—375, E: 534, P). *Şcoala feroviară nr. 1 Palas*, anul I Teodorov Cornelia (1357, 372, 377, 423, E: 4563, 564, 568, 569, 570, 574, 575). *Şcoala Hidrotehnică*, anul III. Stepan Ionel (1354, 358, 375, 377, 380, 387, 426, E: 536, 542, 558).

CORABIA. Clasa IX-a. *Delu Gh. Ştefan* (1354, 360, 362, 363, 371, 372, 374, 375, 381, 383, 392, E: 537, 539, 540, 543, 544, 546, 553, 554, 558, 559, 560, 561, 563, 565, 566, 568, 569, 574, 575), Şarpe I. Dumitru (1372, 374, 377, 378, 381, 383, 418, 427, E: 558, 560, 563, 568).

CRAIOVA. *Şcoala medie electrotehnică*, anul III. *Voicu I. Traian* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 391, 395, 403, 404, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 436, 437, 442, 449, 453, 460, 465, 467, E: 558, 559). *Şcoala Medie Tehnică de Poduri si Drumuri*, anul II. Răducanu V. Gheorghe (1374, 375, 377, 378, 390, 406, 436, E: 558, 559, 560, 561, 562, 563, 568, 570, 571, 574); Şcoala medie de băieţi clasa X-a. Clim Lorin (1347, 348, 351, 354, 358, 362, 363, 372, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, E: 536, 537, 540, 544, 547), Lazăr Stelian (1354, 359, 360, 361, 362, 363, 365, 366, 368, E: 537), Lică I. Ilie (1349, 354, 372, 377, 378, 379, 383, 385, 416, 436, E: 540, 546, 547), *Ţurlea I. Corneliu* (1349, 350, 351, 352, 353, 354, 365, 358, 362, 363, 366, 372, 373, 374, 376, 377, 378, 379, 382, 384, 385, 386, 395, 396, 404, E: 537, 540, 546, 547, 559).

CURTEA DE ARGEŞ, clasa IX-a. Teodorescu I. Dorin, (E: 563, 568, 569, 571, 574, 577, 580, 583, 586, 587).

DEJ, clasa IX-a. Waldhorn Gerhard (1375, 378, 390, 407, 411, 413, E: 558, 559, 560, 561, 562, 563, 568, 569, 571, 574).

DRĂGĂŞANI (Craiova). *Şcoala medie tehnică agricolă, Voicesti*, anul I. Bălaţa Marin, E: 505, 510, 512, 524, 526, 529, 532, 535, 539, 540, 546, 560, 561, 563, 565, 567, 568, 571, (572, 574, 575).

FOCŞANI. Clasa VI-a, *Gugesti*. Brînduşoiu Creaţa (E: 524, 529, 533, 546, 549, 552, 555, 561, 574), Serea Vasile (E: 522, 524, 529, 532, 535, 543, 545, 550, 553, 554, 560); clasa VII-a. Mărgărit Doru (E: 523, 526, 527, 530, 554, 555, 558, 563, 566, 568, 573, 574); clasa

VIII-a. Buşe M. Constantin (1336, 360, 372, 374, 375, 377, E: 523, 526, 547, 557, 559, 561, 571, 572, 574, 576, 578); clasa IX-a. Bercovici Izu (1372, 374, 377, 378, 403, 405, E: 523, 526, 547, 551, 552, 558, 559, 561, 568, 571, 573, 574, 576, 578, 57 586); clasa X-a. Ţîru Emil (1312, 372, 373, 375, 378, 403, 432, 442, 449, 460, E: 538, 567, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578).

GALAŢI. *Elevi matrozi*. Clasa IX-a. Iovan D. Ion (1372, 378, E: 526, 527, 529, 537, 540, 546, 558, 559); *Şcoala medie*, clasa IX-a. Grosu Gh. Florin (1320, 322, 325, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 342, 343, E: 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533), Spătaru Smaranda (1354, 358, 367, E: 524, 527, 529, 530, 531, 547); clasa X-a. Mastac Mircea (1372, 373, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 390, 406, 407, 416, 436).

GHEORGHENI. Clasa X-a. Coşa Aurel (1372, 374, 375, 378, 380, 383, 403, E: 539, 540, 544, 546, 547), Cristea Miron (1342, 354, 372, 374, 375, 377, 378, 380, 403, E: 540, 544, 554, 558), Pop A. Gavril (1342, 354, 372, 375, 380, E: 537, 540, 544, 546, 558, 559),

GIURGIU. Clasa VIII-a. Bădilă I. Mihai (1183, 372, E: 558, 559, 563, 564, 567, 571, 574, 580, 584), Clasa IX-a. Botoran I. Petre (E: 527, 529, 530, 531, 532, 533, 539, 541, 542, 543, 544, 549, 557, 560, 561), Codreanu M. Petre, (1337, 351, 358, 363, 372, 379, 382, 383), Ifrim Mircea (1333, 342, 351, 352, 353, 354, 355, 362, 363, 364, 367), *Pieleanu I. Dumitru* (1297, 301, 302, 304, 306, 310, 311, 312, 313, 315, 316, 332, 333, 335, 337, 342, 349, 361, 362, 363, 365, 374, 377, 378, 379, 383, 403, 406, 413, 436, E: 505, 508, 513, 519, 521, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 531, 532 ,533, 538, 539, 540, 544, 546, 549. 563, 574, 575), Porojan René (1372, 375, 377, 383, 416, E: 539, 540, 546, 563, 571, 574), Stăncescu N. Emil (E: 525, 526, 544, 547, 554, 557, 560, 561, 563, 564, 567, 568, 571, 574, 575); clasa X-a. Bigan S. (1347, 348, 349, 370, 379, 380, 381, 382, 389, 392, 403, 407, P), Mişcol M. Mircea (1379, 385, 390, 404, 407, 408, 409, 413, 416, 424, 431, 432, 433, 436, 437, 438), absolvent Corăscu Ionel (1346, 349, 351, 353, 356, 358, 363, 364, 365, E: 535, 538, 546).

HÎRLĂU (Iaşi), clasa VIII-a. Ţibuleac Florin (1346, 354, 359, 360, 361, 369, E: 534, 535, 538, 540, 542).

IAŞI. Clasa VII-a. Ballif Andrei (E: 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549); clasa IX-a. Corduneanu Adrian (1372, 374, 377, 378, 380, 381, 383, 386, 390, 403, 404, 405); clasa X-a. *Alexa Dumitru* (1307, 340, 347, 349, 351, 354, 358, 360, 362, 363, 364, 365, 372, 373, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 390, 396, 401, 402). *Şcoala pedagogică*, anul II. *Crăcană Petrea* (1320, 333, 351, 354, 358, 362, 363, 372, 374, 375, 377, 378, 381, 383, 385, 392, 396, 403, 404, 405, E: 522, 523, 526, 532, 533, 535, 538, 540, 542, 546, 547, 548, 549, 553, 558, 559, 561); anul IV. *Grăjdeanu I. Petre* (E: 523, 526, 527, 530, 531, 535, 540, 543, 546, 549, 554, 557, 559, 561, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 577, 578, 582, 588).

ORADEA. Clasa X-a. Breban Mircea (1397, 400, 405, 406, 407, 412, 416, 418, 419, 425, 436, 457, 459, 461, 462), *Guiaşu A. Silviu* (1330, 331, 335, 336, 337, 346, 349, 351, 356, 359, 390, 392, 395, 396, 397, 403, 404, 406, 407, 409, 410, 411, 412, 413, 416), *Rus A. Ioan* (1325, 367, 386, 388, 392, 396, 397, 401, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 431, 432, 433, 434, 436, E: 553, P).

ORAŞUL STALIN. Clasa VIII-a. Dragomir Adrian (1350, 351, 353, 354, 358, 363, E: 534, 536, 540); clasa IX-a. Ciobanu I. Ioan (1354, 361, 362, 372, 378, 401, 403, 407, E: 535, 536, 542, 551, 552, 558, 559, 560); anul II. Cenţu Ioan (1375, 377, 378, 416 436, E: 559, 561, 563, 565, 567, 569, 570, 571, 574, 575), Bloos Günther (1434, 436, E:, 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575), Movileanu Constantin (1408, 416, 427, 434, 436, E: 563, 565, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575); anul IV. Ioniţă Tudor (1347, 349, 350, 351, 353, 354, 356, 358, 362, 363, 364, 365, 366, 370).

PANCIU. Clasa VIII-a. Ţîru Nicolae (1372, 377, 403, 432, E: 546, 552, 567, 571, 574, 575); clasa IX-a. Popovici Nicolae (1375, E: 515, 518, 544, 546, 549, 554, 557, 558, 559, 563).

PIATRA NEAMŢ. Clasa IX-a. Rusu Aurica (1354, 362, 372, 377, 378, 386, 403, 404, E: 558, 559); Şcoala elementară, Roznov. Clasa VII-a. *Leaţ Gh Mihai* (1437, E: 550, 551, 552, 553, 555, 557, 558, 560, 561, 562, 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 583 584, 586, 587, 588, P). Tîrcoanu H. Nicolae (E: 535, 539, 541, 546, 547, 549, 551, 552, 553 554, 555, 557 559, 560).

PITEŞTI. Clasa X-a. *Bogaciu Valeriu* (1320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 342, 343, 372, 373, 374, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389), *Sămărescu F. Dan* (1346, 351, 354, 358, 360, 361, 362, 363, 366, 372, 373, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, P), Sorescu I. Victor (1354, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 383, 390, 392, 403, 404, 407, E: 530, 540, 544, 559), Ursu Gh. Mihai (1323, 330, 335, 337, 340, 342, 409, 436, 438, E: 566).

PLOIEŞTI. Clasa VII-a. Leonte D. Dinu (E: 522, 527, 528, 529, 533, 536, 537, 539, 540, 559), Mignea Claudiu (E: 522, 527, 528, 529, 533, 536, 537, 540, 559), Tudor Cornel (E: 534, 536, 537, 538, 542, 544, 547, 563, 564, 566, 568, 570, 574, 476); clasa VIII-a. Balalia Constantin (1372, 377, 383, 402, 403, E: 528, 540, 560, 558, 559, 561, 563, 568, 574), Baltag Vasile (1432, 460, E: 563, 568, 569, 574, 575, 578, 580, 584, 486, 487, 488, P), Ciortan Vasile (E: 522, 524, 525, 526, 529, 531, 532, 533, 537, 540, 558, 559), Coman L. Alex. 31340, 372, 374, 377, 381, 383, 389, 402, 403, 407, E: 551, 554, 557, 558, 559, 560, 562) Constantinescu Dan (E: 537, 540, 551, 558, 559, 560, 561, 563, 568, 571, 574), Costeanu Tudor (1372, 375, 377, 389, 403, 407, E: 540, 546, 547, 554, 558. 559), Cazacu Emil (1372, 374, 389, 392, 402, E: 551, 554, 559, 560, 571, 574), Apostolescu Mihail (1372, 374, 377, 389, 402, 403, E: 528, 534, 536, 537, 539, 540, 544, 549, 551, 553, 554, 555, 558, 559, 560, 561), Căsăndroiu Tudor (E: 535, 539, 540, 544, 546, 549, 558, 560, 561, 563, 568, 574), Costache I. Mihalache (1372, 374, 377, 383, 392, E: 558, 560, 561, 567, 569, 571 574), Drosu Cristian (1372, 377, 383, E: 528, 530, 536, 539, 540, 541, 546, 457, 552, 553, 554, 555, 558, 559, 560), Diaconu Nicolae (1372, 374, 383, 389, 392, 403, E: 539, 540, 541, 542, 543, 544, 546, 549, 554, 560), Grindea Virgil (1374, 377, 383, 403, E: 522, 528, 558, 559, 560, 561, 563), Ionescu Alexandru (1339, 340, 372, 374, 377, 381, 383, 386, 389, 402, 407, E: 551, 554, 557, 558, 559, 560, 561), Kovaci Alexandru (1374, 377, 383, E: 528, 540, 547, 554, 555, 558, 559, 460), Lăzărescu Emil (1372, 377, 382, 389, 392, 402, 403, 407, E: 553, 554, 555, 558, 559, 560, 561), Lecca Aurel (1372, 374, 377, 383, 389, 403, 407, E: 528, 540, 546, 558, 559, 560, 561, 563, 568, 569, 571, 574), Marusi Bruno (1403, E: 550, 554, 558, 561, 563, 568, 571, 574, 575), Marinescu D. Valentin (1372, 374, 377, 383, 402, 403, E: 522, 526, 527, 528, 529, 542, 554, 558, 559), Marinescu Lucian (1372, 377, 383, 407, E: 558, 559, 560, 561, 563, 568), Niculescu Eugen (1372, 374, 375, 377, 383, 384, 403, E: 500, 534, 535, 536, 537, 544, 546, 558, 559, 568, 569, 571, 574), Panaitescu M. Gheorghe (1372, 374, 377, 383, 392, 402, 404, 419, E: 547, 551, 553, 558, 559, 560, 561, 563, 564, 566, 567, 568, 571, 572, 573, 574, 575), Popeţi Corneliu (1372, 374, 377, 383, E: 558, 559, 560, 561, 571, 572, 574), Rîmniceanu Dan (1372, 377, 389, E: 528, 547, 553, 554, 555, 558, 559, 572), Samson I. Alexandru (1372, 374, 377, 383, 392, E: 528, 551, 553, 554, 558, 559), Surubaru Vasile (1372, 374, 377, 383, 392, 402, 407, E: 528, 530, 547, 551, 553, 555, 558, 559, 560, 561), Nedelcovici Ştefan (1372, 377, 402, E: 528, 539, 546, 554, 559, 560, 561), Rusu Dan (1358, 372, 374, 375, 377, 381, 383, 384, 384, 386, 389, 392, 403, 403, 404, 405, E: 551, 552, 553, 558, 559, 560, 561, 562), Pinţă T. Radu (1372, 374, 377, 383, 389, 402, E: 528, 539, 540, 546, 554, 558, 559, 561), Stancu C. Alexandru (1372, 377, 403, E: 535, 536, 540, 546, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 568, 576), Stanchevici Bogdan (1372, 374, 377, 383, 388, 432, E: 559, 560, 562, 571, 572), Tudor Marin (1372, 374, 377, 383, 389, 392, 402, 404, 407, E: 528, 549, 551, 553, 554, 555, 558, 559, 560, 561, 572), Vasilescu I. Nicolae (1372, 374, 377, 383, 392, 407, E: 546, 551, 553, 555, 558, 560, 561),

Stere N. Gheorghe (1372, 377, 403, 432, E: 559, 564, 568, 571, 572, 574); clasa IX-a. Angelescu P. Alexandru (1346, 348, 354, 355, 356, 358, 362, 363, E: 535, 537, 538, 539, 540, 541, 546, 549), Aldea S. Mihai (1354, 358, 362, 365, 374, 375, 377, 378, 381, E: 536, 537, 540, 546), Cioltei Anca (1358, 372, 378, 410, 411, E: 544, 546, 568), *Chirică Andrei* (1333, 334, 335, 338, 339, 340, 343, 348, 350, 351, 354, 356, 358, 362, 363, 365, 374, 377, 378, 407, E: 525, 537, 539, 540, 544, 545, 546, 547, 559, 561, 563, 569, 574), Derer Ptere (1348, 350, 365, E: 536, 539, 540, 541, 546, 547, 548, 549, 559), Dumitrescu Nicolae (1354, 358, 362, E: 536, 537, 539, 540, 541, 544, 546, 547), Costeanu I. Sorin (1346, 348, 354, 356, 358, 362, 365, E: 535, 537, 538, 540, 541, 544, 546, 549), Dinu Constantin (1348, 354, E: 535, 537, 538, 539, 540, 541, 544, 546, 549), *Bogdan Mircea* (1346, 348, 350, 351, 354, 356, 358, 360, 362, 363, 365, 366, 370, 371, 372, 373, 374, 275, 377, 378, 379, 380, 383, 385, 386, 389, 392, 397, 403, 406, 407, E: 536, 537—549), Damian Şerban (1333, 335, 338, 430, 345, 349, 350, 363, 372, 377, 383, 392, E: 525, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 547, 549, 551, 552, 559, 563, 566, 568, 569, 571, 572), Gaşcu A. Mihail (1346, 351, 354, 360, 363, 365, 377, E: 536, 537, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 546, 547, 549, 558), Frîncu Viorel (1372, 374, 378, E: 535, 537, 539, 540, 542, 544, 549), Ionescu Al. Vladimir (1372, 375, 378, 407, 409, 416, 423, 436, E: 536, 537, 542, 544, 547, 558,) Ionescu Mircea (1348, 350, 465, 383, E: 536, 538, 539, 540, 541, 544, 546, 547, 548, 549, 552, 559,) Georgescu Sorin (1348, 358, 363, 365, E: 536, 537, 544, 559, 563, 574), Lipcan S. (1335, E: 523, 524, 527, 528, 529, 532, 533, 536, 538), Leonte Vasile (1354, 358, 362, 363, 365, E: 537, 539, 540, 544, 546, 547), Macri Ion (1346, 348, 362, 373, 365, 377, 378, E: 537, 540, 545, 547), Mateescu Mihail (1351, 354, 360, 361, 362, 364, E: 534, 536, 537, 540, 541, 546, 549), Petrescu M. Răsvan (1346, 347, 348, 350, 351, 354, 356, 358, 360, 362, 363, 365, 366, 370, E: 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549), Popescu Călin (1354, 358, 362, 363, 374, 378, E: 535, 537, 540, 546), Roman Barbu (1346, 358, 359, 362, E: 537, 538, 540, 544, 546, 547, 548), Şerbănescu Victor (1348, 350, 258, 365, E: 536, 539, 541, 546, 547, 548, 549), Spătaru Dinu (1354, 358, 362, 363, 366, 374, 377, 378, E: 537, 540, 545, 546), Rădulescu Gheorghe (1348, 354, 358, 363, 365, E: 535, 538, 539, 541, 544, 546, 547), Ştefănescu Dan (1348, 350, 354, 356, 358, 363, 365, E: 535, 536, 537, 538, 539, 541, 544, 547, 549), Văgăunescu Gheorghe (1346, 348, 350. 351, 354, 356, 358, 360, 362, 363, 365, 366, E: 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 545, 546, 547, 548, 549), Voicu Valentin (1354, 358, E: 536, 537, 539, 540, 544, 546, 547, 548); clasa X-a. *Lupuţiu Ioan* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 395, 396, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 319, 421, 423, 424, 425, 426, 429, 434, 436, 437, 438, P), *Kupferberg Albert* (1346, 348, 350, 354, 356, 358, 362, 363. 365, 366, 371, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 383, 385, 386, 403, 406, 408), Popescu Dumitru (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 385, 392, 405, 436), *Popovici Gh. Iulian* (1436, 348, 349, 351, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 369, 371, 388, 389, 390, 395, 396, 403, 404, 405, 406, 407); *absolvenţi*: *Parepa C. Grigore* (1319, 344, 354, 358, 364, 372, 373, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 392, 393, 403, 404, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, P).

RÎMNICUL SĂRAT. Clasa IX-a. Apostol Liliana (1377, 383, 386, 403, 432, 449, 464, E: 552, 558, 559, 563, 565, 568, 571, 574, 580, 586, 587, 588, P).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa IX-a. Ioaneş O. Sorin (1342, 354, 360, 361, E: 544, 546, 554, 557, 558), Paulescu N. Dan (1372, 375, 378, 385, 411, 416, 436, 439, E: 558, 560, 563, 567, 572, 574); clasa X-a. Cîrstoiu Barbu (1372, 373, 374, 377, 383, E: 504, 526, 540, 559), Popa Elian (1351, 354, 356, 360, 361, 362, 365, E: 535, 537, 538, 540, 547), Popescu Paul (1347, 354, 363, 372, 375, 378, 381, 383, E: 558, 559).

REŞIŢA. Clasa IX-a. Marchiş Ion (1349, 1358, E: 528, 538, 563, 566, 568, 573, 574).

REGHIN. *Antonescu Victor* (1375, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 427, 431, 432, 433, 434, 436, 437, 442, 449, 460, 464, E: 551, 557, 559. 568, 582, 584, 585, 586, 587, 588, P).

ROMAN. Clasa IX-a. Zolomir Eugenia (1354, 363, E: 535, 536, 537, 539, 540, 541. 546, 547, 559).

SATU-MARE. Clasa X-a. Sălăgeanu I. (1346, 372, 376, 377, 378, 379, 380, 406, 407, E: 538, 551, 559).

Sft. GHEORGHE. *Şcoala medie de textile*, anul III. Zaharia Gheorghe (1335, 336, E: 518, 519, 539, 540, 546, 559, 560, 563, 568, 571, 574).

SIBIU. Clasa VIII-a. Receanu Victoria (1347, 349, 385, E: 552, 561, 562, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590); clasa X-a. Dumitrescu I. Ilie (1335, 337, 354, 372, 375, 377, 378, 383, E: 534, 551), Schlesinger Toma (1347, 356, 358, 362, 372, 378, 382, 408, 416, 436); *Şcoala de măsurători terestre*, anul I. Ciutacu C. Dumitru (E: 563, 564, 569, 571, 574, 575, 580, 581, 587, 588); anul II. Bîrsan Ion (1349, 375, 434, 436, 442, 449, 460, E: 586, 587, 588). *Şcoala medie tehnică de mecanică*, anul I. Tudor Ioan (E: 536, 537, 540, 546, 547, 549, 557, 559, 560, 561). Alexandru Gheorghe (1349, 351, 353, 355, 362, 363, 366, 367, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 384, 385, 386, 392, 404, 405, 406), Epuraş Mircea (1346, 347, 351, 353, 354, 357, 359, 362, 364, 365, 368, 371, 373, 380, 397, 407, P), *Pupăzan Nicolae* (1372, 373, 375—386, 388, 389, 392, 393, 395, 396, 397, 403—406, 409—413, 416, 418, 419, 423, 424, 425, 431, 436, 438.

SLATINA. Clasa IX-a. Guran Virgil (1375, 378, 407, 449, E: 523, 528, 535, 546, 558, 559, 587, 588), Voiculeţ I. Gheorghe (1377, 416, 436, 449, E: 563, 568, 571, 574, 578, 586, 588); clasa X-a. Cîrstea Alexandru (1416, 432, 449, E: 551, 552, 554, 558, 559, 561, 564, 568, 576, 588), Ghergu N. Ion (1313, 381, 392, 403, 408, 411, 413, 436, 442, 449, P), Moşteanu D. Radu (1418, 427, 432, 441 449, 451, E: 558, 565, 567, 568, 578), Pavel P. Ion (1409, 411, 437, 442, 449, E: 563, 564, 565, 567, 568, 574, 578, 580).

SLĂNIC (Ploieşti). *Şcoala medie mixtă*, clasa IX-a. Curelea Iulian (1432, E: 558, 559, 561, 563, 467, 568, 571, 572, 574, 580, 586, 587, 588).

SUCEAVA. Clasa X-a *Rotaru Constantin* (1307, 311, 312, 314, 316, 317, 339, 344, 351, 362, 363, 367, 377, 382, 384, 396, 402, 404, 408, 408, 409, 411, 412, 416, 424, 436, E: 508, 515, 518, 519).

TÎRGOVIŞTE. Clasa IX-a. *Brebente P. Corneliu* (1294, 300, 301, 302, 303, 306, 316, 323, 346, 349, 354, 358, 362, 372, 373 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 385, 389, 390, 395, 403, 408,409, 410, 411, 413, 416, 434, 436, P), *Stănciulescu Mihai* (1359, 363, 364, 372, 379, 382, 389, 406, 411, 413, 416, 424, 425, 426, 427, 431, 432, 433, 437, 457, 459, P); clasa X-a. *Galaţki George* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 384, 385, 388, 390, 392, 397, 402, 403, 404, 408, 409, 410, 411, P).

TÎRGU-JIU. Clasa VI-a. Velicescu Mircea (1392, E: 537, 537, 539, 540, 541, 543, 544, 546, 547, 548, 549, 550, 552, 553, 554); clasa VII-a. Aniţescu N. Nicolae (1340, 342, 372, 377, 381, E: 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 551, 559); clasa IX-a. Amzulescu Ileana (1374, 383, 386, 404, 411, 416, 436, E: 558, 563, 568, 574).

TÎRGU MUREŞ. Clasa IX-a. *Hegedüs Atila* (1306, 340, 342, 433, 351, 354, 358, 362, 363, 364, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 384, 385, 392, 396, 403. 307), Matei Aurel (1354, E: 536, 537, 538, 539, 540, 541, 544, 546, 547); clasa X-a. Manole Nicolae (1354, 358, E: 535, 536, 537, 538, 539, 540, 544, 546, 547).

TECUCI. Clasa X-a. Bălan Gh. Mihai (1372, 373, 375, 378, 383, 416, 436, E: 558, 563, 568, 574, 575, 578, 579), Alter Moisă (1349, 351, 355, 358, 363, 365, 367, 368, 373, 379, 392, 403, 416, 436), Negoescu Emil (1349, 351, 355, 358, 363, 365, 367, 379, 392, 403, 416, 436).

TIMIŞOARA. Clasa VIII-a. Junger Agata (E: 532, 533, 538, 551, 559, 559, 563, 568, 569, 574, 575), Mihăileanu N. Constantin (1392, 397, 423, 449, 455 E: 568, 581, 584, 586

587). Clasa IX-a. *Arsenovici I. Tiberiu* (1324, 328, 335, 336, 337, 342, 354, 360, 361, E: 552, 523, 524, 525, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 546, 547), Nerodea Tiberiu (1372, 375, E: 550, 560, 561, 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574, 575), Popa Laurenţiu (1354, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 392, 402, 403, 405, E: 559), Vasilevici Alexandru (1372, 378, E: 558, 561, 563, 565, 568, 569, 571, 574, 575); clasa X-a. Vergheleţ Lev (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 381, 383, 402, 403, 409, 410, 413, 416, E: 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575,), Ganea Virgil (« Despre trigonometria patratică »). *Şcoala medie tehnică de construcţii*, anul II. Carol Leon (1373, 375, 379, 382, 409, 416, 436, E: 558, 559, 560, 561, 563, 567, 568, 571, 572, 574, P). *Şcoala pedagogică mixtă*, anul II. Iedu Ioan (E: 526, 528, 529, 531, 540, 546, 563, 566, 568, 571, 573, 574, 575), Kneipp Petru (E: 528, 529, 532, 535, 539, 540, 546. 549, 561, 563' 568, 571, 544, 575), Roşi Ioan)1315, E: 535, 546, 563, 566, 568, 571, 573, 574, 575), Ştefan Iosefa (E: 526, 529, 530, 533, 535, 539, 540, 541, 546, 547, 558, 559, 561), Radu Dorel (E: 526, 531, 535, 540, 546, 561, 563, 566, 568, 571, 573, 574, 575), Ştefanovici Ioan (E: 529, 535, 540, 546, 549, 551, 559, 561, 563, 566, 568, 571, 573, 574, 575), Ştefanovici Tiberiu, (1315, 337, 432, E: 515, 519, 529, 540, 546, 551, 559, 563, 566, 568, 571, 573, 574); anul IV. *Metiler Martin* (E: 512, 517, 522, 523, 524, 526, 529, 531, 532, 533, 537, 538, 539, 540, 543, 546, 547, 548, 549, 551, 552, 554, 558, 559, 560, 561, 562).

TURDA. Clasa IX-a. Radu Mihaela (« O metodă de ridicarea unui număr la patrat »).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII-a. Sălcianu Tudor (1432, 433, E: 560, 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. Ionescu Radu (1372, 375, 377, 378, 379, 383, 385, 407, 437, E: 554, 558, 559, 560, 563, 567, 568, 572, 574, 581, 586, 587, 588, P); clasa X-a. Tudosie Gh. Constantin (1409, 410, 411, 413, 416, 423, 426, 437, E: 563, 594, 565, 568, 569, 570, 574, 575).

ZALĂU. Clasa IX-a. Farcaş Beniamin (E: 576, 577, 578, 579, 580, 518, 585, 586, 587, 588).

ZIMNICEA. absolvent, Pietroşani. *Bătineţu M. Dumitru* (1297, 302, 304, 306, 2310, 312, 313, 315, 316, 323, 325, 329, 333, 334, 335, 336, 337, 339, 340, 342, 349, 359, 361, 362, 363, 365, 374, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 388, 390, 403, 405, 406, 413, 436, E: 524, 525, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, P).

*
* *

Soluţiile bune primite în cursul lunii februarie 1955 şi lista rezolvitorilor evidenţiaţi se anunţă în nr. următor.

ERATĂ. — La problema 1500 în loc de MN se va scrie MB.
— La problema 1606 în loc de $x-x$ se va scrie $x-c$.
— La pagina 144 rîndul 18 de jos în loc de 12, 12 se va scrie 12, 18.
— La problema E: 591 în loc de unui număr se va scrie unui număr impar.

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F. — seria B.*

— *Se primesc soluții numai* la problemele și exercițiile din ultimele *patru* numere apărute.

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului* 1955, *se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul* 1955.

— *Pentru anul* 1955, *G.M.F.* (*B*) *publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.*

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *In redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute, corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții au fost scrise îngrijit și sînt bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a «Olimpiadei matematice și fizice»*, pentruca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a presei București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat *să facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

Cititorii și colaboratorii revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care doresc să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15—18, miercuri între orele 10—13 și sîmbătă între orele 15—18 la sediul redacției din strada Academiei 14, București — Telefon 4.46.53.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi* de **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **I. S. Şklovski** (lei 6,85)

VA APARE:

Structura materiei de **V. Atanasiu**

• • •

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 5, PENTRU URMĂTOARELE ŞASE NUMERE

373. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul **Lei 1** exemplarul

OMK
E 1426
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Országos Múzeum Könyvtár
TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VI — Mai 1955

5

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 5 — Mai 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*«Olimpiada de matematică şi fizică 1955»*	197
2.	*Condiţii de mărime ale rădăcinilor ecuaţiei de gradul II de conf. univ. Marin Dumitrescu*	202
3.	*Similitudinea fizică de F. Koch*	208
4.	*Sume de sinusuri şi cosinusuri de arce în progresie aritmetică*	215
5.	*Cîteva aplicaţii ale antiparalelelor de Florin Constantinescu*	220
6.	*Caleidoscop fizic*	222
7.	*Chestiuni de examen (1635—1653)*	225
8.	*Probleme rezolvate (1297; 1302; 1312; 1314; 1349; 1363; 1365; 1372; 1373; 1374; 1376; E: 537; E: 540; E; 546; E: 547)*	227
9.	*Probleme propuse (1608—1634)*	234
10.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 638—E: 652)*	237
11.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	239

ANUL VI 5 MAI 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Kónyvtár
TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 5 Mai 1955

„OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1955"

LĂRGIND şi generalizînd concursurile de matematică organizate de vechea «Gazetă Matematică» — de la înfiinţarea căreia sărbătorim anul acesta 60 de ani — ca şi propria sa experienţă, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. (S.S.M.F.) a organizat în acest an a VI-a Olimpiadă pentru elevii şcolilor medii din ţară.

Scopurile acestei acţiuni au fost subliniate şi de ziarul «Scînteia», organul Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn în numărul său din 31.X. 1954, «Prin Olimpiadele de matematică şi fizică, organizate în anii şcolari trecuţi, elevii au avut posibilitatea să capete noi cunoştinţe, să adîncească pe cele primite în şcoală, să se obişnuiască cu munca independentă, să-şi dezvolte interesul pentru aceste importante discipline».

Spre deosebire de anii precedenţi, pregătirea «Olimpiadelor» s-a făcut în acest an şcolar, mai devreme: circularele S.S.M.F. şi ale Ministerului Învăţămîntului au ajuns la şcoli, secţii de învăţămînt, filiale, încă în octombrie 1954. Presa centrală: Scînteia, Romînia Liberă, Scînteia Tineretului ca şi Gazeta Matematică şi Fizică seria B, au anunţat de asemenea, la timp, organizarea «Olimpiadelor».

Ideea dublării «Olimpiadei de matematică» cu una de «fizică» — realizată în anii 1951 şi 1952 — a fost reluată în acest an.

Structura organizatorică a olimpiadelor în acest an s-a caracterizat prin atragerea în mai mare măsură a filialelor regionale ale S.S.M.F. în conducerea tuturor acţiunilor primelor trei etape (pe şcoală, pe localităţi, pe regiune), prin iniţiativa mai largă şi prin răspunderea deosebită ce le-a revenit.

În general, anunţarea şi pregătirea «Olimpiadei» a stîrnit — cum era şi de aşteptat — interesul elevilor şi profesorilor. Filiala Ploieşti a anunţat olimpiadele încă dinainte de începerea cursurilor şcolare pentru a fi trecută în planurile de muncă ale profesorilor şi şcolilor.

Filialele Arad, Bacău, Constanţa, Iaşi, Oraşul Stalin, etc. au folosit şedinţele cu directorii, cercurile pedagogice, pentru a populariza olimpiadele în rîndurile cadrelor didactice. În numeroase şcoli au apărut anunţuri în gazetele de perete sau în gazeta matematică a şcolii, s-au afişat anunţuri sau chemări mobilizatoare. Diriginţi, profesori de specialitate, organizaţii de U.T.M., au contribuit la menţinerea interesului elevilor pentru «Olimpiade».

«Olimpiada şcolii» (între 22.XI. şi 12.XII.1954) s-a organizat în cele mai multe şcoli medii sub forma de lucrare scrisă. În cîteva locuri ea s-a desfăşurat ca un concurs prin corespondenţă al gazetei de perete matematice (Şcoala medie de fete din Bîrlad) sau ca o serată matematică (şcolile medii nr. 1, 2, 4 din Tîrgu Mureş).

În regiunile unde această etapă a fost organizată pe scară mai largă (Arad, Constanța, Hunedoara, Iași, Ploiești, Reg. Autonomă Maghiară) ea a avut un caracter de masă (participînd pînă la 25—30% din numărul elevilor), a avut aspectul unei probe de control mai grele, a stimulat încrederea elevilor în forțele lor și a constituit o pregătire pentru etapa următoare.

Se pare însă, că nu în toate părțile s-a înțeles importanța acestei etape pentru atragerea elevilor într-o măsură mai mare spre studiul matematicii și al fizicii prin mijloace atractive, (șezătoarea științifică a școlii, victorine, concursuri scurte, cu probleme interesante, concursuri ale gazetei de perete, serate științifice interșcolare, excursii cu teme de matematică și fizică, etc.).

Etapa locală (20 respectiv 27 februarie a.c.) s-a desfășurat în 118 localități cu participarea a peste 16.000 elevi (din care peste 9800 la matematică) ceea ce reprezintă o lărgire evidentă față de anul trecut cînd au participat la matematică, aproape 7500 elevi din 70 localități.

Subiectele elaborate de comisiile din cele 4 centre universitare București, Iași, Cluj, Timișoara, au sosit din vreme la președinții comisiilor locale (cu excepția unora din regiunea Cluj). Subiectele depășind cu puțin doar, nivelul celor curente din manuale, au permis în general, selecționarea participanților pentru etapa următoare pe baza unor criterii unitare în mai multe regiuni vecine.

Temele trimise au constituit obiectul discuțiilor participanților la olimpiade și al profesorilor lor mult timp după aceea, au atras atenția asupra unor cunoștiințe care trebuie mai bine fixate, au dezvoltat dorința elevilor de a participa în viitor, în mai mare măsură, cu rezultate mai bune.

Ca o greutate generală se relevă lipsurile în cunoștințe ale elevilor de clasa VIII, anul I școli pedagogice, care au obținut rezultatele cele mai slabe în toată țara și situația școlilor medii tehnice, ai căror elevi au participat în mică măsură și cu rezultate, relativ slabe.

Subiectele date au avut unele nepotriviri față de materia parcursă dat fiind că la Iași și Cluj (pentru matematică) nu s-a asigurat legătura cu profesorii care predau efectiv în școli medii. De la Timișoara nu s-au trimis subiecte pentru școlile medii tehnice. Unele probleme nu au fost redactate astfel încît să prezinte elevului o gradație în abordarea lor (clasa IX-a, matematică, București și Iași) sau prea ușoare (clasa IX-a Timișoara și clasa X-a, Cluj, la matematică).

Prin acțiunea desfășurată de filialele S.S.M.F. cu sprijinul secțiilor de învățămînt a sfaturilor populare, olimpiadele și-au lărgit în general sfera de cuprindere, ca elevi și localități. În Regiunea Autonomă Maghiară au participat în acest an elevi din 6 localități, în regiunea Oradea, din 3 localități față de una în anul trecut. În regiunile Cluj și Ploiești etapa locală s-a desfășurat în cîte 11 localități, iar în regiunile Stalin și București (în afara Capitalei), în cîte 10 localități.

Au fost însă, unele comisii locale din vechi centre școlare, care au privit cu ușurință această acțiune așa încît ea nu a avut loc sau cu rezultate atît de slabe încît nici nu le-au mai comunicat, (Calafat, Caracal, Corabia, Reghin, Sinaia, Panciu, Beiuș, etc.).

Unele centre școlare noi, nu au acordat atenție «Olimpiadei» care le-ar fi permis să stimuleze interesul elevilor și să compare nivelul pregătirii lor cu cel al elevilor din alte localități ale regiunii (Lipova, Ineu în regiunea Arad, Slobozia, Zimnicea în regiunea București; Moinești: regiunea Bacău; Adjud, Zeletin, Vrancea — regiunea Bîrlad; Țintea, Filipeștii de pădure, Urziceni — regiunea Ploiești; Teiuș — regiunea Hunedoara; Huedin — regiunea Cluj; Fetești — regiunea Constanța).

O altă lipsă serioasă de ordin educativ, semnalată în această etapă, este atitudinea greșită a unor elevi și profesori ceea ce a dus nu numai la existența unor lucrări foarte asemănătoare dar și la evidențierea lor (Aiud și Zalău, recidiviști; Tîrgu Neamț, Tîrgu Ocna (Bacău), Ocna Mureș Luduș (Cluj), Breaza, Pătîrlagele, Pucioasa (Ploiești)). Acest fenomen trebuie să dea serios de gîndit organelor locale și să conducă la luarea unor măsuri corespunzătoare.

În fine, nerespectarea termenelor la care trebuiau trimise rezultatele la centrele regionale însoțite de dările de seamă respective, a dus la imposibilitatea participării la etapa regională a unor elevi evidențiați (Babadag, reg. Constanța, Petroșani și Orăștie, reg. Hunedoara) sau a provocat mari greutăți comisiilor regionale și centrale.

Etapa din 3, respectiv 10 aprilie a.c. s-a desfășurat în toate reședințele de regiune, cu participarea a aproape 3000 elevi (din care 1700 la matematici), din peste 95 localități, reprezentînd toate tipurile de școli și cu diferite limbi de predare. Dintre participanți, peste 800 elevi s-au deplasat din 75 localități. Pentru asigurarea condițiilor materiale de deplasare, de cazare și masă și premiere s-au folosit atît mijloacele puse la dispoziție de S.S.M.F., cît și cele locale. Toate acestea dovedesc menținerea interesului arătat de elevi, școli, părinți, organe locale pentru olimpiade, avîntul tineresc de a participa și la întreceri tovărășești științifice, nu numai artistice sau sportive.

Subiectele date la această etapă au fost unice pe întreaga țară și cereau o cunoaștere mai adîncă și sintetică a materiei parcurse, posibilități mai largi de aplicații, îndemînare de organizare a calculelor, vedere în spațiu, etc. Subiectele au fost în general, adecvate scopului urmărit. La fizică au fost unele nepotriviri: în Ardeal, clasa VIII-a, la etapa precedentă a avut același subiect; la clasa IX-a, subiectul nu fusese parcurs încă, la multe școli; unele probleme au fost mai ușoare decît la etapa precedentă și nu au fost cerute lucrări practice.

Rezultatele obținute — peste 600 elevi evidențiați, au dovedit în general, o creștere a nivelului de cunoștințe, în comparație cu anii precedenți, la clasa a IX-a și a X-a la matematici și la clasele a VIII-a și a X-a la fizică. S-a văzut totodată că nu pot obține rezultate bune, la această etapă, decît elevi care au o bogată activitate extrașcolară (la cercurile de matematică și de fizică pe școală sau pe oraș, la «Gazeta Matematică și Fizică, seria B, etc.).

În aceeași zi în care au avut loc olimpiadele, s-au comunicat în general, și rezultatele și s-au distribuit premiile elevilor evidențiați. Din cauza unor greutăți de natură bancară, în unele regiuni această distribuire nu s-a putut face îndată.

În buna desfășurare a primelor trei etape ale olimpiadelor de matematică și fizică s-au evidențiat filialele: Ploiești, pentru întreaga muncă organizatorică și analiza amplă făcută rezultatelor obținute, Cluj pentru seriozitatea cu care a triat rezultatele din regiune, Arad pentru organizarea exemplară pe oraș, Bacău, Baia Mare, Deva, Iași, Orașul Stalin pentru atenția acordată centrelor din regiune. Alte filiale însă, au continuat să acorde o atenție insuficientă acestei acțiuni. Filiala Galați a neglijat cu totul, regiunea; filiala Bîrlad a lăsat multă vreme ca lucrurile să meargă de la sine; filialele Constanța, Craiova, Pitești, Timișoara au îndrumat în slabă măsură comisiile locale și au informat cu totul insuficient comisia centrală asupra desfășurării «Olimpiadei». Aceste filiale nu au știut nici să-și asigure sprijinul secțiilor de învățămînt în măsură suficientă.

Etapa finală (pe țară) a «Olimpiadei» s-a desfășurat în București în ziua de 2 mai a.c. în sălile Facultății de Matematică și Fizică a Universității «C. I. Parhon». Au participat 298 elevi din 51 localități (față de 144 elevi din 40 loca-

lități în 1954) reprezentînd toate tipurile de școli medii, cu limbă de predare romînă, maghiară, germană și de diferite naționalități.

Temele date la această etapă se publică în numărul următor al «G.M.F.» seria B. Ele sînt de un nivel superior celor din etapele precedente și au permis o selecționare a evidențiaților în bune condiții.

Participanților la etapa pe țară — elevi și profesori — li s-au oferit un program variat: participarea la demonstrația de 1 Mai în Capitală, vizionarea spectacolului «Macul Roșu» la Teatrul de Operă și Balet al R.P.R., vizionarea muzeului «Gr. Antipa», al Galeriei Naționale de Artă, a Expoziției Tehnice a R.D. Germane, a Expoziției de Artă Chineză, etc.

Profesorii însoțitori au participat la Sesiunea Științifică a S.S.M.F.

Ședința festivă de închidere a «Olimpiadei de Matematică și Fizică 1955» a avut loc în seara zilei de 3 mai în prezența unui mare număr de elevi și profesori, a reprezentanților Academiei R.P.R., Ministerului Învățămîntului, Universității «C. I. Parhon», U.T.M.-ului.

În cuvîntările lor, tov. acad. Gr. C. Moisil și conf. univ. T. Roman, din partea S.S.M.F., prof. Al. Bojin, din partea Ministerului Învățămîntului, Cristea Ion din partea elevilor participanți la «Olimpiadă», au subliniat rolul matematicii și fizicii în formarea cadrelor necesare construcției socialiste a R.P.R., interesul elevilor și profesorilor pentru însușirea acestor discipline, aportul dat de S.S.M.F., sprijinul acordat de Ministerul Învățămîntului. S-au înmînat apoi, elevilor evidențiați, diplomele de merit și premiile. Lista lor (22 premiați și 15 menționați la matematică și 25 premiați și 11 menționați, la fizică, din 24 localități), este publicată mai jos.

În concluzie, «Olimpiada de Matematică și Fizică 1955», s-a desfășurat în general, la un nivel superior celui din anii trecuți în special prin lărgirea cuprinderii de elevi, școli, localități, discipline. A crescut totodată, interesul profesorilor, părinților.

Rezultatele obținute dovedesc capacitatea de muncă a elevilor fruntași și orizontul larg ce li se deschide. Este însă necesar, ca în fiecare regiune să se analizeze rezultatele amănunțite, locale, care să permită luarea de măsuri în vederea lichidării lipsurilor semnalate. De asemenea, S.S.M.F. și Ministerul Învățămîntului vor analiza rezultatele de ansamblu atît de ordin organizatoric cît și de conținut.

Ministerul Învățămîntului, Direcția Generală a Învățămîntului Mediu și Elementar, a sprijinit această acțiune atît material cît și prin sarcinile trasate organelor sale locale, însă nu toate organele locale (secțiile de învățămînt și filialele S.S.M.F.) au dovedit același interes și au obținut rezultate la fel de bune.

Cadrele didactice de specialitate au sprijinit din toată inima în majoritatea lor, această acțiune, atît prin pregătirea elevilor, prin interesarea lor, prin munca suplimentară prestată, cît și prin entuziasmul insuflat pentru știință, pentru cultură, ceea ce dovedește în fond, patriotismul lor fierbinte. Conducerea S.S.M.F. transmite și pe această cale felicitările sale școlilor și profesorilor care au obținut cele mai bune rezultate în olimpiadele acestui an și urări de noi succese tuturor profesorilor de matematică și de fizică, în activitatea lor rodnică de educarea tinerii generații.

Rezultatele bune ale olimpiadelor viitoare depind de întărirea succeselor și metodelor bune de pînă acum și de lichidarea tuturor lipsurilor semnalate. S.S.M.F. trebuie să-și mobilizeze toate forțele pentru realizarea acestei sarcini.

EVIDENŢIAŢII LA ETAPA FINALĂ (PE ŢARĂ) A « OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ » 1955

Premiul I

1. Cristea I. Ion, clasa X-a, Constanţa
2. Cantaragiu Gheorghe, clasa III-a, s.m.b. 17, Bucureşti
3. Bădescu Marcel, clasa X-a, s.m.b. 4, Bucureşti
4. Roitman Abram, clasa IX-a, Constanţa

Premiul II

1. Arion Adrian, clasa VIII-a, Botoşani
2. Lerner Emil, clasa VIII-a, s.m.b. 17, Bucureşti
3. Stepan Ionel, anul III, s.m. hidrotehnică, Constanţa
4. Stănăşilă Octavian, clasa X-a, s.m.b. 4, Bucureşti
5. Puius Tiberiu, clasa IX-a, s.m.b. 20, Bucureşti
6. Fluerașu Cezar, clasa IX-a, s.m.b. 13, Bucureşti

Premiul III

1. Piso Pompiliu, clasa VIII-a, Tîrnăveni
2. Tomescu C. Dan, clasa X-a, s.m.b. 13, Bucureşti
3. Stroe Radu, clasa X-a, Ploieşti
4. Iordache I. Dan, clasa X-a, Constanţa
5. Şerb Gabriel Adrian, clasa X-a, Piteşti
6. Ştefan Iosefa, an I, s.m. pedagogică. Timişoara
7. Pion Re Yoan, an II, s.m.t. siderurgică, Hunedoara
8. Popescu Paul, an II, s.m.t. măsurători terestre, Bucureşti
9. Panea Ştefan, an IV, a.m.t. construcţii, Oradea
10. Szasz Carol, an I, s.m.t.c.f.r., Cluj
11. Voiculescu Sanda, clasa IX-a s.m.f. 10, Bucureşti
12. Harnik Victor, clasa IX-a, s.m.b. 17, Bucureşti

Menţiuni

1. Hărdălău M., clasa VIII-a, Timişoara
2. Pic C. Gheorghe, clasa VIII-a, Cîmpia Turzii
3. Andricioaiei Gh. clasa VIII-a, Botoşani
4. Chirică Andrei, clasa IX-a. Ploieşti
5. Iosif Gheorghe, clasa IX-a, s.m.b. 17, Bucureşti
6. Mătasă Eugen, clasa IX-a, Oraşul Stalin
7. Rizescu Mioara, clasa IX-a, Oraşul Stalin
8. Lupuţiu Ion, clasa X-a, Ploieşti
9. Guiaşu Silviu, clasa X-a, Oradea
10. Rus A. Ioan, clasa X-a, Oradea
11. Stănuleţ Constantin, clasa X-a, Turnu Severin
12. Codiţă Virginia, clasa X-a, s.m.f. 22, Bucureşti
13. Crăcană I. Petrea, an II, s.m. pedagogică, Iaşi
14. Beloia Sava, an II, s.m. pedagogică, Caransebeş
15. Memet Geait, an III, s.m. hidrotehnică, Constanţa

EVIDENŢIAŢII LA ETAPA FINALĂ (PE ŢARĂ) A « OLIMPIADEI DE FIZICĂ » 1955

Premiul I

1. Constantinescu Dan, clasa VIII-a, s.m. 17, Bucureşti
2. Ceapîru Mihai, clasa VIII-a, s.m.b. 17, Bucureşti
3. Chişleag Radu, clasa IX-a, s.m.b. 1, Iaşi
4. Breban Mircea, clasa X-a s.m.b., Oradea

Premiul II

1. Rădulescu Ileana, clasa VIII-a, s.m.f. 8, Bucureşti
2. Negulescu Dan, clasa VIII-a, s.m.b. 13, Bucureşti
3. Şerbănescu Dan, clasa IX-a, s.m.b., Turnu Severin

4. Grosu Florin, clasa IX-a, s.m.b. 1, Galaţi
5. Mătasă Eugen, clasa IX-a, s.m.b., Oraşul Stalin
6. Iliescu Paraschiva, clasa X-a, s.m.f., Iaşi
7. Guiaşu Silviu, clasa X-a, s.m.b. Oradea
8. Chiculiţă M., Clasa X-a, s.m.b., Galaţi

Premiul III

1. Popescu Maria, clasa VIII-a, s.m.f. 8, Bucureşti,
2. Nicolescu Anca, clasa VIII-a, s.m.f. 8, Bucureşti
3. Gruia Nicolae, clasa VIII-a, s.m.b. 4, Bucureşti
4. Ancuţoiu Gh., clasa VIII-a, s.m.b. 1, Rîmnicu Vilcea
5. Demetrescu Crişan, clasa IX-a, s.m.b. 1, Bucureşti
6. Matei Ioan, clasa IX-a, s.m.b. Piteşti
7. Pop Eugen, clasa IX-a, s.m.b. Tîrgovişte
8. Prisăceanu Margareta, clasa IX-a, Curtea de Argeş
9. Colibaba Tiberiu, clasa X-a, s.m.b., Galaţi
10. Parnia Letiţia, clasa X-a, s.m.f. Tîrgovişte
11. Burlacu Veronica, clasa X-a, s.m. Lugoj
12. Hoffer M., clasa X-a, s.m.b. 1, Bucureşti
13. Constantinescu Iosefina, clasa X-a, s.m.f. 15, Bucureşti

Menţiuni

1. Ionescu Dumitru, clasa VIII-a, s.m.b. 4, Bucureşti
2. Tudor Tiberiu, clasa VIII-a, s.m.b., Tîrgu Mureş
3. Stamatescu Ion, clasa VIII-a, s.m. « N. Bălcescu », Tîrgovişte
4. Şatran Iulian, clasa VIII-a, s.m.b., Fălticeni
5. Breahnă Elena, clasa IX, s.m.f., Bacău
6. Apetri Nicolae, clasa IX-a s.m.b., Botoşani
7. Nicolescu Dan, clasa IX-a s.m.b., Călăraşi
8. Ionuţ Horia, clasa IX-a, Oraşul Stalin
9. Mihăilescu Valeriu, clasa X-a, s.m.b. 4, Bucureşti
10. Jurian Mariana, s.m.f. Constanţa
11. Roman Istvan, clasa X-a, s.mm. 4, Oradea

CONDIŢII DE MĂRIME ALE RĂDĂCINILOR ECUAŢIEI DE GRADUL II

MARIN DUMITRESCU

Conf. univ. Institutul Politehnic, Bucureşti

STUDIUL ecuaţiei de gradul al II-lea formează unul din capitolele fundamentale ale algebrei elementare, dat fiind faptul că utilizarea ei în ramurile practice — fizica, mecanica, etc. — este întîlnită la tot pasul.

Cu toate acestea, manualele de algebră pentru învăţămîntul mediu prezintă cel mult discuţia rădăcinilor ecuaţiei de gradul II ai cărei coeficienţi depind de un parametru, fără să pună vreo problemă de mărime a rădăcinilor ecuaţiei faţă de anumite cantităţi date, deşi sub acest aspect problema este destul de interesantă.

În cele ce urmează vrem să atragem atenţia asupra cîtorva probleme care de altfel, ar putea fi cunoscute în parte unora dintre cititori, privind condiţii de mărime ale rădăcinilor ecuaţiei de gradul al II-lea.

I. În ce condiţii rădăcinile x' şi x'' ale ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

sînt amîndouă mai mici decît o cantitate dată m?

Să punem pentru aceasta $z = x - m$ sau $x = z + m$ şi să transformăm ecuaţia (1)

$$a(z + m)^2 + b(z + m) + c = 0 \qquad (2)$$

sau dezvoltînd şi ordonînd

$$az^2 + (2am + b)z + am^2 + bm + c = 0 \qquad (3)$$

Discriminantul ecuaţiei (3) este

$$\Delta = (2am + b)^2 - 4a(am^2 + bm + c) = b^2 - 4ac$$

adică tocmai discriminantul ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$ ceea ce ne arată că dacă ecuaţia (1) are rădăcini reale, atunci şi ecuaţia (2), respectiv (3) are rădăcini reale.

Cum între rădăcinile x' şi x'' ale ecuaţiei (1) şi rădăcinile z' şi z'' ale ecuaţiei (3) avem legătura

$$z' = x' - m \text{ şi } z'' = x'' - m \qquad (4)$$

rezultă că în condiţia problemei noastre, ca rădăcinile x' şi x'' ale ecuaţiei (1) să fie mai mici decît o cantitate dată m; z' şi z'' vor avea valori negative.

Dar cum z' şi z'' sînt rădăcinile ecuaţiei (3) ştim că ele vor fi negative dacă produsul lor este pozitiv, iar suma lor negativă, adică dacă avem

$$P = \frac{am^2 + bm + c}{a} > 0 \quad \text{şi} \quad S = -\frac{2am + b}{a} < 0$$

sau

$$P = \frac{am^2 + bm + c}{a} > 0 \quad \text{şi} \quad S = \frac{2am + b}{a} > 0 \qquad (5)$$

ceea ce rezolvă problema propusă.

II. Să vedem acum în ce condiţii rădăcinile ecuaţiei (1) sînt amîndouă mai mari decît o cantitate dată m.

Urmînd aceiaşi cale ca în cazul (I) găsim că în situaţia de faţă rădăcinile z' şi z'' ale ecuaţiei transformate (3) vor trebui să fie pozitive, ceea ce are loc cînd produsul şi suma rădăcinilor sînt fiecare pozitive adică, cînd avem

$$P = \frac{am^2 + bm + c}{a} > 0 \quad \text{şi} \quad S = -\frac{2am + b}{a} > 0$$

sau

$$P = \frac{am^2 + bm + c}{a} > 0 \quad \text{şi} \quad S = \frac{2am + b}{a} < 0 \qquad (6)$$

Pentru a ne da seama în mod practic de cele expuse mai sus, să facem următoarea aplicaţie.

Dacă λ variază dela $-\infty$ la $+\infty$ să se afle mărimea rădăcinilor ecuaţei

$$(3\lambda - 2)x^2 - (2\lambda + 1)x - \lambda = 0 \qquad (7)$$

faţă de 2. Discriminantul ecuaţiei (7) este

$$\Delta = (2\lambda + 1)^2 + 4\lambda(3\lambda - 2) = 16\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

şi el este pozitiv pentru orice valoare a lui λ, de la $-\infty$ la $+\infty$, fiind un trinom de gradul II cu rădăcinile complexe şi coeficientul lui λ^2 pozitiv; ca atare, rădăcinile ecuaţiei propuse sînt reale oricare ar fi valoarea reală a lui λ.

Făcînd în ecuaţia (7) substituţia $z = x - 2$ sau $x = z + 2$ ecuaţia transformată este

$$(3\lambda - 2)z^2 + (10\lambda - 9)z + 7\lambda - 10 = 0 \qquad (8)$$

unde produsul (P) şi suma (S) a rădăcinilor sînt respectiv

$$P = \frac{7\lambda - 10}{3\lambda - 2}; \qquad S = -\frac{10\lambda - 9}{3\lambda - 2}$$

şi al căror semn trebuie precizat pentru a răspunde problemei propuse.

În acest scop alcătuim tabloul variaţiilor

λ	Δ	$7\lambda - 10$	$3\lambda - 2$	$10\lambda - 9$	P	S
$-\infty$						
	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
$\frac{2}{3}$			0			
	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{9}{10}$				0		
	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\frac{10}{7}$		0				
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$+\infty$						

Din tabloul alcătuit rezultă că:

$$\lambda < \frac{2}{3} \quad \text{sau} \quad \lambda \geqslant \frac{10}{7}$$

satisface condiţiilor (5), deci ecuaţia (7) va avea pentru aceste valori ale lui λ, rădăcinile mai mici decît 2.

III. Un alt caz ar fi condiţia ca una din rădăcinile ecuaţiei (1) să fie mai mică iar cealaltă rădăcină mai mare decît o cantitate dată m; cu alte cuvinte cantitatea m să fie cuprinsă între cele două rădăcini ale ecuaţiei date.

Să facem în ecuaţia (1) transformarea $x = z + m$ sau $z = x - m$.

Cum în cazul de faţă o rădăcină x' a ecuaţiei (1) trebuie să fie mai mică decît m, iar cealaltă rădăcină x'' mai mare decît m, rezultă că rădăcinile z' şi z'' ale ecuaţiei transformate (3), ce sînt legate de rădăcinile ecuaţiei date (1) prin relaţiile $z' = x' - m$ şi $z'' = x'' - m$ sînt una negativă şi cealaltă pozitivă; ca atare, produsul $(z' \cdot z'')$ al rădăcinilor ecuaţiei transformate (3) trebuie să fie negativ, adică să avem

$$\frac{am^2 + bm + c}{a} < 0 \qquad (9)$$

Cum a — coeficientul lui x^2 din ecuaţia dată (1) — poate fi făcut totdeauna pozitiv, înseamnă că putem înmulţi numărătorul şi numitorul inegalităţii (9) cu a, obţinînd $\frac{a(am^2 + bm + c)}{a^2} < 0$ sau

$$a(am^2 + bm + c) < 0 \qquad (10)$$

care este *condiția ca o rădăcină a ecuației* (1) *să fie mai mică decît o cantitate dată m, iar cealaltă mai mare decît m.*

Să luăm de exemplu, ecuația

$$(\lambda^2 - 1)\, x^2 - (2\lambda + 1)\, x + 1 = 0 \qquad (11)$$

unde λ fiind un parametru ce variază de la $-\infty$ la $+\infty$. Vrem să determinăm valorile lui λ, așa fel ca o rădăcină a ecuației date să fie mai mică, iar cealaltă mai mare decît 3. Discriminantul ecuației (11) este $\Delta = (2\lambda + 1)^2 - -4(\lambda^2 - 1) = 4\lambda + 5$ și pentru $\lambda > -\frac{5}{4}$ fiind pozitiv, rădăcinile ecuației (11) sînt reale.

În relația de condiție (10) stabilită pentru cazul general, punînd pentru exemplul nostru $a = (\lambda^2 - 1)$; $b = -(2\lambda + 1)$; $c = 1$; $m = 3$ obținem expresia

$$E = (\lambda^2 - 1)(9\lambda^2 - 6\lambda - 11) < 0 \qquad (12)$$

ce urmează a vedea pentru ce valori ale lui λ este satisfăcută, în care scop alcătuim tabloul variațiilor lui λ, după intervalele determinate de rădăcinile factorilor expresiei (12) în domeniul de realitate al rădăcinilor ecuației (11).

λ	Δ	$\lambda^2 - 1$	$9\lambda^2 - 6\lambda - 11$	E
$-\infty$				
	$-$	$+$	$+$	$+$
$-\frac{5}{4}$	0			
	$+$	$+$	$+$	$+$
-1		0		
	$+$	$-$	$+$	$-$
$\frac{1-2\sqrt{3}}{3}$			0	
	$+$	$-$	$-$	$+$
$+1$			0	
	$+$	$+$	$-$	$-$
$\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$			0	
	$+$	$+$	$+$	$+$
$+\infty$				

Tabloul variațiilor lui λ ne precizează că relația de condiție a problemei, adică valorile lui λ pentru care expresia E a relației (12) este îndeplinită sînt

$$-1 < \lambda < \frac{1-2\sqrt{3}}{3} \quad \text{și} \quad +1 < \lambda < \frac{1+2\sqrt{3}}{3}$$

IV. Un alt caz al mărimilor rădăcinilor ecuației (1) poate fi tras din condiția ca una din rădăcini să fie mai mică decît o cantitate m și cealaltă mai mare decît o cantitate n (m și n fiind cantități diferite și anume $m<n$).

Acest caz echivalează în fond, cu condiția ca cele două cantități m și n să fie cuprinse între rădăcinile ecuației (1).

Însă am văzut în cazul (III) care este condiția ca o cantitate să fie cuprinsă între cele două rădăcini ale ecuației date.

În cazul de față urmînd ca atît m cît și n să fie cuprinse între cele două rădăcini ale ecuației (1) trebuie să avem satisfăcută condiția (10) pentru fiecare din cantitățile m și n, adică

$$a(am^2 + bm + c) < 0 \quad \text{și} \quad a(an^2 + bn + c) < 0. \tag{13}$$

De exemplu, ce valori poate lua parametrul λ pentru ca rădăcinile ecuației

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \tag{14}$$

să fie, una mai mică decît 1, iar cealaltă mai mare decît 2.

Discriminantul ecuației (14) este $\Delta = \lambda - 1$; el schimbă de semn pentru $\lambda = 1$ dînd rădăcini reale pentru $\lambda > 1$.

De asemenea, inegalitățile de condiție (13) devin pentru problema noastră, punînd $m = 1$; $n = 2$; $a = 1$; $b = -2\lambda$; $c = \lambda^2 - \lambda + 1$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 < 0 \quad \text{și} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 5 < 0 \tag{15}$$

Alcătuim tabloul variațiilor parametrului λ.

λ	$\lambda - 1$	$\lambda^2 - 3\lambda + 1$	$\lambda^2 - 5\lambda + 5$
$-\infty$	$-$	$+$	$+$
$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		0	
	$-$	$-$	$+$
1	0		
	$+$	$-$	$+$
$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$			0
	$+$	$-$	$-$
$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		0	
	$+$	$+$	$-$
$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$			0
	$+$	$+$	$+$
$+\infty$			

Din cercetarea tabloului format rezultă că inegalitățile (15) cerute de condițiile problemei noastre sînt îndeplinite simultan numai în intervalul $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ adică numai pentru valorile $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < \lambda < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

V. În fine, o altă condiție ce poate fi impusă rădăcinile ecuației (1) este aceea ca ele să rămînă cuprinse între două cantități date m și n $(m < n)$; adică, amîndouă rădăcinile să fie în același timp superioare lui m dar inferioare lui n.

Pentru a găsi condiția impusă să facem în ecuația (1) substituția $z = \frac{x-m}{x-n}$ sau $x = \frac{nz-m}{z-1}$ ceea ce ne dă

$$a\left(\frac{nz-m}{z-1}\right)^2 + b\left(\frac{nz-m}{z-1}\right) + c = 0$$

sau dezvoltînd şi ordonînd,

$$(an^2 + bn + c)\, z^2 - (2amn + bm + bn + 2c)\, z + (am^2 + bm + c) = 0 \quad (16)$$

Discriminantul ecuaţiei transformate (16) este

$$\Delta = (2amn + bm + bn + 2c)^2 - 4\,(an^2 + bn + c)\,(am^2 + bm + c)$$

sau

$$\Delta = (b^2 - 4\,ac)\,(m - n)^2$$

ceea ce ne spune că ecuaţia transformată (16) are rădăcinile reale în acelaş timp cu ecuaţia dată (1).

Fie x' şi x'' cele două rădăcini ale ecuaţiei date (1); dacă ele rămîn cuprinse între cantităţile date m şi n, atunci rădăcinile ecuaţiei transformate (16) $z' = \dfrac{x' - m}{x' - n}$ şi $z'' = \dfrac{x'' - m}{x'' - n}$ sînt amîndouă negative, deoarece numitorii $(x' - n)$ şi $(x' - n)$ sînt negativi.

Astfel, răspunsul la condiţia că rădăcinile x' şi x'' ale ecuaţiei (1) să rămînă cuprinse între cele două cantităţi date m şi n îl obţinem scriind ca rădăcinile ecuaţiei transformate (16) să fie amîndouă negative. Aceasta înseamnă că ecuaţia transformată (16) are produsul rădăcinilor pozitiv, iar suma lor negativă, adică

$$P = \frac{am^2 + bm + c}{an^2 + bn + c} > 0 \quad \text{şi} \quad S = \frac{2amn + bm + bn + 2c}{an^2 + bn + c} < 0 \quad (17)$$

Să vedem de exemplu, pentru ce valori ale parametrului λ rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - (\lambda^2 - 5)\, x + 4\,(\lambda + 2) = 0 \quad (18)$$

rămîn cuprinse între -1 şi $+1$.

Discriminantul ecuaţiei (18) este

$$\Delta = (\lambda^2 - 5)^2 - 16\,(\lambda + 2) = \lambda^4 - 10\,\lambda^2 - 16\,\lambda - 7$$

sau

$$\Delta = (\lambda + 1)^2\,(\lambda^2 - 2\,\lambda - 7)$$

Discriminantul schimbă de semn numai pentru valori ale lui λ ce anulează trinomul $(\lambda^2 - 2\,\lambda - 7)$; adică pentru $\lambda = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

În cazul problemei noastre, punînd $a = 1$; $b = -(\lambda^2 - 5)$; $c = 4\,(\lambda + 2)$; $m = -1$; $n = +1$ relaţiile generale (17) care ne dau condiţiile ca rădăcinile unei ecuaţii de gradul II să rămînă cuprinse între două cantităţi date devin

$$P = -\frac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{\lambda^2 - 4\lambda - 14} > 0 \quad \text{şi} \quad S = -\frac{2\,(4\lambda + 7)}{\lambda^2 - 4\lambda - 14} < 0 \quad (19)$$

Întrucît $(\lambda^2 + 4\lambda + 4)$ este un patrat perfect, semnul lui P depinde numai de trinomul dela numitor ale cărui rădăcini sînt: $\lambda = 2 \pm 3\sqrt{2}$.

Semnul lui S depinde atît de numitor cît şi de numărător ce se anulează pentru $\lambda = -\dfrac{7}{4}$

Putem alcătui tabloul variaţiilor

λ	Δ	$\lambda^2-4\lambda-14$	$4\lambda+7$	P	S
$-\infty$					
	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$2-3\sqrt{2}$		0			
	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
$1-2\sqrt{2}$	0				
	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
$-\frac{7}{4}$			0		
	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$1+2\sqrt{2}$	0				
	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2+3\sqrt{2}$		0			
	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$+\infty$					

Din cercetarea tabloului alcătuit se vede imediat că relaţiile de condiţie (19) sînt îndeplinite numai pentru valorile $2-3\sqrt{2}<\lambda<1-2\sqrt{2}$.

Din cele reamintite tinerilor noştri cititori prin articolul de faţă, se vede cît de interesante probleme se pot pune asupra condiţiilor de mărime ale rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al II-lea.

Ele pot fi de mare folos, mai ales acelora dintre cititorii noştri care îşi vor îndrepta drumul spre învăţămîntul tehnic superior, ajutîndu-i la pregătirea lor temeinică în vederea susţinerii cu succes a examenului de admitere.

SIMILITUDINEA FIZICĂ

F. KOCH

lector la Universitatea «Bolyai» Cluj

ELABORAREA teoriei similitudinii (asemănării) în fizică a fost determinată de o importantă problemă tehnică: trebuia găsit procedeul numeric cu ajutorul căruia să se poată executa aparate, maşini, etc. pe baza datelor determinate pentru machete (modele mici). Aceiaşi problemă s-a pus la construcţia avioanelor, navelor, turbinelor precum şi în legătură cu transmiterea căldurii.

Folosirea modelelor la experienţe datează abia, de 30—40 ani. Un rol însemnat în elaborarea teoriei l-au avut cercetătorii ruşi şi sovietici. Astfel în 1874, V. L. Kirpisev a aplicat cu succes, teoria similitudinii la cercetarea proceselor elastice ale materiei. Mai tîrziu, A. Federman şi H. A. Guhman au stabilit legile similitudinii.

Să vedem mai întîi, ce se înţelege prin modele în fizică. În majoritatea cazurilor, prin modele se înţelege construcţia în proporţii micşorate a unei clădiri, maşini, a unui aparat tehnic, etc. Asemenea modele se pot împărţi în trei grupe. Din prima grupă fac parte acelea, a căror scop este intuiţia — aşa sînt modelele de poduri, de clădiri, etc. Din grupa a doua, fac parte modelele construite cu scopuri didactice; la construcţia acestora, importantă este nu asemănarea geometrică ci identitatea proceselor fizice. Aşa sînt construite de exemplu, modelele maşinilor cu abur. Din grupa a treia fac

parte modelele cu care se pot efectua experienţe şi ale căror date pot fi folosite pentru proiectarea construcţiilor respective în mărime naturală. Despre acestea vom vorbi mai amănunţit, la locul potrivit.

Elaborarea teoriei similitudinii a fost necesară pentru că rezolvarea unor probleme tehnice cu calcul este greoaie, iar pe de altă parte experienţa cu aparatul respectiv în mărime naturală, este costisitoare. Din cauza aceasta fenomenul este studiat asupra modelului care se realizează uşor şi la care datele necesare se pot determina prin experienţe directe — acesata este cercetarea pe modele.

Experienţa pe modele se foloseşte şi la construcţii hidraulice. Din numeroasele rezultate la care a ajuns hidraulica cu ajutorul modelelor vom menţiona numai unul.

Formarea aluviunilor fluviale a fost stabilită în laboratoare prin studiul mişcării apei în canale de sticlă. Pentru explicarea formării aluviunilor există o formulă matematică însă aceasta nu este satisfăcătoare.

La modele, în laborator, se poate observa bine mişcarea pietrişului, la prima vedere poate, dezordonată, care cu timpul duce la formarea bancurilor şi a golfurilor.

Schimbările care în realitate se produc în ani de zile, la experienţe pe modele se produc în zile.

1. *Noţiunea şi definiţia similitudinii.* Noţiunea de asemănare a fost cunoscută pentru prima dată în geometrie, de unde a fost adoptat şi termenul. Să examinăm cîteva figuri geometrice asemenea; de exemplu, la triunghiurile asemenea reprezentate în fig. 1, unghiurile corespunzătoare sînt egale, iar, laturile asemenea, proporţionale, adică

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_3''}{l_3'} = c.$$

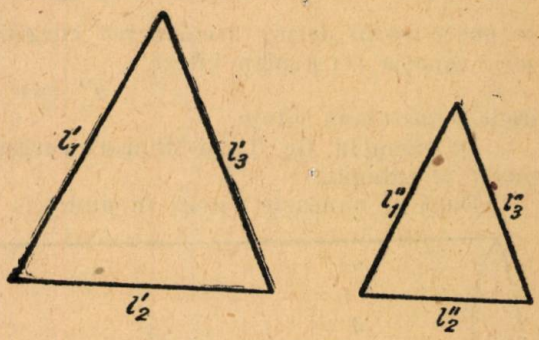


Fig. 1.

Aici l_1', l_2', l_3' sînt dimensiunile lineare ale unei figuri; l_1'', l_2'', l_3'' — dimensiunile lineare asemenea ale celeilalte figuri, asemenea cu prima; c este un coeficient de proporţionalitate sau *constanta de asemănare.*

Pe baza acestor date se poate calcula o latură dintr-un triunghi cunoscînd latura omoloagă din celălalt triunghi

$$l_1'' = cl_1'. \qquad (1)$$

Însăşi asemănarea geometrică asigură rezolvarea unei serii de probleme practice. Pe baza proprietăţilor de asemănare ale triunghiurilor se poate determina de exemplu, înălţimea unui turn sau lăţimea unui rîu, fără a se face măsurătoarea directă a înălţimii şi lăţimii.

Natural că se pot lua figuri asemenea şi în spaţiu (fig. 2). Şi la acestea este caracteristic faptul că după datele uneia şi cu constanta de asemănare se pot determina dimensiunile celeilalte.

Dacă $c=2$ respectiv, 3 şi dacă însemnăm cu d diametrul şi cu h înălţimea, ecuaţiile de transformare sînt

$$d_2=2\,d_1; \qquad h_2=2\,h_1$$
$$d_3=3\,d_1; \qquad h_3=3\,h_1.$$

Noţiunea de asemănare se poate aplica oricărorfenomene fizice. De exemplu,

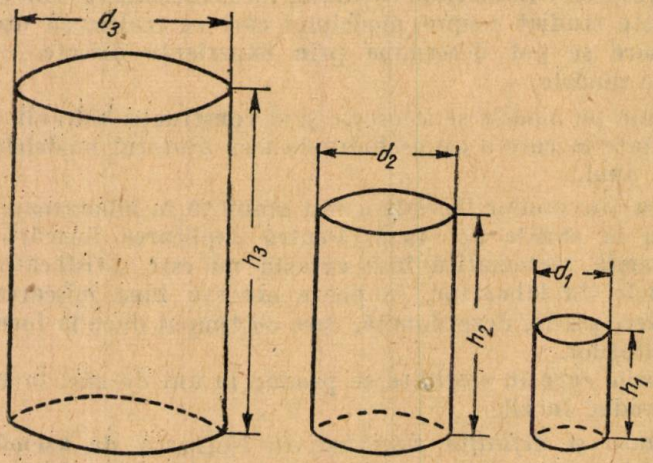


Fig. 2.

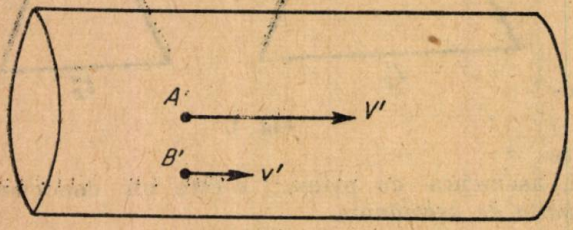
se poate vorbi despre asemănarea curgerii a doi curenţi; atunci se poate scrie ecuaţia (1) pentru viteze

$$v'' = cv' \tag{2}$$

unde v înseamnă viteza.

De exemplu, fig. 3 a şi 3b arată curgeri asemenea, unde $v''=2v'$ în orice punct al tubului.

Dacă se cunoaşte viteza în punctele A' şi B' se poate calcula viteza în punctele A'' şi B''. După cum vom vedea, viteza de două ori mai mare în tubul al doilea este determinată de faptul că diametrul tubului este de două ori mai mic; numai astfel este asigurată similitudinea.



Fg. 3 *a*.

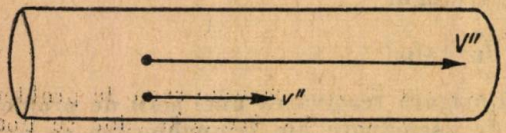


Fig. 3 *b*.

În mod identic ca şi ecuaţia (1) se pot stabili şi pentru celelalte mărimi fizice ecuaţii de transformare

$$\rho'' = c_\rho \cdot \rho'; \quad t'' = c_t \cdot t'; \quad \tau'' = c_\tau \cdot \tau' \tag{3}$$

unde ρ înseamnă densitate, t—temperatura, iar τ—timp.

Pentru înţelegerea similitudinii în ce priveşte timpul, să luăm un exemplu: trei roţi se învîrtesc cu următoarele turaţii:

$$n_1 = 200; \qquad n_2=100; \qquad n_3=50$$

Să însemnăm pe circumferința celor trei roți un punct și să considerăm, ca timp inițial, momentul cînd cele trei puncte se află pe o dreaptă; în acest caz, deoarece $\tau = \frac{1}{n}$ și $\frac{\tau_2}{\tau_1} = 2$ și $\frac{\tau_3}{\tau_1} = 4$, ecuațiile de similitudine sînt: $\tau_2 = 2\tau_1$ și $\tau_3 = 4\tau_1$.

Aceasta înseamnă că la fiecare a doua rotație a roții a doua, semnul de pe circumferința ei coincide cu semnul primei roți, sau altfel: la momentele date de aceste ecuații unghiurile de rotație din poziția inițială a tuturor roților coincid. Cînd $c=1$ rotația este sincronă.

Trebuie să facem deosebire între similitudine și analogie. Dacă două fenomene fizice sînt descrise de ecuații identice, însă calitativ fenomenele se deosebesc între ele, este vorba de analogie. O analogie există de exemplu, între oscilațiile mecanice și cele electrice [1]).

2. *Legea modelelor.* Prima teoremă a asemănării stabilește relațiile dintre constantele de asemănare. În legătură cu această teoremă să dăm un exemplu.

Pentru a se studia curgerea fluidelor în aparatele industriale au fost făcute numeroase încercări pe modele, însă la construirea acestora nu erau respectate niciodată condițiile necesare pentru ca imaginea mișcării din ele să fie identică cu imaginea mișcării din aparatul respectiv în mărime naturală. Din aceasta cauză, pe baza încercărilor pe modele, adesea se ajungea la concluzii greșite. Astfel, viteza de curgere a fluidului se alegea de obicei, prea mică și anume, ea era micșorată în același raport cu dimensiunile geometrice ale aparatului.

S-a stabilit că pentru ca imaginea curgerii fluidelor în model și aceea a curgerii în aparatul original să corespundă întocmai, condiția fundamentală pe care trebuie să o îndeplinească modelul este relația:

$$\frac{l' \rho' v'}{\mu'} = \frac{l'' \rho'' v''}{\mu''} \tag{4}$$

ceea ce înseamnă că mărimile l — diametrul, ρ — densitatea, v — viteza și μ — vîscozitatea, ale primului sistem, trebuie să fie proporționale cu ale sistemului al doilea.

Din această relație se poate determina viteza de curgere a fluidului în model:

$$v'' = v' \cdot \frac{l'}{l''} \cdot \frac{\mu''}{\mu'} \cdot \frac{\rho'}{\rho''}.$$

Să presupunem că prin model și original curge același fluid (atunci $\rho' = \rho''$ și $\mu' = \mu''$) și că modelul este construit la scara 1/10 (atunci $\frac{l'}{l''} = 10$). Introducînd aceste valori în ecuația de mai sus obținem $v'' = 10\, v'$. Aceasta înseamnă că pentru a satisface condiția (4) viteza fluidului în model nu trebuie micșorată, ci mărită de atîtea ori de cîte ori au fost micșorate dimensiunile geometrice ale modelului. Dacă ecuația (4) nu este satisfăcută imaginea curgerii este cu totul deosebită de cea reală.

Ecuația (4) exprimă proprietatea fundamentală a sistemelor similare, adică, existența unor anumite mărimi cu aceiași valoare numerică pentru

---

[1]) vezi bibliografia

toate fenomenele similare. Acestea se numesc *invarianţi* sau criterii de asemănare. Invarianţii sînt complexe fără dimensiuni, compuse din mărimi ce caracterizează fenomenul. Adimensionalitatea este proprietatea esenţială a invarianţilor şi serveşte pentru verificarea exactităţii formării şi calculării lor. Invarianţii sînt denumiţi de obicei, după numele savanţilor care au lucrat în domeniul respectiv al ştiinţei, şi se notează cu simboluri compuse din literile iniţiale ale numelui lor, de exemplu, Ne (Newton) Re (Reynolds), Eu (Euler). Criteriul (4) este criteriul Reynolds.

3. *Similitudinea dinamică.* Se distinge similitudinea cinematică, dinamică, termodinamică etc. după capitolul din fizică la care se referă similitudinea.

Similitudinea dinamică trebuie considerată cînd se calculează din rezultatele încercărilor unui model care lucrează dinamic.

Să examinăm cu ajutorul unei probleme, similitudinea dinamică, care pentru forţe inerţiale se exprimă prin criteriul Newton de similitudine.

Conform celei de-a doua legi a lui Newton, forţa F este egală cu produsul dintre masa m şi acceleraţia u, adică:

$$F = mu = m\frac{v}{\tau}. \tag{5}$$

Aplicînd această ecuaţie la particulele asemenea a două sisteme asemenea, obţinem pentru primul sistem:

$$F' = m'\frac{v'}{\tau'} \tag{5 a}$$

iar pentru al doilea sistem:

$$F'' = m''\frac{v''}{\tau''}. \tag{5 b}$$

Sistemele considerate fiind asemenea pe baza definiţiei asemănării, toate variabilele celui de-al doilea sistem pot fi exprimate prin variabilele primului sistem:

$$F'' = C_F \cdot F',\ m'' = c_m m',\ v'' = c_v v',\ \tau'' = c_\tau \tau'. \tag{6}$$

Introducînd aceste valori în ecuaţia (5 b) găsim:

$$C_F \cdot F' = \frac{C_m \cdot C_v}{C_\tau} \cdot \frac{m' v'}{\tau'}. \tag{7}$$

În locul sistemului de ecuaţii (5 a) şi (5 b) avem acum sistemul (5 a) şi (7) cu variabilele F', m', v' şi τ'. Valorile variabilelor determinate din ambele ecuaţii trebuie să fie egale; acest lucru este posibil în cazul identităţii ecuaţiilor (5 a) şi (7), pentru care este necesar ca în ecuaţia (7) termenii formaţi din constantele de asemănare să se reducă. Pe baza acestei condiţii

$$C_F = \frac{C_m \cdot C_v}{C_\tau} \quad \text{sau} \quad \frac{C_F \cdot C_\tau}{C_m \cdot C_v} = 1.$$

Dacă în locul constantelor de asemănare introducem valorile din ecuaţia (6) şi grupăm toate mărimile primului sistem în membrul I al egalităţii, iar mărimile celui de-al doilea sistem în membrul al II-lea, obţinem:

$$\frac{F'\tau'}{m'v'} = \frac{F''\cdot\tau}{m''v''} \quad \text{sau} \quad \frac{F\cdot\tau}{mv} = Ne = \text{idem} \tag{8}$$

unde Ne este invariantul lui Newton. Dacă în ecuația (8) introducem în locul timpului viteza găsim o altă formă a invariantului

$$Ne = \frac{F.l}{mv^2} = \text{idem.}$$

Putem găsi invarianți pentru orice fenomen fizic. Pentru aceasta trebuie să cunoaștem relația dintre mărimile fenomenului examinat. Reprezentarea unui proces printr-o relație (formulă) este premiza necesară a teoriei similitudinii.

Pe baza celor expuse mai sus, prima teoremă a similitudinii se formulează astfel: pentru fenomene asemenea între ele *invarianții au aceiași valoare* (teorema lui Newton).

4. *Teoremele similitudinii.* Teorema enunțată la sfîrșitul paragrafului precedent este prima teoremă a similitudinii.

Teorema a doua a similitudinii a fost stabilită de cercetătorul Federman (Petrograd) în anul 1911. Conform acestei teoreme orice dependență între variabilele unui fenomen se poate scrie drept o dependență dintre invarianți. Întrucît pentru toate fenomenele asemenea între ele invarianții păstrează aceiași valoare, ecuațiile de invariant sînt de asemenea, identice între ele. Prin urmare, reprezentînd rezultatele unei experiențe oarecare prin invariant, obținem o relație generală valabilă pentru toate fenomenele asemenea. De exemplu, trecerea căldurii la prelungirea transversală a unei țevi (fig. 4) este dată de ecuația: $Nu = cR_e^n$ unde Nu este criteriul Nussett $\left(\text{are valoarea } \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}\right)$, unde α este coeficientul de trecere a căldurii, λ — coeficientul de conductibilitate termică, l — diametrul, iar Re — invariantul Reynolds.

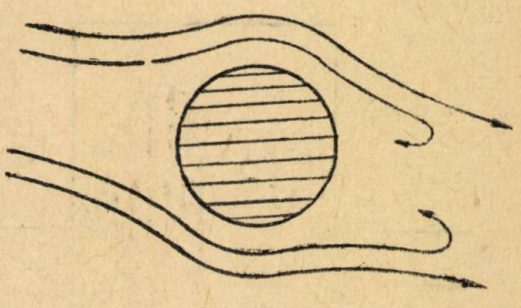


Fig. 4.

Relația de mai sus este valabilă pentru orice dispoziție similară cu prima.

Cu teorema a treia a similitudinii se poate afla care sînt condițiile necesare și suficiente pentru similitudine. Această teoremă se poate formula astfel: similare sînt fenomenele ale căror condiții de univocitate și invarianți deduși din condiții de univocitate sînt identici.

Trebuie să lămurim ce se înțelege prin condiții de univocitate.

Ecuațiile cu caracter general, corespund unor clase de fenomene asemănătoare; pentru a preciza dintr-o clasă de fenomene un fenomen particular trebuie să avem condiții suplimentare. Aceste condiții suplimentare se numesc condiții de univocitate.

Condițiile de univocitate includ. 1) dimensiunile geometrice ale sistemului în care decurge procesul, 2) constantele fizice ale substanțelor care se găsesc în sistem, 3) caracteristica stării inițiale a sistemului, 4) starea finală a sistemului. Teorema a treia a similitudinii a fost formulată pentru prima oară de V. L. Kirpisev și H. A. Guhman, în anul 1931.

5. *Exemple de construire a modelelor.* Pentru a ilustra posibilităţile de aplicare ale metodei modelelor la studiul funcţionării aparatelor termice industriale, dăm un exemplu.

Unul dintre primii preîncălzitori de aer construiţi în U.R.S.S., a fost preîncălzitorul de tipul II (fig. 5). După ce a fost executat s-a constatat că rezistenţa de trecere din partea aerului este enormă şi anume, de 2,5 ori mai mare decît cea calculată.

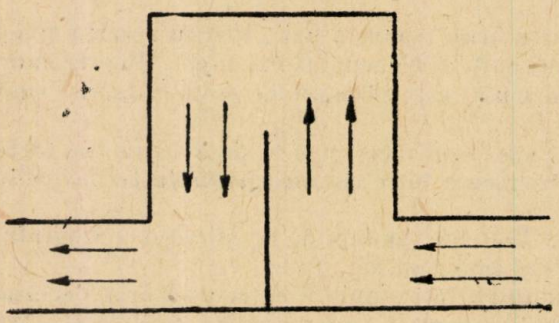


Fig. 5.

Pentru lămurirea acestui fenomen s-au făcut experienţe care au dus la determinarea repartiţiei vitezelor în preîncălzitor (fig. 6); s-au trasat curbele de distribuţie a vitezelor în diferite secţiuni ale preîncălzitorului. Din examinarea figurii se vede că aerul nu curge prin secţiunea totală a canalului şi că la curburi au loc stagnări. Din această cauză rezistenţa este mai mare decît cea obţinută prin calcul.

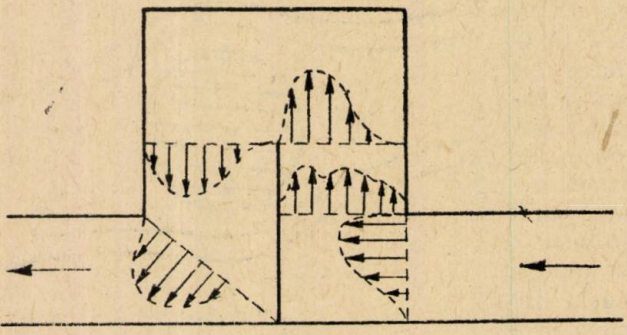


Fig. 6.

Pentru cercetare a fost construit un model cu apă avînd dimensiunile de 1/5 din mărimea naturală, cu pereţii laterali din sticlă. Caracterul de curgere a apei în model era identic cu caracterul de curgere a aerului în original. S-a stabilit că prin instalarea unor palete directoare se poate micşora rezistenţa de curgere (fig. 7). După ce s-a calculat după datele astfel obţinute (cu ajutorul teoremilor similitudinii) originalul, s-a constatat că rezistenţa preîncălzitorului a scăzut de 3 ori.

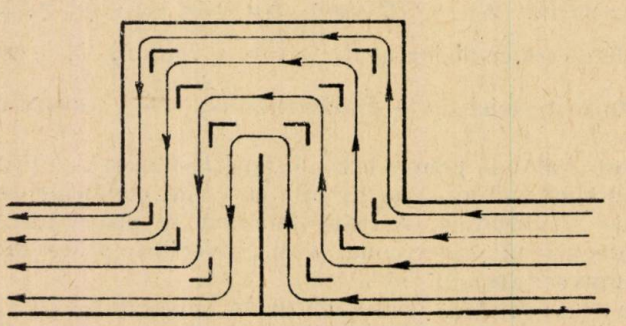


Fig. 7.

În cadrul articolului de faţă nu putem dezvolta în mod amănunţit, teoria similitudinii însă, din cele prezentate se vede cum cu ajutorul ei se pot rezolva o serie de probleme ridicate de practică; ea a devenit astfel, ştiinţa generalizării unor experienţe efectuate pe modele.

Teoria similitudinii se aplică în acele ramuri ale tehnicii care se bazează pe experienţă, precum şi în laboratoarele de cercetări.

BIBLIOGRAFIE

[1]. M. Frenkel: « *Modele electrice ale fenomenelor fizice* ». G.M.F. — A 2/1953.
[2]. M. A. Micheev: « *Bazele transmiterii căldurii* ». Ed. Energetică de Stat, pag. 51—52.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICI

SUME DE SINUSURI ŞI COSINUSURI DE ARCE ÎN PROGRESIE ARITMETICĂ

1. Notăm, $S_1 = \cos a + \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + \ldots + \cos [a + (n - 1) h]$ şi $S_2 = \sin a + \sin (a + h) + \sin (a + 2h) + \ldots + \sin [a + (n-1) h]$.

Metoda I-a. — Dacă în relaţia $\cos \left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos \left(a + \frac{h}{2}\right) = 2 \sin a \sin \frac{h}{2}$ schimbăm pe a în $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, ..., $a+(n-1)h$, vom avea succesiv

$$\sin a = \left[\cos \left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos \left(a + \frac{h}{2}\right)\right] : 2 \sin \frac{h}{2}$$

$$\sin (a + h) = \left[\cos \left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos \left(a + \frac{3h}{2}\right)\right] : 2 \sin \frac{h}{2}$$

$$\sin (a + 2h) = \left[\cos \left(a + \frac{3h}{2}\right) - \cos \left(a + \frac{5h}{2}\right)\right] : 2 \sin \frac{h}{2}$$

. . . . . .

$$\sin [a + (n-1) h] = \left[\cos \left(a + \frac{2n-3}{2} h\right) - \cos \left(a + \frac{2n-1}{2} h\right)\right] : 2 \sin \frac{h}{2}.$$

Adunînd parte cu parte aceste egalităţi, se obţine $S_2 = \left[\cos \left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos \left(a + \frac{2n-1}{2} h\right)\right] : 2 \sin \frac{h}{2}$. Transformînd diferenţa de la numărător în produs se obţine

$$S_2 = \frac{\sin \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

Metoda II-a. — Dacă în egalitatea

$S_2 = \sin a + \sin (a + h) + \sin (a + 2h) + \ldots + \sin [a + (n - 1) h]$ înmulţim cu $2 \sin h$, obţinem

$$2 S_2 \sin h = 2 \sin a \sin h + 2 \sin (a + h) \sin h + 2 \sin (a + 2h) \sin h + \ldots + 2 \sin [a + (n - 1) h] \sin h.$$

Produsele din partea a doua se transformă după relaţia

$$2 \sin p \sin q = \cos (p-q) - \cos (p+q) \text{ şi avem,}$$

$$2\ S_2 \sin h = [\cos (a-h) - \cos (a+h)] + [\cos a - \cos (a+2h)] + [\cos (a+h) - \cos (a+3h)] + \dots + \{\cos [a+(n-2)h] - \cos (a+nh)\}.$$

Desfăcînd parantezele mari se reduc termenii asemenea, astfel că egalitatea devine

$$2\ S_2 \sin h = [\cos (a-h) + \cos a] - \{\cos [a+(n-1)h] + \cos (a+nh)\} =$$

$$= 2 \cos \left(a - \frac{h}{2}\right) \cos \frac{h}{2} - 2 \cos \left(a + \frac{2n-1}{2} h\right) \cos \frac{h}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{h}{2} \left[\cos \left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos \left(a + \frac{2n-1}{2} h\right)\right] =$$

$$= 4 \cos \frac{h}{2} \sin \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2} \text{ deci,}$$

$$2\ S_2 \sin h = 4 \cos \frac{h}{2} \sin \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2} \text{ şi rezultă}$$

$$S_2 = \frac{2 \cos \frac{h}{2} \sin \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2}}{\sin h} = \frac{2 \cos \frac{h}{2} \sin \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2}}{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}}$$

$$S_2 = \frac{\sin \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

Pentru a obţine pe S_1 plecăm de la relaţia

$\sin \left(a + \frac{h}{2}\right) - \sin \left(a - \frac{h}{2}\right) = 2 \cos a \sin \frac{h}{2}$ sau amplificăm egalitatea tot cu $2 \sin h$ şi ţinem seama de relaţia

$2 \cos p \sin q = \sin (p+q) - \sin (p-q)$. Se obţine

$$S_1 = \frac{\cos \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

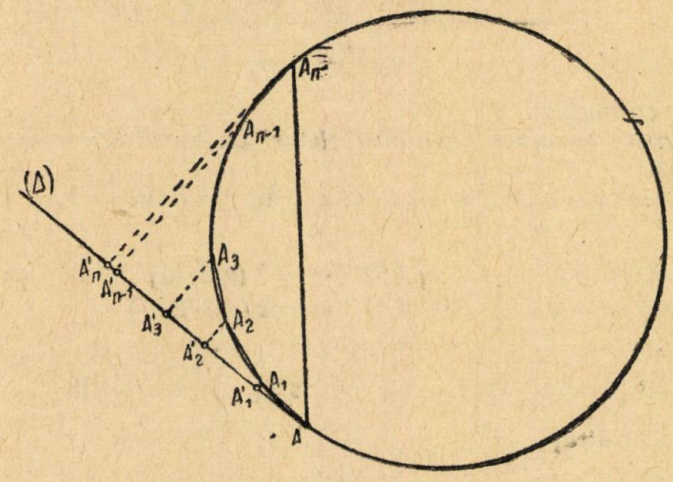
Metoda III-a. — Fie cercul trigonometric $R=1$) şi în el n arce egale $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 \dots = A_{n-1}A_n = h$ (h în radiani).
Se observă că avem coardele

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = 2 \sin \frac{h}{2}.$$

Proiectăm conturul poligonal $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ pe o dreaptă (Δ) ce face cu $A\,A_1$ unghiul a.

Avem $A\,A_1' = A\,A_1 \cos a$

$A_1'A_2' = AA_2' - AA_1' = A\,A_2 \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - A\,A_1 \cos a$, dar din triunghiul isoscel $A\,A_1A_2$; $A\,A_2 = 2\,A\,A_1 \cos\frac{h}{2}$ deci înlocuind şi făcînd unele transformări, găsim $A_1'A_2' = A\,A_1 \cos(a+h)$; $A_2'A_3' = A\,A_1 \cos(a+2h)$; ... ; $A_{n-1}'A_n' = A\,A_1 \cos[a + (n-1)\,h]$. Adunăm şi obţinem



$$A\,A_n' = A\,A_1\{\cos a + \cos(a+h) + \ldots + \cos[a + (n-1)\,h]\} = AA_1 \cdot S_1.$$

Deci $S_1 = \dfrac{A\,A_n'}{A\,A_1}$, dar $A\,A_n' = A\,A_n \cos\left(a + \dfrac{n-1}{2}h\right)$

$$S_1 = \frac{A\,A_n \cos\left(a + \dfrac{n-1}{2}h\right)}{A\,A_1} \quad \text{însă,} \quad \frac{A\,An}{A\,A_1} = \frac{\sin\dfrac{nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}}$$

deci,

$$S_1 = \frac{\cos\left(a + \dfrac{n-1}{2}h\right)\sin\dfrac{nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}}.$$

Cazuri particulare. — Pentru $h=a$, avem

$$\sum_1^n \sin na = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}a \sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}} \text{ ; şi } \sum_1^n \cos na = \frac{\cos\dfrac{n+1}{2}a \sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}.$$

Pentru $h=2a$, avem,

$$\sum_1^n \sin(2n-1)a = \frac{\sin^2 na}{\sin a} \quad \text{şi} \quad \sum_1^n \cos(2n-1)a = \frac{\sin na \cos na}{\sin a}$$

Aceste relaţii au fost folosite în soluţia problemei 1188.

Dacă termenii sumei S_1 au semnele alternative, avem

$$\sin a - \sin(a+h) + \sin(a+2h) - \ldots + (-1)^{n-1} \sin[a+(n-1)h] =$$
$$= \sin a + \sin(a+h+\pi) + \sin(a+2h+2\pi) + \ldots + \sin[a+(n-1)(h+\pi)] =$$
$$= \frac{\sin\left[a + \frac{(n-1)(h+\pi)}{2}\right] \sin\frac{n(h+\pi)}{2}}{\sin\frac{h+\pi}{2}}.$$

Analog pentru cosinusuri.

Suma puterilor asemenea ale sinusurilor şi cosinusurilor de arce în progresie aritmetică.

În relaţia $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$ schimbăm pe a în $a+h$, $a+2h$, ..., $[a+(n-1)h]$;

$$\sin^2(a+h) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos 2(a+h)]$$
$$\sin^2(a+2h) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos 2(a+2h)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin^2[a+(n-1)h] = \tfrac{1}{2}\{1 - \cos 2[a+(n-1)h]\}.$$

Adunînd aceste egalităţi,

$$\sum_1^n \sin^2[(a+(n-1)h] = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^n \cos 2[a+(n-1)h] =$$
$$= \frac{n}{2} - \frac{\cos[2a+(n-1)h]\sin nh}{2\sin h}$$

deci,

$$\sum_1^n \sin^2[a+(n-1)h] = \frac{n}{2} - \frac{\cos[2a+(n-1)h]\sin nh}{2\sin h.}$$

Pentru $h=a$ şi $h=2a$ obţinem respectiv

$$\sum_1^n \sin^2 na = \frac{n}{2} - \frac{\cos[(n+1)a]\sin na}{2\sin a}$$

$$\sum_1^n \sin^2(2n-1)a = \frac{n}{2} \frac{\cos na \sin na}{2\sin a}.$$

Suma cuburilor sinusurilor de arce în progresie aritmetică.

Să aflăm suma $\sum_1^n \sin^3[a+(n-1)h]$.

Pentru aceasta plecăm de la relaţia

$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$ de unde $\sin^3 a = \frac{1}{4}(3 \sin a - \sin 3a)$ şi schimbînd a în $a+h$, $a+2h$, ..., etc. obţinem

$$\sin^3 (a + h) = \frac{1}{4} [3 \sin (a + h) - \sin 3 (a + h)]$$

$$\sin^3 (a + 2h) = \frac{1}{4} [3 \sin (a + 2h) - \sin 3 (a + 2h)]$$

. . . . . .

$$\sin^3 [a + (n - 1) h] = \frac{1}{4} \{3 \sin [a + (n-1) h] - \sin 3 [a + (n-1) h]\}$$

de unde $\sum_1^n \sin^3 [a + (n - 1) h] = \frac{3}{4} \sum_1^n \sin [a + (n - 1) h] -$

$$- \frac{1}{4} \sum_1^n \sin 3 [a + (n - 1) h].$$

Înlocuind sumele sumele cunoscute se obţine

$$\sum_1^n \sin^3 [a + (n - 1) h] = \frac{3}{4} \frac{\sin\left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\sin\left(3a + \frac{n-1}{2} 3h\right) \sin \frac{3nh}{2}}{\sin \frac{3h}{2}}.$$

Pentru $h=a$, se obţine

$$\sum_1^n \sin^3 na = \frac{3}{4} \frac{\sin \frac{n+1}{2} a \sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} - \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{3(n+1)}{2} \sin \frac{3na}{2}}{\sin \frac{3a}{2}}.$$

Suma puterilor a 4-a de sinusuri se poate afla folosind relaţia

$$\sin 4a = 4 \cos a (\sin a - 2 \sin^3 a) = 2 \sin 2a (1 - 2 \sin^2 a).$$

Se ridică la patrat relaţia $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$, care devine :

$\sin 4a = \frac{1}{4}(1 - 2 \cos 2a + \cos^2 2a)$. Se înlocueşte $\cos^2 2a = \frac{1 + \cos 4a}{2}$ deci,

$\sin^2 a = \frac{1}{4}\left(1 - 2 \cos 2a + \frac{1 + \cos 4a}{2}\right)$ sau $\sin^4 a = \frac{1}{8}(\cos 4a - 4 \cos 2a + 3)$.

În aceste 2 relaţii se procedează ca în exemplele precedente.

Florin Torjescu, student

NOTE MATEMATICE

3. CÎTEVA APLICAŢII ALE ANTIPARALELELOR

1. Fie GH, ID, EF cele trei antiparalele egale (fig. 1). Din definiţia dreptelor antiparalele rezultă că unghiurile ascuţite din D şi E sînt egale cu unghiul A; adică, patrulaterul $DEFI$ este un trapez isoscel. Analog, patrulaterele $HIDG$, $FGHE$ sînt trapeze isoscele.

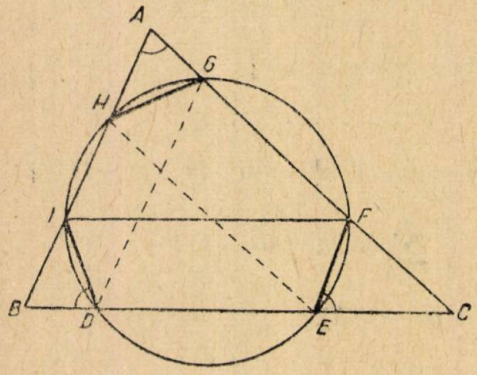


Fig. 1

Pentru a arăta că punctele D, E, F, G, H, I, sînt pe acelaş cerc, trebuie să arătăm că cercul $HIDG$ trece şi prin F. Dar acest lucru este evident deoarece dreptele GH şi IF sînt antiparalele. Deci:

Trei antiparalele egale înscrise în unghiurile unui triunghi determină pe laturile acestuia, şase puncte aşezate pe acelaş cerc, care se numeşte cercul lui Tucker.

Vom folosi această teoremă în problemele următoare:

2. *Se divid înălţimile AA', BB', CC' ale unui triunghi ABC în părţi proporţionale începînd de la vîrfuri. Proiecţiile punctelor de diviziune A'', B'', C'' pe laturile triunghiului sînt şase puncte conciclice* (aşezate pe acelaş cerc). Folosind pentru proiecţii notaţiile din fig. 2 şi notînd cu M punctul diametral opus lui A în cercul cicumscris, observăm că dreptele GH, ID, EF sînt antiparalele respectiv la BC, CA, AB şi că patrulaterele $AHA''G$, $ABMC$ sînt asemenea, deoarece sînt compuse din triunghiuri dreptunghice respectiv asemenea şi la fel aşezate. Deci:

$$\frac{GH}{AA''} = \frac{BC}{AM} \text{ sau } GH = \frac{AA'' \cdot BC}{2R}.$$

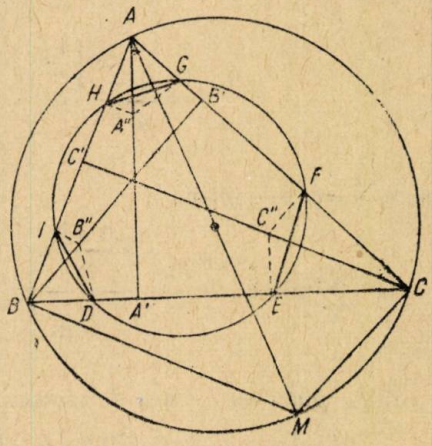


Fig. 2

Analog, $ID = \dfrac{BB'' \cdot CA}{2R}$, $EF = \dfrac{CC'' \cdot AB}{2R}$ unde R este raza cercului circumscris.

Este uşor de văzut că dacă A'', B'', C'' împart înălţimile AA', BB', CC' în părţi proporţionale, numărătorii acestor rapoarte sînt egali. Deci, $GH = ID = EF$; iar, cele şase puncte sînt conciclice.

Cînd A'', B'', C'' se confundă respectiv cu A', B', C' avem un caz particular, iar cercul în acest caz, se numeşte cercul lui Taylor.

3. Vom demonstra acum, următoarele proprietăţi ale simedianei.

a) *Simediana AS este locul mijloacelor antiparalelelor la latura BC a triunghiului ABC.* Efectuăm o simetrie faţă de bisectoarea unghiului A.

Latura BC şi paralela MN la această latură, devin respectiv $C'B'$ şi $N'M'$ (fig. 3).

Dreptele $N'M'$ sînt paralele în triunghiul $AB'C'$ şi antiparalele în triunghiul ABC. Locul mijloacelor lor este mediana AS în triunghiul $AB'C'$,, simediană în ABC.

b) *Simediana AS este locul punctelor prin care trec antiparalele cu laturile unghiurilor B şi C, egale între ele.* Ducem prin S antiparalelele PP', $S'D$ SE şi observăm că triunghiurile SPD, $SP'E$ sînt isoscele de unde rezultă că SDE este isoscel. Deoarece am găsit un punct al simedianei

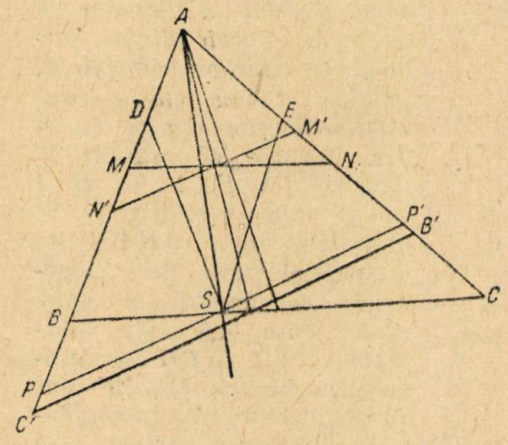


Fig. 3

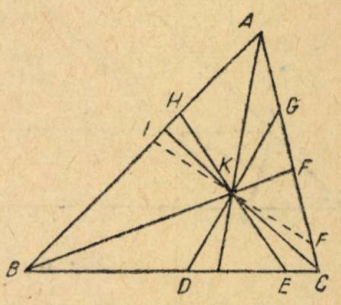


Fig. 4

care se bucură de proprietatea enunţată putem afirma că toate punctele ei se bucură de această proprietate.

c) *Prin punctul K de intersecţie a două simediane ducem cele trei antiparalele. Să se arate că ele sînt egale şi să se deducă de aici, că simedianele sînt concurente.* Punctul de concurenţă se numeşte punctul lui Lemoine. Fie K punctul de intersecţie al simedianelor înscrise în unghiurile B şi C, iar IF, EH, GD cele trei antiparalele (fig. 4). Se observă că unghiurile ascuţite din D şi E sînt egale cu unghiul A, deci $KD = EK$ şi prin urmare, $GD=EH$. Analog $KH=IK$, $GK=FK$ deci antiparalela IF este egală, cu celelalte două, iar K este mijlocul ei. Punctul K fiind mijlocul antiparalelei relativă la unghiul A se găseşte pe simediana corespunzătoare, adică, simedianele sînt concurente.

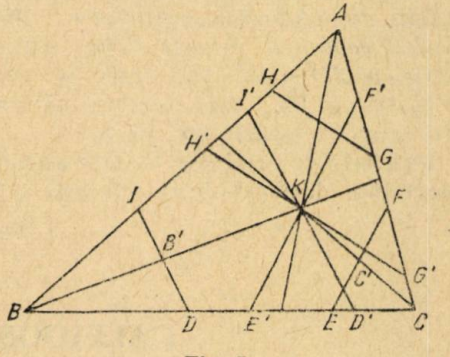


Fig. 5

4. *Dacă se împart în acelaş raport dreptele AK, BK, CK care unesc vîrfurile triunghiului ABC cu punctul de concurenţă al simedianelor, antiparalele duse prin aceste puncte intersectează laturile triunghiului în şase puncte conciclice.* Notăm cu GH, ID, EF antiparalelele din problemă şi fie $G'H'$. $I'D'$, $E'F'$ cele trei antiparalele duse prin K (fig. 5). Avem: $\frac{GH}{G'H'} = \frac{AA'}{AK}$ sau $GH = G'H' \frac{AA'}{AK}$. Analog

$ID = I'D' \frac{BB'}{BK}$; $EF = E'F' \frac{CC'}{CK}$. Însă: $\frac{AA'}{AK} = \frac{BB'}{BK} = \frac{CC'}{CK}$ și $G'H' = I'D' = E'F'$ deci, $GH = ID = EF$, adică punctele considerate determină un cerc Tucker.

În cazul particular în care A', B', C' coincid cu K, cercul se numește cel de-al doilea cerc al lui Lemoine și are centrul în punctul K.

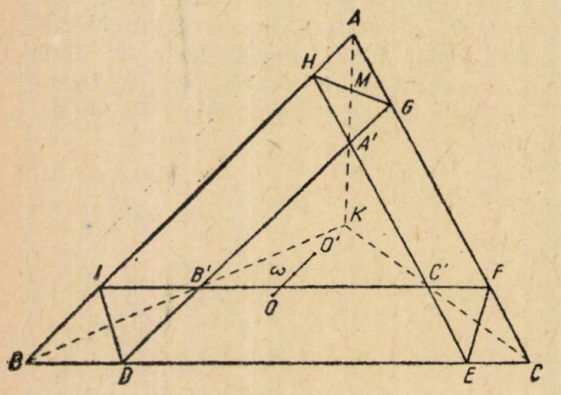


Fig. 6

5. *Dacă două triunghiuri admit punctul lui Lemoine ca centru de omotetie directă, prelungirile laturilor triunghiului interior întîlnesc laturile celui exterior în șase puncte conciclice.* Trebuie să arătăm că punctele D, E, F, G, H, I sînt pe același cerc (fig. 6). Se observă că figura $AHA'G$ este un paralelogram, deci diagonalele se împart în părți egale. Cum AK este simediană rezultă că GH este antiparalelă. La fel, ID, EF sînt antiparalele înscrise în unghiurile B și C. Rezultă că patrulaterul $DEFI$ este un trapez isoscel. Prin urmare, GH, ID, EF sînt trei antiparalele egale, de unde rezultă enunțul.

Dacă puterea omotetiei este zero (triunghiul $A'B'C'$ se reduce la punctul K) cercul se numește primul cerc al lui Lemoine. Mai este cunoscut că centrul cercului din problemă se găsește în mijlocul dreptei care unește centrele cercurilor circumscrise celor două triunghiuri.

6. *Prin piciorul S al simedianei AS ducem antiparalelele SD, SE relative la laturile AB, AC, să se arate că cercul circumscris triunghiului SDE este tangent laturii BC în S și că taie celelalte două laturi determinînd o antiparalelă egală cu primele două.* Antiparalelele SD și SE sînt egale și egal înclinate pe BC, deci, determină un cerc tangent laturii BC în S.

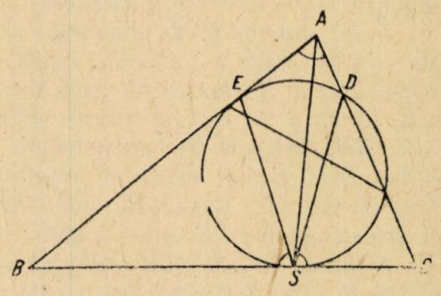


Fig. 7

Punctele determinate de trei antiparalele egale sînt conciclice, deci cercul determinat de două dintre ele este o antiparalelă egală cu primele două.

Florin Constantinescu Student, anul I, Cluj

CALEIDOSCOP FIZIC

1. Barca de canfor. Tăiați cu o foarfecă bucăți de staniol și construiți o bărcuță ce are la partea din spate, adică la pupă, o scobitură. Pentru ca mișcările bărcuței să fie bine vizibile, fixați cu ceară roșie un fir de pai drept catarg, iar la vîrful acestuia un fanion colorat (fig. 1). Așezați bărcuța pe

apă şi picuraţi cu ajutorul unui bastonaş de sticlă sau cu o pipetă, o picătură de alcool în scobitura de la pupă. Bărcuţa se va mişca brusc şi puternic înainte. Efecte asemănătoare se obţin cu eter, cloroform, uleiuri eterice etc., în locul alcoolului.

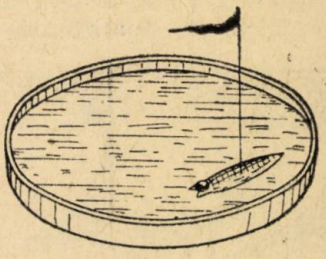


Fig. 1

Puneti o bucăţică de camfor în scobitura de la pupă. Bărcuţa se va mişca cîteva ore.

Cum se explică aceasta?

Bucăţica de camfor formează o soluţie superficială care se evaporă foarte repede şi care, fără încetare se reînoieşte prin dizolvarea de noi molecule. Mişcarea bruscă de translaţie pe care o suferă bucăţica de camfor se datoreşte acestei dizolvări superficiale rapide. Existenţa unui flux de molecule care pleacă de la camfor şi se evaporă spre părţile celei mai îndepărtate ale suprafeţei este pusă în evidenţă prin experienţa de mai sus.

2. Umbre colorate. Aşezaţi un paravan alb în faţa a două lumînări aprinse, iar între acestea şi paravan o figurină tăiată din carton şi fixată într-o carte

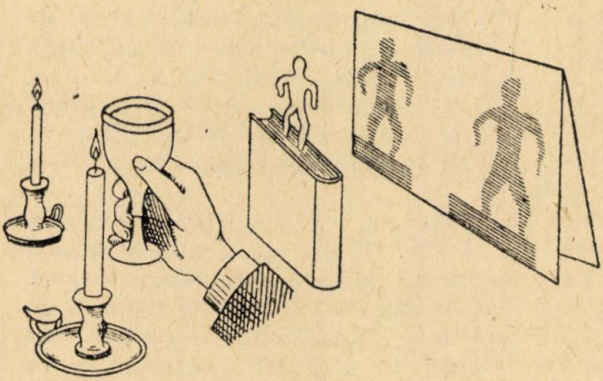


Fig. 2

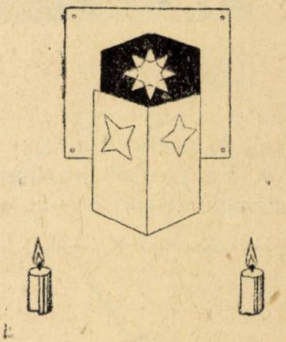


Fig. 3

(fig. 2). Lumînările vor forma pe paravan două umbre negre. Ţineţi în faţa lumînării din dreapta o bucată de sticlă roşie sau un pahar umplut cu apă colorată în roşu. Umbra din dreapta va deveni roşie, iar umbra din stînga, mai slabă, verzuie. Umpleţi paharul cu bere: umbra figurinei va fi violetă; umpleţi paharul cu apă colorată cu albastru de rufe, umbra va fi portocalie. Dacă veţi colora apa cu cerneală violetă, umbra va fi galbenă.

Umbra din dreapta are mereu culoarea conţinutului paharului, iar umbra din stînga se colorează în nuanţa complimentară ei.

3. Efecte de proiecţie. Îndoiţi un carton pătrat de-a lungul liniei care îl împarte în două părţi egale. Tăiaţi în una din părţile cartonului, o stea în patru colţuri, iar aceste colţuri să treacă printr-o linie verticală şi una orizontală. Îndoiţi cartonul astfel încît cele două părţi să se suprapună şi desenaţi cu un creion conturul stelei tăiate în una din părţi. Desenaţi şi tăiaţi în partea a doua o stea ale cărei colţuri să se afle într-o linie care să formeze un unghi de 45° cu linia care trece prin colţurile stelei iniţiale. Îndoiţi cartonul şi aşezaţi-l pe masă aşa cum se vede în fig. 3. În spatele cartonului aşezaţi două

lumînări de înălțime egală. Cartonul trebuie așezat așa încît stelele de lumină care apar din umbra celor două părți îndoite să formeze o singură stea luminoasă cu 8 colțuri. Țineți în fața ambelor deschideri (a stelelor din carton) o sticlă colorată, foi de gelatină sau pahare conținînd apă colorată.

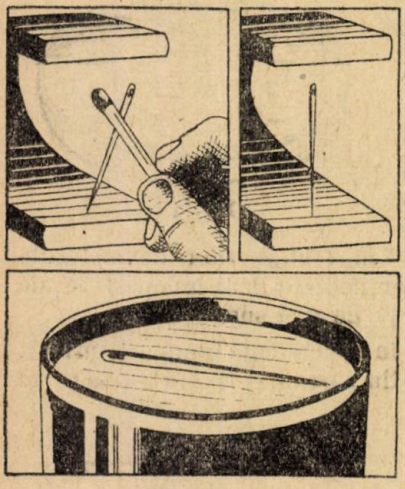


Fig. 4

4. Cea mai simplă busolă. Pentru confecționarea unei asemenea busole avem nevoie de un ac obișnuit de cusut și un pahar cu apă. Pentru magnetizarea acului, el va fi introdus între polii unui magnet în formă de potcoavă (fig. 4 *a*). Acul se va atașa *a* îndată, cu un capăt de unul din polii magnetului. Celălalt capăt al acului va rămîne suspendat în aer. Oricît l-ați înclina, după cîteva oscilații el revine la poziția inițială de fixitate în aer, ca și cum ar fi întins de fire elastice invizibile. Prin ac trec linii de forță *b* magnetică și astfel el se magnetizează. Ungeți acul cu un strat subțire de grăsime și puneți-l încet pe suprafața apei, dintr-un pahar (fig 4. *b*). Acul nu se va cufunda, ci va fi susținut de stratul superficial de apă. El se va orienta pe suprafața apei pe o direcție strict determinată: unul din capetele acului va indica nordul, celălalt sudul.

5. Un pendul original. Atîrnați de un fir un inel confecționat dintr-un mănunchi de sîrmă izolată, constînd din 15—20 înfășurări. La mijlocul acestui pendul original introduceți polul unui magnet în formă de bară (fig. 5). Dacă veți trece acum prin înfășurările mănunchiului, curentul unei baterii de lampă de buzunar, pendulul se va deplasa într-o parte sau în cealaltă, în funcție de sensul curentului din înfășurările inelului. Acest fenomen se produce datorită interacțiunii dintre cîmpul magnetului și cîmpul magnetic creat de curent.

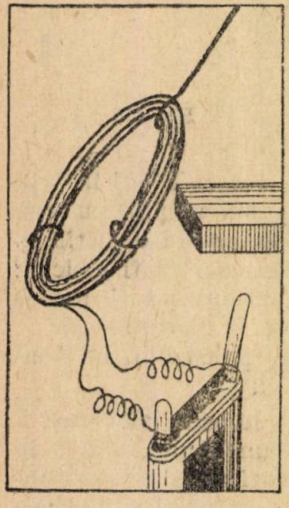


Fig. 5

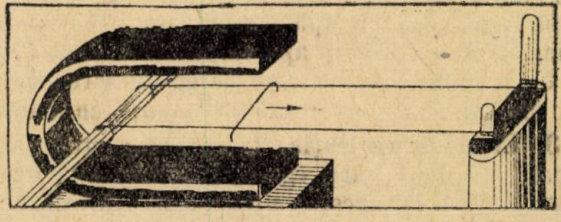


Fig. 6

6. Principiul construcției motoarelor electrice. Introduceți în cîmpul magnetic al unui magnet în formă de potcoavă, două fire de sîrmă de cupru izolată și așezați deasupra lor o bucată de sîrmă subțire cu capetele îndoite (fig. 6).

Acestea se îndoaie pentru ca sîrma să nu alunece de pe «şinele» astfel improvizate. Îndată ce veţi trece prin «şine» curentul unei bateriide lampă de buzunar, bucata de sîrmă aşezată liber pe ele va începe să se mişte în cîmpul magnetic. Pe acest principiu se bazează construcţia actuală a motoarelor electrice. Diferenţa constă doar în faptul că în motoare se realizează mişcarea circulară a bobinei rotorului (indusul) în cîmpul magnetic al statorului (inductorul).

V. A.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEME DATE LA ADMITEREA IN FACULTATEA DE MATEMATICE DIN IAŞI IN ANII 1952 ŞI 1953

1635. *a.* Să se rezolve sistemul:

$$\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{x-y}{2} + \frac{x}{3} - y + \frac{1}{2} = 0$$

b. Se dă un triunghi ABC în care $BC=8$ şi înălţimea $AD=8$. La ce distanţă de vîrful A trebuie să se ducă o paralelă MN la latura BC pentruca aria trapezului $MNBC$ să fie de 3 ori mai mare decît aria triunghiului AMN.

1636. Un triunghi dreptunghic ABC are latura AB de 1 cm; se notează unghiul din C cu x Să se exprime cu ajutorul lui x aria totală a conului obţinut prin rotaţia acestui triunghi în jurul laturii AB. Cît trebuie să fie x pentruca această arie totală să fie 3.

1637. Să se circumscrie un cerc de rază 1, un trapez isoscel astfel ca raportul bazelor să fie K.

a) Să se afle laturile şi unghiurile trapezului exprimate prin K.

b) Unind consecutiv punctele de contact cu cercul, ale laturii trapezului considerat, se obţine un patrulater. Să se demonstreze că două din unghiurile patrulaterului sînt egale cu cele ale trapezului şi să se verifice că aria patrulaterului este $S = 4\dfrac{k}{k+1}$.

c) Pentru ce valoare a, lui K patrulaterul din punctul precedent va avea cea mai mare arie. Ce devin în acest caz, patrulaterul şi trapezul considerate.

1638. Fie trinomul $2x^2 - 5x - 3 = y$ (1)

a) Să se descompună în factori de gradul I.

b) Pentru ce valoare a lui x trinomul y ia valoarea cea mai mică.

c) Pentru ce valori ale lui y ecuaţia (1) are rădăcini imaginare.

d) Să se prezinte grafic funcţia (1) şi să se indice pe figură rezultatele dela punctele (*a*), (*c*), (*c*).

1639. Un punct S se găseşte la distanţa de 175 mm de centrul O al unui cerc. Coarda TT' uneşte punctele de contact ale tangentelor duse din S la cerc. Diametrul cercului se trece prin S taie cercul în punctele A şi A' şi coarda TT' în C; $SC = 112$ mm. Se cere:

a) Aria suprafeţei generate prin rotirea segmentului ST şi arcului de cerc TA' în jurul diametrului AA'. *b)* Volumul şi suprafaţa corpului generate prin rotirea triunghiului STT' în jurul diametrului BB' şi AA'.

1640. Să se rezolve sistemul:

$$x + y = 5$$

$$x^3 + y^3 = 35$$

PROBLEME DATE LA ADMITEREA IN INSTITUTUL POLITEHNIC IAȘI. 1953, 1954

1641. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ știind că $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ și că unghiul este cuprins între $0°$ și $45°$.

1642. Să se determine p și q așa fel încît ecuațiile

$$(5p-52)x^2+(4-p)x+4=0$$

$$(2q+1)x^2-5qx+20=0$$

să aibă aceleași rădăcini.

1643. Suma muchiilor unui paralelipiped drept este de 24 m, diagonala de $\sqrt{14}$ m și aria bazei de 2 m^2. Să se găsească lungimile muchiilor paralelipipedului. Numerele găsite pot fi măsurile laturilor unui triunghi?

1644. Să se determine toate soluțiile ecuației:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}$$

1645. Se consideră un unghi xoy. Pe bisectoarea interioară se ia un punct M și cu OM drept coardă, se descriu două cercuri oarecare. Primul cerc taie laturile unghiului în B respectiv C, iar al doilea în B', respectiv în C'. Să se arate că $BB'=CC'$.

1646. Să se găsească soluțiile sistemului:

$$x^2+24=2xy$$

$$6x^2-y^2=-25$$

1647. Să se rezolve ecuația:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos 2x+\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin 2x-\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)$$

1648. Să se rezolve sistemul:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4.$$

1649. Să se rezolve ecuația

$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$$

1650. Se dă sistemul:

$$x^3+x^2x+xy^2=a$$

$$x^2y+xy^2+y^3=b$$

Se cere: 1) să se calculeze expresiile rădăcinilor x și y; 2) să se calculeze valoarea algebrică a expresiei $E(x;y)=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$ și să se arate că este egală cu $E(a;b)$.

1651. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}4x=2\sqrt{3}(\cos^4x-\sin^4x)$$

1652. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3x(1+\operatorname{tg}x)=\cos 2x$$

1653. Într-un trunchi de con este înscrisă o sferă cu raza r. Generatoarea conului este înclinată cu un unghi α față de planul bazei. Să se găsească aria laterală a trunchiului de con.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1297

Pe baza DC a unui dreptunghi ABCD se ia un punct M. Perpendicularele din C și D respectiv BM și AM se taie în P. Fie N piciorul perpendicularei din P pe DC. Să se arate că DM = NC.

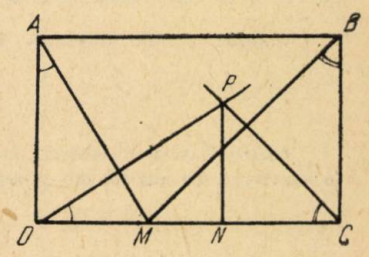
Em. Cocoș, elev, Constanța

Soluție. Deoarece $PD \perp AM$ și $PC \perp BM$ rezultă că

$$\sphericalangle DAM = \sphericalangle PDN \text{ și } \sphericalangle PCM = \sphericalangle MBC$$

adică triunghiurile dreptunghice ADM cu PDN și PNC cu MBC sînt asemenea. Prin urmare:

$$\frac{DM}{PN} = \frac{AD}{DN} \text{ și } \frac{CM}{PN} = \frac{BC}{CN}.$$



Deoarece și $AD = BC$, avem:

$$DM \cdot DN = PN \cdot AD = PN \cdot BC = CM \cdot CN,$$

adică,

$$DM \cdot DN = CM \cdot CN$$

ținînd seama că $CM = DC - DM$ și $DN = DC - CN$, relația se poate scrie:

$CN(DC - DM) = DM(DC - CN)$, sau $CN \cdot DC - CN \cdot DM = DC \cdot DM - CN \cdot DM$.

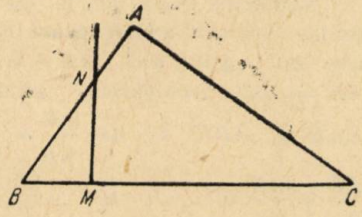
Deci, $CN \cdot DC = DM \cdot DC$, de unde $CN = DM$.

Problema 1302

In triunghiul ABC dreptunghic în A perpendiculara în M pe BC taie pe AB în punctul N. Să se arate că

$$AN \cdot BC + MN \cdot AC = MC \cdot AB.$$

N. Gheorghiu, student, Iași



Soluție. Din asemănarea triunghiurilor ABC și BMD avem,

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AB} \text{ sau } \frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{BC - MC}{AB}$$

de unde:

$$MN = \frac{(BC - MC)\,AC}{AB} \; ; \quad BN = \frac{BC}{AB}(BC - MC)$$

ar:

$$AN = AB - BN = AB - \frac{BC}{AB}(BC - MC) = \frac{AB^2 - BC^2 + BC \cdot MC}{AB};$$

$$AN = \frac{BC \cdot MC - AC^2}{AB},$$

Rezultă

$$AN \cdot BC = \frac{BC^2 \cdot MC - BC \cdot AC^2}{AB} \text{ și}$$

$$MN \cdot AC = \frac{BC \cdot AC^2 - AC^2 MC}{AB}.$$

De unde:

$$AM \cdot BC + MN \cdot AC = \frac{(BC^2 - AC^2)\,MC}{AB} = \frac{AB^2 \cdot MC}{AB},$$

Adică, $AN \cdot BC + MN \cdot AC = AB \cdot MC$.

Observare. Dacă N e pe prelungirea lui AB relaţia din enunţ devine:

$$|AN \cdot BC - MN \cdot AC| = MC \cdot AB$$

deci, în general:

$$|AN \cdot BC \pm MN \cdot AC| = MC \cdot AB$$

după cum N e pe AB sau pe prelungirea ei.

Problema 1312

Un solenoid umplut cu miez moale de fier poate produce un flux magnetic de 30.000 max welli. Ştiind că intensitatea cîmpului magnetic din interiorul solenoidului, care are o secţiune de 15 cm² este de 40 oerstezi, să se calculeze inducţia cîmpului magnetic şi premeabilitatea fierului.

Soluţie. Avem inducţia $B = \frac{\Phi}{S} = \frac{30.000}{15} = 2\,000$ gauşi. Premeabilitatea:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{2.000}{40} = 50.$$

Observare. Această problemă, propusă de tov. Emil I. Georgescu elev, Alexandria, este cunoscută; o constituie problema 861 din „Culegerea de probleme de fizică" pentru clasele VIII – XI.

Problema 1314

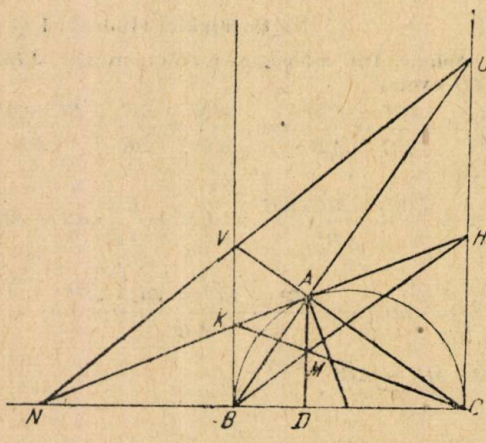
Considerăm triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) şi cercul său circumscris. Tangenta în C taie cateta AB în U, tangenta în B taie cateta AC în V iar tangenta în A taie pe CU în H şi pe BV în K.

a) *Să se arate că H este mijlocul lui CU şi să se deducă că BH taie înălţimea AD în mijlocul ei, apoi să se deducă că dreptele BH, CK, AD sînt concurente.*

b) *Să se arate că există relaţia* $\frac{UA}{UB} = \frac{AC^2}{BC^2}$

c) *Să se arate că dreptele BC, HK, UV sînt concurente.*

N. M. Mihăileanu



Soluţie. a) După cum se ştie tangentele duse din acelaşi punct la un cerc sînt egale, deci, $AK = KB$ şi $AH = HC$. Triunghiurile asemenea KAB şi AHU ne dau $\frac{AK}{KB} = \frac{AH}{HU}$; $\frac{AH}{HU} = \frac{AK}{AK} = 1$; $AH = HU$ însă, $AH = HC$ deci $HC = HU$ sau $UH = HC = \frac{UC}{2}$. Analog avem $KB = VK = \frac{VB}{2}$. Deoarece $AD \parallel CU$ rezultă că BH împarte pe AD în acelaşi raport în care împarte şi pe CU, deci $AM = MD$. Analog demonstrăm că CK trece tot prin mijlocul lui AD, adică, dreptele CK, BH, AD sînt concurente.

b) Triunghiurile asemenea VAB şi AUC dau

$$\frac{VA}{AC} = \frac{AB}{AU} \text{ sau } \frac{VA + AC}{AC} = \frac{AB + AU}{AU}, \text{ deci } \frac{VC}{AC} = \frac{UB}{AU}$$

rezultă

$$\frac{UA}{UB} = \frac{AC}{VC}$$

deci, avem de arătat că

$$\frac{AC}{VC} = \frac{AC^2}{BC^2} ; \frac{1}{VC} = \frac{AC}{BC^2} ;$$

$$BC^2 = VC \cdot AC$$

Aceasta este o relație evidentă deoarece este tocmai teorema catetei în triunghiul dreptunghic VBC.

c) Se vede ușor că dreptele BC, HK, UV sînt concurente deoarece $VB \parallel UC$ și

$$\frac{VK}{KB} = \frac{UH}{HC} .$$

Problema 1349

Să se arate că între elementele unui triunghi avem relațiile :

$$b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 4S$$

$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2bc \sin (B - C)$$

Dacă D este piciorul înălțimii din A în triunghiul ABC, iar M este mijlocul laturii BC, să se găsească relațiile precedente observînd că

$$aria\ ABD + aria\ ADC = S$$

$$aria\ ABD - aria\ ADC = 2\ aria\ ADM$$

N. N. Mihăileanu

Soluție. Din teorema sinusurilor folosim relațiile $b = 2R \sin B$ și $C = 2R \sin C$. Avem:

$$b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 4R^2 \sin^2 B \cdot 2 \cdot \sin C \cdot \cos C +$$

$$+ 4R^2 \sin^2 C \cdot 2 \sin B \cos B = 8R^2 \sin B \sin C (\sin B \cos C +$$

$$+ \sin \cos B) = 8R^2 \sin B \sin C \sin (B + C) = 8R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{R} = 4S.$$

La fel:

$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 8R^2 \sin B \sin C \sin (B - C) =$$

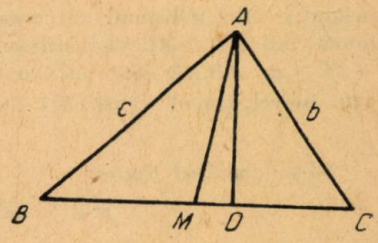
$$= 8R^2 \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \sin (B - C) = 2bc \sin (B - C).$$

Soluția II. După observația din enunț avem:

aria ADB + aria $ADC = S$ însă aria $ADB =$

$= \frac{BD \cdot AD}{2} = \frac{c^2 \sin B \cos B}{2} = \frac{c^2 \sin 2B}{4}$, iar aria

$ADC = \frac{b^2 \sin 2C}{4}$; deci, $\frac{b^2 \sin 2C}{4} + \frac{c^2 \sin 2B}{4} = S$



de unde reiese prima relație

$$aria\ ABD - aria\ ADC = 2\ aria\ ADM$$

$$aria\ ABD = \frac{c^2 \sin 2B}{4} ; \quad aria\ ADC = \frac{b^2 \sin 2C}{4} ;$$

$$aria\ ADM = \frac{(BD - DC)\, AD}{2}$$

sau

$$aria\ ADM = \frac{(c \cos B - b \cos C)\, b \sin C}{2} = \frac{2R \sin (C - B)\, b \sin C}{2} = \frac{bc}{2} \sin (C - B)$$

Deci, $|c^2 \sin 2B - b^2 \text{ si } C| = |2bc \sin (C - B)|$

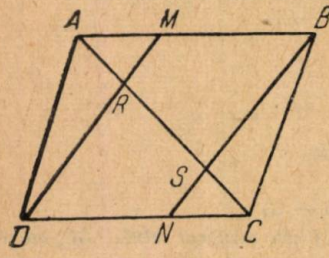
Problema 1363

Pe laturile opuse AB și CD ale unui paralelogram, luăm respectiv, punctele M și N astfel că $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$. *Dreptele DM și BN taie diagonala AC și punctele R și S. Să se arate că:*

$$RS = \frac{AC}{2m + 1}$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$ și cum $AB = \| DC$, rezultă că $AM = CN$. Deci, $MD = \| BN$. Din triunghiurile asemenea ASB și ARM deducem: $\frac{AR}{RS} = \frac{AM}{MB} = m$, deci, $AR = m\,RS$.



Analog, $\frac{SC}{RS} = \frac{CN}{ND} = m$, deci, $SC = m\,RS$.

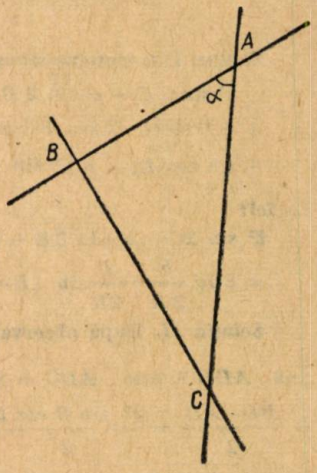
Din relația $AR + RS + SC = AC$ rezultă $(2m + 1)\,RS = AC$, de unde

$$RS = \frac{AC}{2m + 1}.$$

Problema 1365

Două drepte care se taie într-un punct A sînt tăiate de o a treia dreaptă mobilă în punctele B și C astfel ca suma $AB + BC$ să rămînă constantă. Să se determine poziția dreptei mobile astfel ca distanța BC să fie minimă.

* * *



Soluție dată de **Savin Ionescu,** student, București. În triunghiul ABC putem scrie:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.\ AC\cos\alpha;$$

sau

$$BC^2 = (AB + AC)^2 - 2\,AB\cdot AC - 2\,AB\cdot AC.\cos\alpha$$

$$BC^2 = k^2 - 2\,AB\cdot AC\,(1 + \cos\alpha)$$

$$BC = \sqrt{k^2 - 2\,ABAC\,(1 + \cos\alpha)}$$

unghiul α fiind constant. Se vede de aici că BC va fi minim cînd $AB = AC$ va fi maxim. Ori, deoarece $AB + AC = k$, $AB.AC$ este maxim cînd $AB = AC$ adică ABC isoscel, ținînd seama că $1 + \cos\alpha > 0$.

Problema 1372

Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{x^2 + y + 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y}}{x^2 - y - 1 + 2\sqrt{y}}.$$

(dată la admiterea în institutul Petrol și Gaze)

Soluție: Se observă că F se poate scrie:

$$F = \frac{(x - \sqrt{y} + 1)^2}{x^2 - (\sqrt{y} - 1)^2} = \frac{(x - \sqrt{y} + 1)}{(x - \sqrt{y} + 1)(x + \sqrt{y} - 1)}$$

sau

$$F = \frac{x - \sqrt{y} + 1}{x + \sqrt{y} - 1}.$$

Se presupune $x - \sqrt{y} + 1 \neq 0$.

Problema 1373

Să se rezolve sistemul:

$$\cos x + \sin 2x = \cos 3x$$

$$\cos(x + y) + \sqrt{3}\sin(x + y) = 1.$$

(Dată la admiterea în Institutul C.F.R. Bucureşti

Soluţie. Prima ecuaţie se scrie:

$$\sin 2x = \cos 3x - \cos x$$

$$\sin 2x = -2\sin 2x \sin x$$

$$\sin 2x(1 + 2\sin x) = 0$$

De unde:

$$\sin 2x = 0 \quad ; \quad x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \; ; \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3}.$$

Dacă în a doua ecuaţie facem $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ avem:

$$\cos(x + y) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin(x + y) = 1$$

$$\cos(x+y)\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\sin(x + y) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(x + y - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \; ;$$

sau

$$x + y = \frac{2\pi}{3}.$$

Înlocuind valorile lui x, avem pentru y:

$$y_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{k\pi}{2} \quad ; \quad y_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad ; \quad y_3 = 2k\pi - \frac{5\pi}{6}$$

unde

$$(k = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \quad \pm 3; \ldots).$$

Problema 1374

În triunghiul ABC se duce $MP \parallel AC$. Din punctul M situat pe AB se duce o paralelă la BC care întîlneşte pe AC în N, iar din punctul P situat pe BC se duce o paralelă la AB care întîlneşte pe AC în Q. Să se arate că:

a) *punctele N şi Q sînt respectiv egal depărtate de punctele A şi C;*

b) *Dacă $\frac{MA}{MB} = k$; să se calculeze segmentul NQ cu ajutorul laturei AC şi al raportului k;*

c) *În ce caz punctele N şi Q se confundă?*

(dată la admiterea în Institutul de Căi Ferate, Bucureşti)

Soluţie. Deoarece $MN \parallel BC$; $MP \parallel AC$; $PQ \parallel AB$, putem scrie:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} = \frac{PC}{PB} = \frac{CQ}{AQ}.$$

Din primul și ultimul raport avem:

$$\frac{AN}{AC-AN}=\frac{CQ}{AC-CQ}$$

de unde rezultă:

$$AN=QC\ ;\ \frac{AM}{MB}=\frac{CQ}{AQ}=k\ ;\ \frac{CQ}{AC-CQ}=k;$$

de unde:

$$CQ=\frac{K\cdot AC}{1+K},\ \text{iar:}\ NQ=AC-2\,CQ=AC-\frac{2K\cdot AC}{1+K}=AC\,\frac{1-K}{1+K}.$$

Pentru $NQ=O$ rezultă $K=1$, deci M este la jumătatea lui AB.

Problema 1376

Să se rezolve ecuația:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos 2x+\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin 2x+\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right).$$

(Dată la admiterea în Institutul de Petrol și Gaze)

Soluție. Făcînd calculabile prin logaritmi sumele:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)\ \text{și}\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)$$

avem:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\text{èos}\,2x+\cos 2x=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin 2x+\sin 2x$$

sau

$$\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1\right](\cos 2x-\sin 2x)=0.$$

De unde:

pentru $$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}+4x=2K\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{2\pi}{3}.$$

deci $$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Pentru}\ \cos 2x=\sin 2x;\ \operatorname{tg}2x=1;\ x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8};$$

unde $$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots$$

Problema E. 537

Să se arate că.

$$\frac{x+y}{x-y}\left(1+\frac{xyz}{(x-y)^2}\right)+\frac{(x+y)(z-1)}{x-y}=\frac{(x^3+y^3)z}{(x-y)^3}.$$

C. I. Ț.

Soluția. Eliminînd numitorii, obținem.

$(x^2-2xy)(x+y)+x^2yz+xy^2z+(x^2-2xy+y^2)(xz+yz-x-y)=x^3z+y^3z.$

Efectuînd înmulțirile, obținem în partea I-a.

$x^3-2x^2y+xy^2+x^2y-2xy^2+y^3+x^2yz+x^3z-2x^2yz+xy^2z+x^2yz-2xy^2z+y^3z-x^3+$
$+2x^2y-xy^2-x^2y+2xy^2-y^3=x^3z+y^3z$

sau $$x^3z+y^3z=x^3z+y^3z$$

Problema E. 540

Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x-y=a$$
$$\frac{x+y}{x-2y}=b.$$

Leonid Rusnac,
student, Timișoara

Soluție. Din prima ecuație obținem $x=y+a$ și substituind pe x în ecuația a doua prin valoarea sa, obținem

$$a+2y=b\ (a-y) \text{ sau}$$
$$(2+b)\ y=ab-a$$

de unde

$$y=\frac{ab-a}{2+b}.$$

Introducînd valoarea obținută pentru y în prima ecuație, avem

$$x=\frac{a+2ab}{2+b}.$$

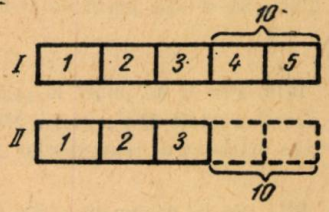
Problema E. 546

Raportul a două numere este $\frac{5}{3}$. *Dacă scădem* 10 *din primul și adăugăm* 10 *celuilalt, raportul numerelor obținute devine* $\frac{3}{5}$. *Să se afle numerele.*

Florin Iliescu, elev Craiova

Soluții. Putem rezolva aritmetic și algebric.

1. *Aritmetic.* Facem desenul de mai jos. Dacă scadem din primul număr 10 și adăugăm celui de-al doilea 10, atunci raportul lor devenind $\frac{3}{5}$ rezulta ca în urma operației de mai sus, numărul I devine egal cu numărul II, și numărul II egal cu numărul I (față de cum erau la început). Atunci avem $10:2=5$ reprezintă o parte,



$5\times5=25$ este primul număr,
$5\times3=15$ este numărul al II-lea.

2. *Algebric.* Notînd cu x și y numerele, avem sistemul

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{3} \text{ și } \frac{x-10}{y+10}=\frac{3}{5} \text{ sau}$$

$3x-5y=0$ și $5x-3y=80$. Aplicăm metoda comparației, deci $x=\frac{5y}{3}$ și $x=\frac{3y+80}{5}$ pe care egalîndu-le, avem $\frac{5y}{3}=\frac{3y+80}{5}$ de unde $25y-9y=240$ sau $16y=240$, deci $y=15$.

Avem $x=\frac{5\times15}{3}=\frac{75}{3}=25$.

Problema E. 547

Dacă

$$x=\frac{a}{b+c},\quad y=\frac{b}{c+a} \text{ și } z=\frac{c}{a+b}.$$

Să se arate că $xy+yz+zx=1-2xyz$.

Ion I. Cristea, elev. Constanța

Soluție. Dacă x, y și z au valorile date, avem

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(a+b)(c+a)} + \frac{ac}{(a+b)(b+c)} = 1 - \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Alungind numitorii, obținem

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(c+a) = (a+b)(b+c)(c+a) - 2abc.$$

Făcînd înmulțirile avem

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 + a^2c = abc + b^2c + ac^2 + bc^2 + a^2b + ab^2 + a^2c + abc - 2abc$$

Reducînd termenii asemenea, obținem

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2$$

egalitate care este evidentă.

PROBLEME PROPUSE

1608. Să se demonstreze că soluțiile întregi ale ecuației nedeterminate $x^2 + y^2 = z^2$ unde x, y, z sînt numere pozitive prime între ele, sînt x sau y unul de forma $2uv$ celălalt de forma $u^2 - v^2$ = iar z are forma $u^2 + v^2$, totodată $u > v > 0$, u și v sînt întregi primi între ei; iar produsul uv este par.

(Se poate consulta broșura Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi de A. O. Ghelfand, Biblioteca S.S.M.F., nr. 9)

* * *

1609. Două roți elicoidale cu axele paralele au unghiul de înclinație al dinților față de axe de 30°. Prima roată are modul normal de 8 și numărul de dinți 16, iar roata a doua are 20 dinți. Să se afle pasul pe circumferință și diametrul roților.

Gh. Valer, Hunedoara.

1610. Fie M un punct în planul triunghiului ABC și A', B', C' picioarele cevienelor lui. Dacă dreptele MA', MB', MC' sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$ atunci M este ortocentrul triunghiului ABC.

N. Mihăileanu

1611. Să se demonstreze că ecuația $x^4 + y^4 = z^2$ nu se poate fi rezolvată în numere întregi.

(Se poate consulta broșura «Bazele teoriei numerelor» de I. Vinogradov).

* * *

1612. Să se exprime x, y, z dacă avem

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y} = \frac{c}{\sin z} \text{ avem și } x + y + 2z = 180°$$

unde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

N. Laico Krasnodarski
(Matematica v școle)

1613. Într-un triunghi ABC bisectoarea CD taie cercul circumscris în punctul E. Să se arate că:

$$2.\ CE > CA + CB \text{ și } 2.\ CA.\ CB > MD\ (CA + CB).$$

Gh. Dobrotescu,
profesor, Predeal

1614. La ce înălțime față de nivelul lichidului se va ridica apa la 20°C între două plăci dreptunghiulare verticale egale și paralele, știind că distanța între plăci este de 2 mm.

Emanuel Cocoș,
student București

1615. Într-un triunghi dreptunghi ABC să se ducă prin vîrful A al unghiului drept o dreaptă Δ pe care proiectînd vîrfurile B și C respectiv în B_1 și C_1, aria triunghiului ACB_1 să fie maximă. Care este poziția dreptei Δ față de AB pentru ca aria triunghiului ABC_1 să fie maximă? În ce caz suma ariilor triunghiurilor ACB_1 și ABC_1 este maximă?

Problema poate duce la rezolvări de ecuații trigonometrice. Să se rezolve numeric în cazul cînd $AB = 3$ metri și $AC = 4$ metri.

C. Ionescu-Țiu

1616. Un punct M_1 se mișcă pe o axă Ox astfel încît

$$OM_1 = x_1 = t^3 - 30\ t^2 + 300\ t$$

distanța x fiind măsurată în metri și timpul t în secunde. Un alt punct M_2 se mișcă tot pe axa Ox astfel că $OM_2 = x_2 = t^3 + 30\ t^2 - 900$ t.

Să se găsească pozițiile acestor puncte după 20 secunde.

Care este distanța între cele două puncte mobile, după 10 secunde.

* * *

1617. Un mobil M se mișcă pe o dreaptă fixă Δ astfel încît $OM = r \sin \omega t$; O fiind un punct fix al dreptei Δ, r și ω constante, iar timpul t.

Să se determine mișcarea unui al doilea punct M_1 mobil pe o dreaptă fixă Δ_1 care trece prin O și face unghiul α cu dreapta astfel încît mișcarea relativă a lui M_1 față de M să fie un cerc de rază r.

Alexandru Stoenescu

1618. *a)* Cu ce este egală capacitatea unui condensator plan cu dimensiunile de 5 cm. și 3 cm și cu dielectricul format dintr-un strat de parafină de 0,2 mm grosime, constanta dielectrică fiind 5.

b) O derivație este formată din trei conductori paraleli cu rezistențele respective: 6 ohm, 0,24 ohm și 0,4 ohm. Să se calculeze rezistența întregii derivații și intensitatea curentului în fiecare ramificație, cunoscînd intensitatea curentului neramificat ca fiind de 3 amperi.

* * *

1619. Să se calculeze suma:

$$S = 1.\ 4.\ 7 + 2.\ 5.\ 8. + \ldots + n\ (n + 3)\ (n + 6)$$

apoi să se determine valorile lui n pentru care expresia $n\ (n + 1)\ (n + 6)\ (n + 7)$ să fie un multiplu al numărului 216.

N. C. Ciomu

1620. Se iau punctele A și B respectiv pe laturile Ox și Oy ale unui unghi fix xOy.

De aceeași parte se duc semicercurile de diametre OA și OB. O dreaptă mobilă ce trece prin O taie aceste semicercuri în M și N. Să se arate că mediatoarea segmentului MN trece printr-un punct fix.

N. Gheoghiu, student, Iași

1621. *a)* Să se calculeze forța activă P necesară a fi aplicată la capătul unei pîrghii de gradul I pentru a echilibra o forță rezistentă $Q = 500$ kgf, cunoscînd lungimea respectivă a brațelor $OA = 2$ m, $OB = 20$ cm.

b) Să se calculeze forța necesară pentru ridicarea unei roabe lungă de 1,5 m care conține 75 kg, la distanța de 0,5 m de axul roții.

* * *

1622. Distanța focală a unei oglinzi sferice este de 8 cm. Imaginea unui obiect luminos aflat pe axul principal fiind la 40 cm de vîrful oglinzii să se afle distanța la care se află obiectul.

* * *

1623. O lentilă biconvexă are distanța focală de 12 cm. Un obiect luminos fiind la 8 cm depărtare de centrul optic, să se afle distanța corespunzătoare a imaginii. Să se facă construirea imaginii.

* * *

1624. Cercul înscris într-un triunghi oarecare ABC atinge laturile BC, AB, AB respetiv în A'', B'', C''. Să se stabilească relația:

$$\frac{c''}{b''h_b} + \frac{b''}{c''h_c} = \frac{1}{h_a''}$$

Dan C. Pana

1625. Să se determine parametrul m, astfel ca rădăcinile ecuației

$$x^3 + x^2(5 - m) + x(3m - 13) + 17 - 3m = 0$$

să satisfacă relația

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3 \Sigma x_1 \cdot \Sigma x_1x_2} = 4$$

Radu Stroe, Ploești

1626. Într-un autoclav de 11 litri se găsesc închise 10 litri aer și 1 litru apă, totul la 0°C și 760mm. Se încălzește totul la 100°C. Care va fi presiunea indicată de un manometru montat pe vas? (Se neglijează: tensiunea de vapori a apei la 0°; dilatarea apei și dilatarea vasului).

A. Șaichin

1627. Fie O și O' două cercuri care se taie în A și B. Considerăm o secantă variabilă CD care trece prin A, și un punct E pe cercul O, astfel ca $BE \parallel CD$.

Să se afle locul geometric al celui de-al patrulea vîrf al paralelogramului determinat de punctele C, D, E.

Florin Constantinescu, elev, Cluj

1628. Bisectoarea unghiului B a unui triunghi ABC dreptunghic în A întîlnește respectiv înălțimea AD și mediana AM în F și E. Să se stabilească relația 2. $AE \cdot AF = EM \cdot DF$.

I. A. Rus, elev, Oradea

1629. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului ABC. Se dă poziția ortocentrelor triunghiurilor AB_1C_1; BA_1C_1; CA_1B_1. Se cere să se construiască triunghiul ABC.

Al. Alexandrescu

1630. O cantittate oarecare de fosfat de sodiu se află în stare supratopită la temperatura $t° = 0°C$. Se aruncă în această substanță o cantitate foarte mică de fosfat de sodiu solid provocînd astfel cristalizarea. Dacă cunoaștem punctul de topire $T = 36°C$, căldura de topire $\lambda = 24$ calorii/gram, căldura specifică în stare solidă $c = \frac{5}{12}$ cal/grame. grad și căldura specifică în stare lichidă $c' = \frac{3}{4}$ calori/gram. grad ale fosfatului de sodiu, se cere să se afle ce cantitate de substanță se cristalizează?

C. Necșoiu, inginer București

1631. Dacă un autocamion merge cu viteza constantă $v = 20$ km/h parcurge distanța de 160 km fără nicio oprire. Dacă viteza autocamionului este mai mare cu N, atunci autocamionul trebuie oprit în n locuri diferite cîte 1/2 oră pentru răcirea motorului. Să se determine viteza astfel încît autocamionul să parcurgă distanța într-un timp minim; se indică $N = 5n$.

N. Bărbuică, elev, Craiova

1632. La ce distanță trebuie să fie ocularul de obiectivul unui microscop pentru ca acesta să mărească de 500 ori. Microscopul are distanța focală a obiectivului $f = 0{,}2$ cm și aceea a ocularului $F = 5$ cm, iar distanța vederii clare este de 20 cm.

I. Lupuțiu, elev, Ploești

1633. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare există relația:

$$a^3 \cos B \cos C + b^3 \cos C \cos A + c^3 \cos A \cos B =$$

$$= abc\,(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

(« Gazeta Matematică » supliment VI. 89 — iunie 1935)

N. Botea

1634. Aria unui triunghi isoscel este $3m^2$, iar mediana corespunzătoare uneia din laturile egale este de 3 m. Să se rezolve triunghiul.

(« Gazeta Matematică » supliment VIII. 15 — noiembrie 1934)

C. Ionescu-Bujor

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE *)
PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: **638.** Pe un șantier, trei echipe de muncitori au efectuat într-o săptămînă: prima 480 ore-muncă, a doua 450 ore-muncă și a treia 570 ore-muncă. Șeful celor 3 echipe a primit 4500 lei pe care trebuie să-i împartă echipelor după numărul de ore-muncă efectuate. Cît a primit fiecare echipă?

Marius Zaharescu, student, București

E: **639.** Un tren avînd o întîrziere de 16 minute, recîștigă acest timp pe o distanță de 80 km, mărindu-și viteza cu 10 km pe oră. Se cere viteza normală a trenului.

* * *

E: **640.** Tata este de trei ori mai în vîrstă decît mine, iar eu sînt cu 25 de ani mai mic decît mama. Știind că împreună avem 110 ani, să se afle cîți ani are fiecare din noi.

George Galațki, elev, Tîrgoviște

E: **641.** Care este cel mai mic număr care înmulțit cu 2772 ne dă un patrat perfect?

R. P. Stroe, elev, Ploiești

E: **642.** Dacă $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1$, atunci

$$abc\,(a^3 + b^3 + c^3 - 1) = a^4\,(ac + b^2) + b^4\,(ba + c^2) + c^4\,(cb + a^2)$$

Arm. Caloianu

---

*) V (E: 638, 639, 640, 641, 643, 647, 648); VI (E: 642, 644, 646, 649); VII (E: 645, 650, 651, 652).

E: **643.** Grîul unei G.A.C. s-a strîns în 3 magazii de diferite mărimi. În prima magazie a fost de 3 ori mai mult grîu decît în a treia, şi în a doua a fost cu 5,4 tone mai puţin decît în prima. Se întreabă cît grîu a fost în fiecare magazie dacă în toate au avut loc 205,37 tone grîu.

Stelian Niculescu, elev, Caracal

E: **644.** Să se verifice identitatea:

$$(a^2 + ab - b^2)^2 + (a^2 - ab - b^2)^2 =$$
$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) + (a^2 + ab - b^2)(a^2 - ab - b^2)$$

N. M.

E: **645.** Într-un triunghi ABC cu unghiul A mai mare sau egal cu 60° şi latura AB mai mică decît latura AC, ducem bisectoarea AD. Să se demonstreze că segmentul BD este mai mic decît distanţa de la vîrful C la dreapta AD.

C. I. Ţ.

E: **646.** Să se arate că:

$$[a^2 + (a + 1)^2][2 - a^3 + (1 + a)^3] + (1 + a)^3 = 1 + a^3 + 3[a^4 + (1 + a)^4]$$

* * *

E: **647.** Doi pionieri A şi B au împreună 24 lei. Dacă partea lui A ar fi de 2 ori mai mare, iar aceea a lui B de 5 ori mai mare, ei ar avea împreună 72 lei. Cît de mare este partea lui A şi cît de mare este partea lui B?

Gh. Dobrotescu, Predeal

E: **648.** În 500 lăzi sînt mere. Se ştie că o ladă nu poate cuprinde mai mult de 240 de mere. Să se demonstreze că cel puţin trei lăzi conţin acelaş număr de mere.

«Olimpiada matematică» U.R.S.S. 1950

E: **649.** Să se arate că:

$$a(a + b + c) + b(a - b + c) + (a + b)(-a + b + c) =$$
$$= b(a - b + c) + c(a + b + c) + (b + c)(a + b - c) =$$
$$= c(a + b + c) + a(-a + b + c) + (c + a)(a + b - c) =$$
$$= a(-a + b + c) + b(a + b + c) + (a + b)(a - b + c) =$$
$$= b(a + b + c) + c(a + b - c) + (b + c)(a - b + c) =$$
$$= c(a + b - c) + a(a + b + c) + (c + a)(a - b + c) =$$
$$= (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 2(ab + bc + ca)$$

C. I. Ţ.

E: **650.** Un automobil care mergea cu aceeaşi viteză, s-a aflat la ora 10 şi 30 minute la distanţa de 30 km faţă de locul de pornire, iar la ora 11 fără 10 minute, la distanţa de 50 km faţă de locul de pornire. Să se calculeze viteza automobilului.

* * *

E: **651.** Se dau două drepte paralele avînd între ele distanţa de un cm. Dintr-un punct A ca centru, situat în afara paralelelor, la distanţa de un cm de cea mai apropiată, se descrie un cerc cu raza de 3 cm. Să se arate cum se desenează un alt cerc care să fie tangent cercului dat şi celor două paralele. Se vor găsi patru soluţii.

C. I. Ţ.

E: **652.** Fie $A = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $C = az^2 + 2bzt + ct^2$

$$B = axz + b(xt + yz) + cyt$$

şi să se arate că $AC - B^2 = (ac - b^2)(xt - yz)^2$.

N. M.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Dintre rezolvitorii anunțați cu soluții bune, primite în cursul lunii februarie 1955, s-au evidențiat următorii:

Cristea I. Ion (clasa X-a, Constanța), **Boloca Ioan** (anul III, școala medie tehnică din Cîmpul-lung Moldovenesc), **Căluianu Nicolae** (anul IV, s.m.t. Roman), **Donescu St. Dragomir** (absolvent, Focșani), **Serb Adrian** (clasa X-a, Pitești), **Torjescu Florin** (student, București), **Bostan Emil** (absolvent. Vutcani), **Bigan V. Stan** (clasa X-a, Giurgiu), **Gervescu M. Ion** (clasa VII-a, Roznov, Piatra Neamț), **Popovici G. Iulian** (clasa X-a, Ploiești), **Murărescu Gheorghe** (clasa IX-a, Roman), **Uță Marin** (absolvent, Sibiu), **Lambă Stelian** (anul IV, hidrotehnica, Constanța), **Stepan Ionel** (anul III, hidrotehnica, Constanța), **Stroe P. Radu** (clasa X-a, Ploești), **Țîru Emil** (clasa IX-a, Focșani). **Leonte N. Ion** (clasa X-a, Iași), **Tofan V. Dumitru** (clasa VII-a, Onceștii Noi, Bîrlad), **Roșianu C. Dragomir** (student, București), **Mașek Corneliu** (clasa VI-a, Gurabarza, Brad), **Duduică Radu** (clasa IX-a, s.m.t. 17, București). **Vasiliev Lucia** (anul II hidrotehnică, Constanța), **Dinu Gh. Gheorghe** (anul III, electrotehnică, Craiova), **Stănescu Viorel** (clasa X-a, Vaslui), **Țurlea I. Corneliu** (clasa X-a, Craiova), **Sandu Gh. Ion** (clasa X-a, s.m. 4, București), **Trifan Vasile** (clasa X-a, Craiova), **Parepa C., Grigore** (absolvent, Mizil), **Țugulea Eugen** (clasa IX-a, R. Vîlcea), **Tomescu C. Dan** (clasa X-a, s. m. 13, București), **Bucur Gheorghe** (clasa IX-a, Ploești), **Țigănuș Mircea** (clasa IX-a, Focșani), **Tofan Liliana** (studentă Codlea), **Pescaru Nicolae** (anul II, s.m. mecanică nr. 2, București), **Zvorișteanu Alexandru** (clasa VIII, s.m. 4, București), **Podeanu Corneliu** (clasa IX-a, Orașul Stalin), **Dumitrescu Badea Ovidiu** (clasa X-a, s.m. 4, București), **Arion Adrian** (clasa VIII-a, Botoșani), **Radu V. Alexandru** (clasa X-a, Tecuci), **Vasiliu Monica** (clasa VII-a, **Hogaș C. Constantin** (clasa X-a, Iași), **Stănășilă Octavian** (clasa X-a, s.m.4, București), **Torsan Ilie** (clasa X-a, Alba Iulia), **Scutelnicu Radu** (clasa X-a, Botoșani), **Pigli Traian** (Timișoara).

* * *

In cursul lunii februarie 1955 s au mai primit cîte cel puțin zece soluții bune la problemele propuse în ultimele patru numere apărute în «Gazeta Matematică și Fizică» — seria B, note (N), articole (A) și probleme propuse (P), de la:

AIUD (Cluj), Clasa IX-a. Bratu Ion (1335, 342, 374, 375, 377, 382, 390, 407, E: 558, 559, 563, 564, 566, 567, 568), Fischer Gheorghe (1443, 449, 456, 458, 464, 465, 467, E: 577, 587, 588).

ALBA IULIA. Clasa VIII-a. Nichimiș Eugenia (E: 505, 536, 546, 553, 559, 563, 566, 568, 573, 574, 586, 587); clasa IX-a. Linguriță Cornelia (1375, 378, 379, 416, 432, 436, 449, 460, 462, E: 563, 568, 571, 574, 576, 578, 585); clasa X-a. *Torsan Ilie* (1375, 378, 379, 403, 404, 416, 423, 432, 436, 441, 442, 443, 444, 448, 449, 453, 457, 459, 460, 461, 462, E: 552, 557, 563, 565, 568, 570, 571, 574, 576, 577, 578, 583, 585).

ARAD. Clasa X-a. Popescu Gheorghe (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 283, 384, 385, 392, 403, E: 558), absolvent Tarănjoacă N. Vladimir (1431, 432, 441, 442, 449, 459, 461, E: 563, 567, 568, 574, 574, 578, 579, 588).

BACĂU, Clasa X-a. Simion I. Emil (1372, 376, 380, 381, 395, 409, 410, E: 558, 559, 561, 569, 575).

BÎRLAD. Școala de 7 ani Onceștii Noi. Clasa VII-a. *Tofan V. Dumitru* (E: 551, 552, 553, 558, 559, 560, 561, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588).

BOLINTINUL DE VALE (Reg. București). Clasa X-a, Martin Stoian (1373, 379, 380, 409, 436, 440, 442, 465, E: 551, 552).

BOTOȘANI. Clasa VIII-a. Anistoroaiei Alexandru (1383, E: 560, 566, 587, 580, 582, 584, 585, 586, 587, 593), Andricioaiei Gheorghe (1372, 374, 383, 403, 403,

404, 432, 434, 464, 449, E: 553, 554, 558, 559,, 563, 564, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 585, 586, 587, 588), Avram Gheorghe (1372, 377, 434, 449, E: 553, 558, 559, 563, 566, 568, 569, 571, 574, 575, 584, 586, 587, 588). *Arion Adrian* (1372, 374, 377, 378, 383, 404, 409, 431, 432, 449, 460, E: 551, 552, 553, 554, 555, 558, 559, 560, 561, 563, 564, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 585, 586, 587, 588), Cososchi Ana (1464, E: 563, 564, 574, 580, 584, 585, 586, 587, 588), Corneanu Constantin (1449, 460, E: 553, 558, 559, 561, 563, 565, 567, 568, 569, 574, 576, 578, 580, 586, 588), Căldăraru Carol (1402, E: 558, 559, 560, 562, 563, 564, 568, 574, 580). *Gherman Corneliu* (1372, 374, 377, 378, 383, 404, 432, 443, 449, 464, E: 551, 552, 553, 554. 558, 559, 560, 561, 563, 564, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 585, 586, 587, 588). Grosu Lucia (1372, 377, 431, 432, 460, E: 550, 552, 554, 557 559, 560, 561, 563, 568, 569, 571, 575, 587, 588), Lucan Mihai (1372, 392, E: 550, 554, 559, 561, 563, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575). Ionescu Neculai (1449, 460, E: 553, 554, 558, 559, 561, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 576, 578, 586, 588), Nica Liliana (1372, 402, 552, 559, 560, 563, 566, 568, 569, 571, 574, 576), Ionescu Dorin (1372, 377, 431, 432, 449, E: 550 551, 554, 557, 559, 560, 563, 566, 568, 569, 574, 575, 582, 587, 588). Mihai Ion (1377, 431, 432, 449, E: 550, 551, 552, 557, 559, 560, 561, 568, 569, 574, 575, 582, 587, 588), Ochişor Adrian (1372, 377, 431, 432, E: 550, 551, 552, 554, 557, 559, 561, 563, 566, 568, 569, 575, 587), *Vasiliu Monica* (1372, 402, E: 552, 559, 560, 563, 566, 568, 569, 571, 574, 576); clasa IX-a. Bîrzoi Maria (1403, 409, 410, 449, E: 560, 561, 563, 568, 571, 574, 586, 587, 588), Cohn Mina (1403, 409, 449, E: 561, 568, 571, 574, 581, 587, 588), Filip Mariana (1403, 409, 410, 412, 449, E: 560, 561, 563, 568, 571, 574, 587, 588), Grigoraş Marina (1403, 409, 449, E: 563, 568, 571, 574, 586, 587, 588), Mozes Etti (1409, 449, E: 568, 571, 574, 580, 581, 583, 586, 587, 588); Clasa X-a: Iacobzon Clara (1408, 409, 413, 416, 441, 442, E: 562, 563, 578, 586, 587, 588), *Scutelnicu Radu* (1385, 386, 408, 409, 411, 413, 415, 416, 418, 424, 434, 436, 437, 440, 443, 449, 458, 464, 465, 468, E: 563, 565, 566, 567, 568, 569, 572, 573, 575), Sin Rodica (1409, 413, 414, 441, 442, E: 563, 568, 574, 578, 586, 588), Sulim Saly (1373, 374, 383 409, 441, 451, E: 563, 568, 571, 574, 575, 586, 587, 588), Vamanu Elena (1409, 410, 411, 413, 414, 416, 436, 441, 442, E: 563, 568, 571, 574, 576, 578, 586, 587, 588).

BRAD. *Scoala medie tehnică de minereuri. Cercul ştiinţific.* Anul III. Lupei Voicu (1372, 373, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 403, 406), Papai Ana (1372, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 385, 406), Trifu Florin (1373, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 406), Vaida Alexandru (1372, 373, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 403, 406, 460). *Scoala de 7 ani Gurabarza* — clasa VI-a. *Maşek Corneliu* (E: 550, 552, 553, 555, 560, 564, 566, 568, 569, 571, 573, 574, 575, 580-584, 586—589, P).

BRĂILA. Absolvent Mihail Lucian (1408, 410, 414, 416, 442, 453, 455, 459, 461, 465, 465, P).

BUCUREŞTI. *Studenţi*: Alexandru St. Nicolae (P. N), Zaharescu Marius (P, N), *Torjescu Florin* (1325, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 346, 347, 348, 348 350, 351, 352, 354, 355, 356, 358, 362, 363, 364, 366, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 390, 391, P) Solcă I. Stefan (« Rezolvarea triunghiului »), *Roşianu C. Dragomir* (An I, Petrol şi Gaze) (1310, 320, 328, 340, 342, 354, 358, 372, 375, 378, 379, 384, 392, 402, 403, 405, 409,,410, 413, 414, 416, 436, 441, 449, 458, 459, 461, 464, P), *Bostan Emil Vulcani.* (1349, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 392, 393, 394, 402, 403, 404, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 423, 424, 426, 431, 432, 433, 436, 437, 440, 442, 443, 446, 449 454, 455, 458, 464, 465, P) *Tofan Liliana (Codlea)* 1363, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 383, 403, 409, 434, 436, 438. 442 443, 449. 458, 460, E: 544, 545. 547. 549, 550, 553. 558, 559, 560, 561, 562, 563, 566. 568, 569, 570, 571, 573, 574, 575, 576, 578, 580, 581, 582, 583, 586 587, 588); *absolvenţi* Manea Marin (1320, 326, 334, 335, 337, 354, 358, 360, 361, 372, 373,

374, 375, 378, 479, 382, 397, E: 546, 558, 559, 560, 561, 563, 565, 568, 570, 571, 574, 578, 579, 584, 586, 587, 588), Stoleru Gheorghe (1416, 436, 448, E: 563, 568, 571, 574, 576, 586, 588).

Şcoala medie Nr. 1 *băieţi « N. Bălcescu »*. Clasa VIII-a. Urmă Radu (1458, E: 537, 540, 544, 546, 547, 563, 564, 565, 568, 569, 570, 574, 575, 576, 578, 580, 585, 586, 587, 588, P). *Şcoala medie Nr. 2 băieţi* : Clasa IX-a. Creştinu B. Marin (1347, 378, 383, 418, 436, E: 563, 567, 568, 572, 574, 575). *Şcoala medie nr.* 4 *băieţi « Aurel Vlaicu » — Griviţa Roşie*. Clasa VIII-a. Iorgulescu C. Constantin (E: 553, 565, 567, 574, 575, 578, 580, 586, 587 588), Rădulescu Constantin (E: 505, 524, 526, 529, 539, 541, 559, 580, 587, 588), Stamatoiu Petre (1315, 316, 317, 335, 337, E: 515, 526, 529, 539, 559, 564, 580), *Zvorişteanu Alexandru* (1335, 337, 346, 360, 361, 362, 367, 385, 431, 432, 441, 456, 461, 474, 475, 476, 485, 493, 504, 510, E: 553, 565, 567, 572, 576, 577, 578, 579, 580, 585, 588), Chirigiu Constantin (1374, E: 558, 559, 563, 564, 568, 573, 574, 575, 577, 578, 581, 586, 587, 588), Mănescu Lucian (1441, 475, 493, E: 534, 553, 558, 559. 560, 567, 572, 588); clasa IX-a. Cristache Aurel (1373, 303, 403, 416, 449, 453, 472, 475, 493. E: 575, 580)Petre T. Tudor (1377, 407, 409, 411, 412, 416, 432, 441 449, 460, E: 554, 558, 559, 578, 579); clasa X-a. *Dumitrescu Badea Ovidiu* (1326, 339, 341, 367, 369, 371, 402, 413, 414, 433, 434, 461, 462, 472, 474, 475, 485, 486, 493, 495, E: 524, 525, 527, 528, 532, 563, 571, 574, 575), Dona Gh. Gheorghe (1371, 402, 416, 434, 461, 472, 483, 486, 493, 494, 495, E: 569, 574) Bădescu Marcel (1382, 383, 403, 404, 409, 436, 441, 442, 443, 449, 472, 474, 475, 482, 483, 486), Iovan Dumitru (1380, 383, 403, 416, 449, 472, 474, 482, 483, 486, E: 573, 388) Oancea Ion (1472, 473, 474, 475, 486, 492, E: 558, 559, 567, 568, 572, 578), Movanu Radu 1441, 449, 472, 474, 475, 482, 483, 486, 493, E: 577) Ghiţescu Liviu (1372, 378, 380, 382, 383, 410, 441, 449, 460, 472, 474, 475, 482, 486, 494, E: 546, 563, 568, 569, 570, 571, 572, 577, 578, 579 588), Popescu M. Octavian (1297, 315, 316, 317, 323, 335, 337, 340, 342, E: 578), Hanganu Ştefan (1382, 472, 474, 475, 482, 486, 493, 494, E: 540, 571, 578), *Sandu Gh. Ion* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 392, 395, 402, 403, 423, 424, 436, 415, 453, 456, 465, 467). *Stănăşilă Octavian* (1333, 339, 340, 342, 343, 380, 384, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 436, 472, 473) Spătaru Ion (1442, 446, 464, 469, 471, 472, 473, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 501, E: 580) Bonghez Valeriu (1372, 374, 377, 378, 383, 403, 372, 483, 484, 491), Dănescu Stelian (1409, 416, 474, 485, 493, 494, 495. E: 529, 539, 540, 542 546, 587, 588), Georgian Dan (1414, 448, 453, 458, 465, 472, 474, 475, 478, 479, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 494, 485, 498), Rudnic Marian (137, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, E: 559, 570 578), Ştefan Grigore 1409, 416, 461, 462, 475 483, 485, 493, 494, 495), Ţeţu Dumitru (1402, 409, 416, 461, 472, 483, 493, 495, E: 569, 574).

Şcoala medie 5 fete. Clasa IX-a. Cîmpu Demetra (1391, 405, 407, 409, 410, 411, 436, 441, 443, 460).

Şcoala medie 5 băieţi, clasa X-a. Drăghicescu Inocenţiu 1373, 374, 379, 381, 408, 409, 410, 411, 413, 416, 436, 442, 449, 456, E: 563, 568, 569, 571, 574, 575, 578, 581, 586, 587 588), Şerbescu Alexandru (1372, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 416, 436, E: 526, 528, 530, 559).

Şcoala medie 6 *băieţi*, clasa X-a. Popovici I. Radu ,(1376, E: 554, 558, 565, 576, 577, 579, 585, 589, 590).

Şcoala medie 8 *fete*. Clasa V-a. Mazilu Luminiţa (E: 561, 362, 563, 568, 574, 575, 581, 582, 583, 586, 588); clasa VIII-a. Gheţu Ioana (1383, 392, 402, E: 550, 551, 553, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 566, 568, 571, 573, 574, 575, 581, 582).

Şcoala medie nr. 11. Clasa X-a. Donciu Mihai (1372, 380, 383, 383, 385, 409, 411, 412, 414, 416, 436, 439), Mihăilescu Constantin (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 383, 385, 403, 406, 443, 448, 449, 465), Sîrbu Anton (1373, 376, E: 560, 561, 562, 563, 567, 568, 572, 574) Stăncescu Mihai (1373, 376, 379, 382, 383, 385, 397, 403, 408, 409, 410, 411, 412, 414, 416, 419, 436, 439).

Şcoala de 7 ani nr. 12. Clasa VII-a. Poenaru M. Marilena (E: 550, 551, 552, 553, 554, 555, 557, 558, 559, 560, 561).

Şcoala medie nr. 13. Clasa IX-a. Dobre Ion (1375, 402, E: 558, 560, 561, 562, 563, 567, 568 572); clasa X-a. Manea I. Mihai (1372, 375, 377, 381, 411, 423, 426, 442, 449, 465). *Tomescu C. Dan* (1372, 373,—386, 388, 389, 390, 393, 395, 396, 403—407).

Şcoala medie nr. 15, fete. Clasa IX-a. Horoianu Ileana (1372, 374, 375, 377, 378, 381, 383, 386, 403, 404, 411, 414, 416, 464), Teodorescu Viorica (1377. 386, 403. 408, 414, 416, 427, 439, 443, 449, 458).

Şcoala medie 17, băieţi. Clasa VII-a. Paşa Florin (E: 559, 563, 571, 574, 476, 477, 478, 479, 480, 482, 286, 587, 588), Stoica Mihail (E: 559. 563, 568, 571, 574, 576, 577, 579, 582, 586, 587, 588); clasa VIII-a. Adam Gheorghe (1449. 460 E: 558, 559, 566, 572, 576, 577, 578, 581), Gemiş Genan (E: 563, 565, 568, 571, 574, 575, 584, 586, 587, 588); clasa IX-a. *Duduica Radu* (1328, 379, 385, 389, 393, 395, 396, 403,404, 405, 409, 442, 415, 416, 418, 423, 426, 427, 434, 436, 438, 442, 443, 449, 452, 456, 458, 464, 465, E: 563, 564, 565, 566, 568, 569, 570, 571, 574, 587, 588), Iosif Gheorghe (1374, 377, 378, 393, 412, 436, E: 558, 561, 580, 585). Preda Constantin (1416, 418, 434, 436, 449, 456, 460, E: 576, 578, 580).

Şcoala medie nr. 18, băieţi. Clasa VI-a Ştefănescu Anton (E: 561, 563, 566, 568, 574, 575, 581, 582, 586).

Şcoala medie nr. 20, băieţi. Clasa VIII-a. Alexe Dan 1432, 437, E: 568, 569, 571, 572, 574, 575, 580, 582, 583, 584, 585, 587, 588), Zarapapel Tiberiu (1340, 372, E: 528, 553, 559, 563, 566, 567, 569, 571, 572, 574, 586).

Şcoala medie nr. 22, fete. Clasa VIII-a G. *Butoi Mihaela* (1403, 404, 460, E: 551, 554, 557, 558, 559, 563, 567, 568, 571, 574, 575, 580, 586, 587, 588).

Şcoala medie tehnică de metrologie. Anul III. Paraschivescu Remus (1372, 374, 375, 347, 378, 379, 381, 383, 384, 385, 416, E: 558, 560, 561.

Şcoala medie tehnică nr. 1, «Iosif Rangheţ». anul III. Fulga Dumitru (E: 523, 525, 526, 532, 539, 540, 544, 546, 547, 558, 559, 560, 561, 563, 570, 571, 574, 577, 578, 579, 586, 587).

Scoala medie tehnică de mecanică nr. 2. Anul II C. *Pescaru Nicolae* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 392, 402, 403, 406, 408, 409, 410, 416, 436, 449).

Şcoala medie tehnică de măsurători terestre. Anul III. Maftei Nicolae (1459, 461, E: 563, 567, 568, 572, 574, 578, 579).

Şcoala de 7 ani nr. 119 băieţi Clasa V-a Mira Eugen (E: 563, 568, 571, 574, 575, 582, 583, 586, 587, 588).

Şcoala de 7 ani nr. 148. Clasa VII-a. Băjenescu Mircea (1469, E: 559, 563, 568, 574, 578, 579, 581, 585, 586, 587, 590).

Şcoala elementară nr. 176. Clasa VI-a. Zvorişteanu Doina (1362, E: 540, 546, 553, 567, 572, 574, 576, 577, 586, 587, 588).

Fără indicaţie de şcoală. Clasa VII-a. Iliescu Sergiu (E: 554, 557, 559, 563, 568, 571, 574, 578, 581, 586, 588).

BUHUŞI. (Reg. Bacău). Absolventă, Caşter Clara (1449, 451, 467, E: 578, 581, 584, 585, 586, 587, 588).

BUZĂU. Clasa IX-a. Mirea Lucia (1375, 378, E: 544, 546, 547, 558, 559, 563, 567, 571, 572, 574, 575), Nedelcu Nicolina (E: 554, 558, 559, 560, 561, 568, 569, 572, 574, 586, 587, 588), Olteanu Cristina (1372, 375, 396, E: 554, 558, 559, 560, 561, 563, 568 569, 571, 574), Văceanu Eleonora (1346, 349, E: 558, 559, 567, 571, 574, 576 587, 588), Vînt Stanca (1375, 436, 449, E: 550, 558, 559, 560, 563, 564, 565, 567, 568, 569, 572, 580, 586, 587, 588), Sandu Elenora (1436, E: 562, 563, 567, 568, 569, 571, 574, 576, 586, 587), Voinoiu N. Adelina (1449, E: 550, 554, 559, 561, 568, 574, 576, 586, 588); clasa,

X-a. Alexandru Alexandru (1396, 436, E: 558, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 586, 587, 588), Cristea Pompiliu (1373, 379, 380, 408, 409, 416, 441, 442, 443, 449), Dragos Aora (1372, 373, 374, 375, 378, 379, 380, 381, 382, 388, 386), Mihalache Traian (1372, 373, 378, 411, 416, 423, 436, 442, 467, E: 558, 559, 563, 578, 580), Weisselberg Marcel (1372 373, 344, 375, 376. 377, 378, 379, 381. 383, 385, 392), Zecheru Constantin (1373, 374, 380, 403, 416, 432, 449, E: 563, 568, 574, 478, 587).

CĂLĂRAȘI. Clasa IX-a. Simionescu I. Dumitru (1377, 378, 388, 403, 407, 449, 460, E: 559, 577, 578, 579, 586, 587, 588); clasa X-a. Dudă Nicolae (1409, 416, 436, 441, 443, E: 558, 559, 560, 569, 570, 571).

CALAFAT. Clasa VIII-a. Ciurezu C. Radu (1373, 375, 460, E: 554, 558, 559, 560, 504, 563, 565, 571, 574, 586, 587, 588).

CARACAL. Clasa VIII-a. Niculescu D. Stelian (1403, 449, 460, E: 551, 558, 560, 561, 563, 568, 571, 574, 575, 580, 582, 587, P).

CLUJ. Pogăngeanu Petre (« Teoria și aplicațiile firului calibrat »). Clasa X-a. Stoian Gabriel (1335, 336, 340, 349, 359, 372, 373, 375, 382, 384, 413, 453, 458, E 554, 558, 582). Turcu Radu (1429, 432, 436, 441, E 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 578). *Școala specială muncitorească* anul II. Pîrîu Ștegan (1374, 378, 412, 413, 434, 436, 460, E: 563, 569, 580), Pistol Nicolae (1412, 415, 416, 418, 423, 424, 436, E: 563, 565, 567, 571, 572, 574). Pop Grigore (1326, 341, 354, 358, 378, 379, 382, 436, E: 554, 555, 557, 558, 578), Sîngereanu Gheorghe (1374, 378, 380, 383, 390, 393, 407, 408, 410, 413, 414, 416, 423, 436, 441),

CÎMPULUNG MOLDOVENESC (Suceava) *Școala medie tehnică de contrucții civile și edilitare. Boloca Ioan* (1347, 349, 351, 353, 354, 358, 362, 363, 367, 370, 373—384, 395, 402, 403, 404, 408—416, 418, 419, 424, 436, 437, 441, 442, 443, 449, 453, 456, 458, 464, 465, 466).

CONSTANȚA. *Școala hidrotehnică.* Anul II. Ghencea Adrian (1372, 373, 379, 383, 396, 402, 403, 422. 442, 449, E: 563, 568, 569, 570, 571, 574, 575, 576, 577, 578 579, 580, 581, 584, 586, 587, 588), *Vasiliev Lucia* (1372, 373, 374, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 396, 402, 403, 404, 407, 408, 409, 413, 422, 436, 437, 442, 446, 449, 458, E: 541, 552, 444, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 567, 568, 569, 570, 571, 574, 575, 576, 578, 579, 580, 581, 582, 584, 586, 587, 588).

Anul III. *Stepan Ionel* (1372, 373, 374, 376, 379, 381, 382, 383, 385, 386, 389, 390, 392, 393, 394, 395, 396, 401, 402, 403, 405. 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 423, 425, 429, 431—434, 437, 438, 439, 440, 442, 449, 458, 459. 490, 461, 465, E: 550, 551. 552, 554, 555, 556, 557, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 567, 568, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 584, 586, 587, 588). Anul IV. *Lambă Stelian* (1372, 373, 374, 375, 376, 377. 378, 379, 390, 383, 384, 385, 386. 402 403. 405, 408. 410, 411, 412, 413, 414, 416, 418, 423, 424, 436, 443, 449, 453, 456, P). *Școala medie de 10 ani.* Clasa VIII-a. Iordache Gh. Elena (E: 563, 568, 569, 574, 575, 581, 484, 586, 587, 599), Cornea Gheorghe, (1372, 373, 374, 375 377, 379, 380, 383, 385, 396, 404, 405). Clasa IX-a. Encica Traian (1418, 439, 443. 449, 460, E: 570, 577, 580, 585, 586, P); clasa X-a *Cristea I. Ion.* (1431—434, 436—443, 449, 453—456, 458—461, 463—468, P). *Școala de 7 ani din Cobadin.* Clasa VII-a. Geantă Elena (E: 560, 563, 567, 568, 569, 571, 574, 575, 576, 582, 584, 586, 587).

CRAIOVA. *Școala medie serală mixtă.* Clasa X-a Stroescu Elena (1373, 374, 375, 377, 382, 403, 404, 412, 413, 416, E: 558, 560, 561, 563, 565, 568, 574, 575). *Școala medie nr.* 1 Clasa X-a *Trifan Vasile* (1374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 385, 402, 403, 404, 408, 410, 512, 413, 416, 423, 432, 434, 436, 437, 439, 440, 442, 449, 455, 465, P). *Țurlea I. Cornel* (1375, 341, 402, 403, 408, 409, 412, 413, 416, 419, 421, 423, 424, 426, 432, 436, 439, 441, 443, 449, 452—456, 464—467, E: 558, 560, 563, 564, 565, 568, 569, 570, 571, 574, 575, 586, P *Școala medie nr. 2, băieți.* Clasa VIII-a. Barboiu Mircea (1377, 449, E: 563, 571, 572, 573, 574, 587, 588); clasa IX-a Bărbulescu I. Nicolae (1375, 409, 416, 436, E: 563, 567, 568, 571, 572, 574 580, 586, 587, 588), Lăban Vasile (1372, 374, 377, 378, 383, 392 404, 411, 416, 423, 436, 439); clasa X-a. Diaconu Marin (1375, 377, 378, 407, E: 558, 559,

560, 561, 562, 563, 567, 572, 574, 575, 578, 581, 584, 586, 587, 588). Clasa X-a. Raciula I. Stelian (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 383, 384, 386, 392, 403, 434, 442, 448, 449, 458, 560, 468, E: 558, 559, 563, 565, 566, 568, 669, 571, 572, 574, 576, 578, 579, 580. 582, 584, 586, 587, 588). *Grupul şcolar c.f.r.* anul III. Burlan I. Ştefan (1393, 449, 460, E: 558, 559, 560, 561, 580, 582, 583, 584, 586, 587, 588), Radu C. Nicolae (1409, 416, 441, 444, E: 567, 568, 572, 577, 578, 584, 586, 588), Voiculescu Iordan (E: 535, 537, 540, 542, 546, 547, 563, 564, 565, 568, 571, 574, 575, 584, 586, 587, 588). *Şcoala medie electrotehnică.* Anul II. *Dinu Gh. Gheorghe* (1373, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 382, 385, 386, 388, 390, 392, 393, 395, 401, 403, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 415, 416, 418, 424). *Gradiste Olteţ* — Dumitrescu C. Nicolae (1442, 449, 451, 565, E: 582, 584, 586, 587, 588, P).

CURTEA DE ARGES. Clasa X-a Dumitrescu I. Aurel (1349, 353, 354, 356, 358, 362, 363, E: 573, 574, 580, 583).

DEJ. Clasa IX-a. Luchian Oltea (1372, 378, 384, 392, 406, 413, 416, 436, 439, E: 553. 558, 569, 573), Mohi Sofia (1436, E: 559, 563, 568, 571, 574, 584, 586, 587, 588), Platon Livia (1378, 436, 437, E: 558, 565, 568, 571, 574, 584, 587). Waldhorn Gherhard (1460, E: 563, 567, 574, 577, 580, 584, 586, 587, 588).

DOROHOI. Clasa X-a. Jaşcanu Mihai (1409, 410, 411, 432, 441, 442, E 563, 568, 569, 571, 572, 574, 575).

DRĂGĂŞANI. *Şcoala medie tehnică de agricultură din Voiceşti.* Anul I. Balaş V. Marin (1434, 460, E: 558, 563, 568, 571, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 582, 586, 587, 588), Dragoi Ion (E: 505, 524, 526, 529, 532, 563, 574, 580, 587); anul II. Busuioc Aurelia (E: 524, 563, 568, 571, 572, 574, 576, 577, 578, 582, 586, 587), Madan N. Georgeta (E: 558, 563, 568, 571, 574, 577, 578, 582, 584, 586, 587, 588), Mihăilescu Gheorghe (E: 563, 571, 572, 574, 576, 577, 578, 582, 586, 587); anul III. Dascălu C. Mircea (E: 563, 568, 569, 571, 572, 574 576, 577, 579, 582, 587).

Va urma în numărul 6 restul de rezolvitori localităţile care încep cu literile (*F*—*Z*).

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

ERATĂ. La exerciţiul E: 636 în loc de *nb* se va scrie *b*; iar în loc de (a—*ab*) se va scrie (a—2b).

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F. — seria B.*

— *Se primesc soluții numai* la problemele și exercițiile din ultimele *patru* numere apărute.

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului* 1955, *se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul* 1955.

— *Pentru anul* 1955, *G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.*

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *In redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute, corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții au fost scrise îngrijit și sînt bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a «Olimpiadei matematice și fizice»*, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a presei București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat *să facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

Cititorii și colaboratorii revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care doresc să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15—18, miercuri între orele 10—13 și sîmbătă între orele 15—18 la sediul redacției din strada Academiei 14, București — Telefon 4.46.53.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi* de **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **I. S. Şklovski** (lei 6,85)
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu** (lei 6,55)

• • •

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 5, PENTRU URMĂTOARELE ŞASE NUMERE

492 — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1926
KAT
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - ECHANGE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - OMEHA

Anul VI—Iunie 1955

6

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 6 — Iunie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Ion Ionescu de Al. Stoenescu*	245
2.	*Rezultatul Olimpiadei tinerilor matematicieni şi fizicieni pe anul 1955*	248
3.	*Asupra operaţiilor cu puncte de G. I. Bercea*	253
4.	*Note matematice*	255
5.	*Caleidoscop matematic*	256
6.	*Vibratorul cu frecvenţă standardizată pentru studiul undelor, de D. Tănase*	258
7.	*Diverse*	260
8.	*Chestiuni propuse la Olimpiada de Matematică şi fizică, etapa finală, Bucureşti 2 Mai 1955 (1654—1680)*	261
9.	*Chestiuni de examen (1681—1699)*	265
10.	*Probleme rezolvate* (1221, 1283, 1323, 1328, 1330, 1332, 1346, 1350, 1352, 1355, 1378, 1379, 1380, 1381, 1382, 1383	266
11.	*Probleme propuse (1700—1724)*	276
12.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 653—E: 668)*	280
13.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	282

ANUL VI 6 IUNIE 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Muszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 6 Iunie 1955

LA A 60-A ANIVERSARE DE LA APARIŢIA PRIMULUI NUMĂR AL «GAZETEI MATEMATICE»

ION IONESCU

DE

ALEXANDRU STOENESCU

prof. univ.

OAMENII de ştiinţă au în viaţă un scop măreţ: de a contribui prin munca lor la progresul omenirii, de a asigura prin ea generaţiilor viitoare un trai mai bun, mai fericit, condiţii de libertate şi pace.

Vorbind despre oamenii mari ai ţării noastre care au atins acest nobil scop, trebuie să citãm numele profesorului Ion Ionescu, a cărui viaţă este un exemplu de muncă, luptă şi sacrificiu.

Născut la 22 noiembrie 1870 în comuna Creaţa-Leşile din Ilfov, Ion Ionescu îşi începe viaţa în condiţii grele. Nu împlinise încă vîrsta de 10 ani cînd tatăl său, slujbaş modest, moare la spitalul Colţea din Bucureşti, cerîndu-i pe patul de moarte să fie cuminte, să înveţe bine şi să aibă grijă de mama şi de fraţii lui mai mici. Singura avere pe care o lăsa tatăl său era suma de 5 lei numerar şi 16 kilograme de orz.

De atunci începe pentru Ion Ionescu o luptă dîrză, lupta pentru existenţă şi pentru învăţătură.

«Îmi sînt şi acum neuitate nopţile lungi în care îmi pregăteam lecţiile şi examenele, sau îmi făceam unele lucrări, nopţi în care mama mea stătea lucrînd alături de mine» — mărturiseşte Ion Ionescu referitor la această epocă a vieţii sale.

Dar munca continuă şi dîrză îl face să învingă toate greutăţile.

Ion Ionescu termină astfel cursul primar, apoi şcoala comercială.

Dragostea lui Ion Ionescu pentru matematică începe în această epocă a vieţii sale. Iată ce ne spune el despre primul său contact cu logaritmii: «logaritmii mi-au arătat frumuseţile pe care le ascunde matematica; am aruncat atunci cărţile de basme căutînd să mă apropii de ştiinţă».

Ion Ionescu urmează Școala Națională de Poduri și Șosele, o absolvă strălucit, apreciat de profesori și admirat de colegi.

Tînăr inginer, Ion Ionescu este angajat la Direcția Generală a Căilor Ferate, unde desfășoară o activitate intensă lucrînd sub conducerea marelui inginer Anghel Saligny la construirea podului de peste Dunăre, de la Cernavodă, cea mai îndrăsneață lucrare de acest fel din Europa în acel timp. Învingînd marile greutăți întîmpinate la calculul și execuția acestui pod, Ion Ionescu își desăvîrșește cunoștințele tehnice ajungînd cel mai mare specialist al țării noastre în construcții de poduri.

Principala sa activitate a fost însă aceea de profesor de Poduri la Școala Națională de Poduri și Șosele, iar apoi la Politehnica din București, activitate bogată care a durat 37 de ani.

Elevii săi, printre care mă număr și eu, l-au apreciat ca pe un mare dascăl; era foarte exigent față de toți, dar mai ales cu el însuși, drept, neclintit de la datorie și muncă, modest, adversar al oricărui compromis.

Îmi reamintesc cum înaintea primei ore de curs la prof. Ion Ionescu am venit la Școală cu cîteva ore mai devreme și am făcut « coadă » la ușa sălii de curs pentru a intra printre primii și a-mi ocupa un loc bun mai aproape de catedră. Această primă lecție, am ascultat-o toți cu emoție, într-o tăcere desăvîrșită. Profesorul ne-a cucerit prin expunerea lui clară, logică, concisă. Și așa au fost toate lecțiile ținute de Ion Ionescu. Din ele s-au desprins calitățile caracteristice ale acestui mare profesor: punctualitate desăvîrșită, grijă deosebită pentru predare; lecțiile sale erau totdeauna minuțios pregătite, incontinuu refăcute, în pas cu progresele tehnicii. Examenul și proiectul dat la Ion Ionescu trebuiau pregătite temeinic; era cunoscută exigența mare a profesorului. La examene se interesa de toate detaliile; cerințele sale față de studenți la prezentarea memoriului de calcul, a planșelor cu piesele de lemn desenate cu fibre, cu bolțile în laviu, cu secțiunile, metalice cu fileuri de lumină, etc. erau excesive. Îmi amintesc că la proiectul de pod metalic, numai la trasul în tuș și la cotat am lucrat trei săptămîni cîte 14 ore pe zi.

Pe atunci această muncă migăloasă mi se părea inutilă; astăzi însă știu că numai ea poate forma la student caracterul ferm, voința de a termina o lucrare cu orice sacrificiu, puterea de a atinge scopul propus.

Desigur, niciunul din foștii săi elevi nu poate uita clipa solemnă în care, după susținerea ultimului proiect, Ion Ionescu îl felicita strîngîndu-i mîna și urîndu-i succes în carieră.

Ion Ionescu a știut să formeze din elevii săi nu numai ingineri de specialitate, dar și oameni adevărați care știu să lupte, să muncească fără preget și să se mulțumească cu un trai modest dar demn.

Iată ce spunea despre această activitate, regretatul A. Gh. Ioachimescu:

« Ion Ionescu a căutat să dea cunoștințe variate și utile, dar mai ales să formeze caractere. Binevoitor cu cei care țin drumul drept; el este neînduplecat cu cei care caută să ajungă prin mijloace piezișe ».

« Nu am lipsit nici o zi de la cursul meu, nu-mi las lecțiile nepregătite, nu las cursul să se învechească », spune însuși Ion Ionescu într-o cuvîntare a sa. Elevii săi s-a dovedit a fi bine pregătiți, capabili să îndeplinească cu cinste sarcinile ce le-au fost puse la marile construcții socialiste din țara noastră, precum construcția liniilor Bumbești-Livezeni, Salva-Vișău, a podului peste Dunăre la Giurgiu, a hidrocentralei de la Bicaz, etc.

Pentru admirabila sa activitate didactică profesorii Politehnicii și elevii săi recunoscători, au fixat în sala A I. 1 a Institutului Politehnic în care și-a predat cursul, o plachetă de bronz care reprezintă pe Ion Ionescu la catedră expunînd lecția.

O altă latură a activității lui Ion Ionescu este aceea depusă în cadrul «Gazetei Matematice», al cărei membru fondator era (1895) și la care a colaborat pînă la sfîrșitul vieții sale.

Este cunoscută munca depusă de Ion Ionescu precum și sacrificiile materiale pe care le-a făcut pentru înființarea și apariția regulată a «Gazetei Matematice»; primele ei numere au apărut prin contribuția exclusivă a primilor săi cinci membri, a inginerilor Ion Ionescu, Vasile Cristescu, Victor Balaban, Mihail Roco și Ion Zottu.

Începînd chiar din primul număr al «Gazetei Matematice», întîlnim semnînd pe Ion Ionescu diferite articole, note, probleme și propuneri. Această activitate este cu atît mai importantă cu cît știm că «Gazeta Matematică» a avut un rol mare în pregătirea științifică a cadrelor de matematicieni și ingineri; din rîndul foștilor colaboratori s-au ridicat eminenți matematicieni și ingineri, care s-au remarcat în știință și în înfăptuirile măreție ale patriei noastre.

Dragostea lui Ion Ionescu pentru tineret s-a manifestat prin grija deosebită cu care l-a pregătit pentru a corespunde cerințelor din ce în ce mai mari ale progresului. El sfătuiește pe cei tineri să lucreze continuu, conștiincios și ordonat.

«Voința, inițiativa, perseverența, răbdarea sînt elementele care garantează succesul în matematici», spune Ion Ionescu.

«Farurile călăuzitoare în viața noastră trebuie să fie: entuziasmul, armonia, munca dezinteresată și sacrificiile continue», recomandă Ion Ionescu.

«Rolul matematicianului este să deschidă drumul științei» — spune el în altă parte.

Pentru pregătirea tineretului, Ion Ionescu tipărește în colecția «Gazetei Matematice» numeroase lucrări dintre care citățm: cunoscutele Culegeri de probleme de aritmetică, Betonul Armat, Maxime și Minime Geometrice (lucrare reeditată de curînd), Nomografia lui D'Ocagne, Monografii matematice și tehnice, etc.

O altă latură remarcabilă a activității lui Ion Ionescu este colaborarea la istoria matematicii în țara noastă, în care poate fi considerat un adevărat deschizător de drumuri.

Dintre lucrările sale în acest domeniu menționăm: Aritmetica și Geometria lui Gheorghe Lazăr, Aritmeticile lui Lazarini, Algebra lui Petrache Poenaru, primele cărți românești de aritmetică, geometrie și trigonometrie, Matematica în Regulamentul Organic, Istoricul Învățămîntului Inginerese în Romînia, Asupra Studiilor lui Asachi, Aritmetica Spătarului Nicolae Milescu Cîrnu, etc.

În alte lucrări Ion Ionescu evocă cîteva figuri importante legate de istoria și progresul țării noastre, precum: Antioch Cantemir, Doctor C. Istrati, Profesorul Gh. Kirilov, etc.

Ion Ionescu se ocupă și de unii mari matematicieni ai lumii: Pitagora, Newton, Ampère.

Iată cum își încheie Ion Ionescu, lucrarea sa despre Pitagora: «Puneți-l alături de numele oamenilor mari ai omenirii sau cel puțin înlocuiți un nume de tiran cu numele lui Pitagora».

O grijă deosebită a avut Ion Ionescu pentru răspîndirea cît mai largă a matematicii și tehnicii. În această privință Ion Ionescu spune: «Foarte puțini matematicieni și-au dat seama că matematicile nu pot progresa decît dacă cu ele

se vor ocupa cît mai mulți oameni și că ei trebuie să tindă să le facă mai accesibile, mai populare».

Citățm ca lucrări de popularizare ale lui Ion Ionescu «Povestiri științifice» (două volume).

Nu pot termina această evocare a figurii lui Ion Ionescu fără a sublinia extrema sa modestie precum și spiritul său de disciplină și ordine. L-am vizitat adesea pe Ion Ionescu în locuința sa din str. Căluşei 13 și în aceea din str. Răsuri 25, locuințe simple, fără lux, mobilate doar cu strictul necesar.

Îmi reamintesc și acum clasoarele și fișierele cu plicuri înțesate cu probleme păstrate cu multă grijă într-o ordine desăvîrșită.

Profesorul Ion Ionescu moare la 17 septembrie 1946, după o boală grea, în vîrstă de 76 ani.

Închei cu cuvintele spuse de marele și regretatul Gheorghe Țițeica despre Ion Ionescu:

«Prin munca sa, prin caracterul său, prin linia dreaptă a vieții sale el va rămîne legendar. Peste zeci de ani, cînd amănuntele se vor uita, unii vor mai spune: am cunoscut un eminent inginer, un om de granit cu inimă de aur, un om de ispravă, pe profesorul Ion Ionescu».

REZULTATUL „OLIMPIADEI TINERILOR MATEMATICIENI ȘI FIZICIENI 1955"

VĂZÎND interesul deosebit al unui mare număr de elevi ai claselor V, VI, VII pentru Olimpiadele de Matematică și de Fizică **desfășurate în anii 1953 și 1954, în scopul stimulării studiului acestor discipline Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. a organizat în acest an,** Olimpiada Tinerilor Matematicieni și Fizicieni **pentru elevii claselor a V-a, VI-a, a VII-a. Pentru prima oară s-a organizat această Olimpiadă simultan de matematică și de fizică. Scopul a fost de a face pe elevi să adîncească legătura între matematică și fizică, să urmărească dezvoltarea tehnicii și contribuția acestor discipline la construirea socialismului.**

Problemele propuse au fost publicate în nr. 1/1955 din « Gazeta Matematică și Fizică **»,** seria B. **Textul lor a fost difuzat în luna martie 1955 cu sprijinul Ministerului Învățămîntului, în școlile elementare și medii din țară.**

Olimpiada a provocat un deosebit interes. Au trimis rezolvări circa 18000 elevi din toate regiunile țării, în limba romînă, maghiară și germană, reprezentînd școli situate în mare măsură, în mediul rural.

Numărul participanților este în felul acesta, sporit (cu 40% față de numărul celor din anul precedent), cu toate că s-au propus probleme de matematică și de fizică, iar nivelul lor a fost mai ridicat decît cel din anii precedenți.

Cu toate că indicațiile date au precizat că « este o cinste pentru fiecare școlar de a trimite doar soluțiile acelor probleme pe care le-a rezolvat singur **», se constată și în anul acesta că unii elevi au trimis lucrări rezolvate cu ajutorul altor persoane, copiate. S-au găsit astfel, numeroase lucrări din care reese că nu au fost rezolvate de elevi și lucrări asemănătoare ale unor elevi aparținînd aceleiași școli.**

Asemenea fapt reprezintă un aspect negativ în educația elevilor, lucru pe care îl semnalăm profesorilor și părinților, pentru a evita repetarea lui.

După îndepărtarea lucrărilor slabe, incomplete sau neserioase și a acelora care în mod izbitor arătau că nu erau lucrate de elevul care le-a trimis, au fost apreciate ca lucrări bune cele trimise de circa 2500 elevi. Dintre acestea au fost selecționate cele mai bune

pe baza numărului de probleme rezolvate, a calității soluțiilor și a felului de redactare. Astfel au fost găsite foarte bune, lucrările a 1012 elevi; dintre aceștia au fost premiați 503, iar restul menționați. Publicăm mai jos, lista nominală pe regiuni și clase a premianților la « Olimpiada Tinerilor Matematicieni și Fizicieni 1955 ». Filialele S. S. M. F. din reședințele din regiuni, distribuie Diplomele de merit și premiile celor cuprinși în tabela anexată.

Cercetînd repartizarea numărului de rezolvitori, de premiați, de menționați, pe regiuni, se poate aprecia că în fruntea lor se situează orașul și regiunea București (1704 rezolvitori, 124 premiați) regiunea Ploiești (cu 1200 rezolvitori din care 33 premiați); regiunea Pitești (1000 rezolvitori și 41 premiați); regiunea Iași (800 rezolvitori și 32 premiați); apoi, regiunele Cluj, Stalin, Timișoara.

Se remarcă o creștere apreciabilă a numărului participanților în cîteva regiuni: Arad (800 față de 300 în anul trecut), Bîrlad (800 față de 400), Iași (800 față de 400). Deasemeni a crescut numărul participanților în regiunile Timișoara, Oradea, Constanța. Regiunea Autonomă Maghiară a avut în anul acesta un număr de peste 4000 de participanți, însă cele mai multe lucrări au fost slabe, așa încît au fost premiati numai 28 de elevi.

In unele regiuni (Craiova, Suceava) se constată o scădere a numărului de participanți la Olimpiadă, față de anul trecut. Rezultatele cele mai slabe au fost obținute în regiunile: Bacău (300 participanți), Baia Mare (270), Hunedoara (300).

In ceea ce privește participarea pe clase se constată că majoritatea (55%) sînt elevi ai clasei a V-a și doar 20% ai clasei a VII-a. Este de dorit ca în anii următori, să participe la Olimpiade, un procent mai mare dintre elevii claselor a VI-a și a VII-a. Este bine ca rezultatele din acest an să stimuleze școlile și pe elevi la o participare activă și serioasă, să determine o ridicare generală a nivelului studiului matematicii și fizicii.

Felicităm pe premiații « Olimpiadei Tinerilor Matematicieni și Fizicieni 1955 » și le urăm spor la muncă!

TABELUL PREMIANȚILOR

BUCUREȘTI (Capitală). *Raionul « N. Bălcescu »*. Clasa V-a: Argam A. (s. m. 8) Botu Petre (șc. nr. 112), Fisler Alex. (șc. b. 119), Froimescu Adrian (șc. b. 119), Mircea Eugen (șc. b. 119), Neagoe Gh. (șc. 103), Postelnicu Tudor (șc. b. 119), Smilovici Marius (șc. b. 119); clasa VI-a: Pădureț Victoria (șc. f. 92); clasa VII-a: Criveanu Șerban (șc. b. 122), Nițescu Petre (șc. b. 119), Poenaru Marlena (șc. f. 120).

Raionul « Gh. Gheorghiu-Dej ». Clasa V-a: Hoară Anghel (s. m. b. 1), Rosicovici Adrian (șc. germană), Stan Mircea (s. m. b. 1).

Raionul « Griviția Roșie ». Clasa V-a: Petra Dumitru (șc. mixtă 24), Stoianovici Dumitru (ș. m. 6); clasa VI-a: Crivăț Gabriela (ș. m. f. 5).

Raionul « V. I. Lenin ». Clasa V-a: Bădescu Margareta (ș. m. f. 22), Bodeanu Maria (și. el. f. 126), Borcea Rodica (șc. el. f. 126), Cărăușu Magdalena (șc. el. f. 126), Ceicu Mirela (sc. m. f. 22), Constantinescu Irina (ș. m. f. 22), Georgescu Romanița (ș. m. f. 22), Levy Odette (șc. el. f. 126), Manea Irina (șc. el. f. 150), Opari Brîndușa (ș. m. f. 22), Stroescu Dan (șc. el. b. 131), Vasilescu Carmen (s. m. f. 22); clasa VI-a: Alexandrescu Anca (șc. el. f. 150), Bratoloveanu Ion (șc. el. b. 133), Buruiană Virginia (șc. el 124), Cealian Maria (șc. el. f. 150), Dincă Ana (șc. el. 150), Gîdoiu Ecaterina (șc. el. 124), Glod Florica (șc. el. f. 150), Pîrloiu Gabriel (șc. el. b. 133), Popa Mircea (șc. el. b. 133), Pospișil Constantin (șc. el. b. 133), Vîlceanu Irina (șc. eș. f. 150); clasa VII-a: Constantinescu Cornel (șc. el. b. 131), Dociu Cornelia (șc. el. f. 150), Mihail Oprica (șc. el. f. 150), Purcel Marina (șc. el. f. 150), Mureșan Violeta (șc. el. f. 150).

Raionul « I. V. Stalin ». Clasa V-a: Alexa Victoria (șc. mixtă el.), Cohen Noemi (șc. f. 2.), Constantinescu Paula (șc. f. 2), Cristescu Mircea (șc. mixtă el.), Gheorghe Maura (șc.

f. 2), Ghiţescu Anca (şc. f. el. 10), Mazilu Luminiţa (s. m. f. 8), Popa Alexandru (şc. b. 20), Stănescu Doina (şc. f. 2), Ştefaniu Mihai (şc. mixtă el.); clasa VI-a: Dumitrescu Mihaela (şc. f. 2), Gheorghiu Irina (şc. mixtă el. 7), Georgescu Marta (şc. f. 2).

Raionul « Tudor Vladimirescu ». Clasa V-a: Arbore Lucia (şc. el. f. 73), Alexandrescu Luminiţa (şc. el. f. 70), Banu Anca (şc. el. f. 73), Ciobanu Ion (ş. m. b. 18), Elika Faibiş (şc. el. b. 76), Endinorian Krikor (şc. mixtă armeană), Giurgea Anca (ş. m. f. 16), Harutunian Areg (şc. mixtă armeană), Muhlmann Enriquette (ş. m. f. 16), Nicolescu Ştefania (şc. el. f. 79), Popovici Carmencita (şc. m. f. 16), Salovici Ioana (ş. m. f. 16), Şerban Radu (ş. m. b. 18), Sostarich M. (şc. el. b. 71); clasa VI-a: Frîncu Mihaela (ş. m. f. 16), Simon Oana (ş. m. f. 16); clasa VII-a: Nicolescu Miron (ş. m. b. 18).

Raionul « 1 mai ». Clasa V-a: Bondoc Cecilia (şc. el. f. 37), Frăţilescu Tatiana (ş. m. f. 10), Gavrilescu Şerban (ş. m. b. 12), Golea Adina (ş. m. f. 10), Popescu Mihai, Schönfeld Adina (ş. m. f. 10), Socolescu Anca (s. m. f. 10); clasa VI-a: Ferhat Givan (şc. m. b. 11), Predoescu Marieta (ş. m. f. 10), Sălăgeanu Simona (s. m. f. 10); clasa VII-a: Atanasiu S. (ş. m. 11), Formuş Radu (şc. el. b. 21), Ionescu Maria (şc. el. 37), Pătruţ Ştefan (ş. m. b. 11), Popescu Eugen (şc. el. b. 22), Repciuc Florica (şc. el. f. 25,) Trifu Vasile (şc. el. 23).

Raionul « 23 august ». Clasa V-a: Constantin Elena (şc. e. f. 63), Crîcea Dumitru (ş. m. b. 13), Jiga Steliana (ş. m. f. 15), Lenciu Steliana (ş. m. f. 15), Popescu Marius (ş. m. b. 13), Sorescu Casandra (ş. m. f. 15); clasa VII-a: Ionescu Alexandru (şc. el. b. 54).

REGIUNEA BUCUREŞTI. Clasa V-a: Bătineţu P. (Pietroşani-Zimnicea), Puţaru Marin (Bragadiru), Staica Alexandra (Viişoara), Dragomirescu Steliana (Viişoara), Mătuşa Maria (Viişoara), Ghiţoiu Nicolae (şc. 2, Zimnicea), Klein Günter (Fundata-Slobozia), Cotorobai Florica (Fundata), Pereanu Emilia (şc. 2. f. Drăgăneşti-Roşiori), Chiriac Dumitru (şc. mixtă Mărculeşti), Preotu Laura (Belitori), Alexandru Olimpia (Chiselet-Olteniţa), Agafiţei Elena (Olteniţa), Mali N. Virgil (Cocioc-Snagov), Broscaru Riţa (Hagieşti-Brăneşti), Gogoaşe Elena (Cacaleşti-Giurgiu); clasa VI-a: Mitrache Ion (Băcăleşti—N. Bălcescu), Vişinescu Mihai (s. m. I. Giurgiu); Clasa VII-a: Chiocan Tudora (Chiriacu Biru Giurgiu), Ungureanu Ştefan (N. Bălcescu-T. Măgurele), Stănescu Mihai (N. Bălcescu), Ivan Maria (Olteniţa), Vasilică Gheorghe (Fundata Slobozia), Grigorescu Angela (Roşiori).

REGIUNEA ARAD. Clasa V-a: Friş Erika (ş. m. 4. Arad), Reiss Maria (ş. m. 4, Arad), Henţiu Minodora (ş. m. 5, Arad), Sîrbu Dorina (ş. m. 5, Arad), Şuteu Luminiţa (ş. m. 5, Arad), Blaj Doina (şc. el. 19, Arad), Belei Ana (Berechiu-Ineu), Matei Cornel (Berechiu-Ineu), Ambruş Ioan (Socodor-Criş), Paul Magdalena (şc. germană Ceanad), Gaspar Ileana (şc. germană Ceanad), Roth Elfriede (şc. germană Tomnatic), Krajescovics Ileana (Buteni-Gurahonţ), Rivaş Maria (Pîncota), Sipoş Mircea (Pîncota); Clasa VII-a: Beştea Călin (ş. m. nr. 1, Arad), Gerőcs Erszebet (şc. el. nr. 3, Arad), Glodeanu Mariana (şc. el. 15/32 Arad), Marşeu Pavel (şc. 19 Arad), Nădăban Ioan (şc. el. 19 Arad), Zbîrcea Ecaterina (Sebeş-Gurahonţ), Ispas Bujorel (Buteni).

REGIUNEA BACAU. Clasa V-a: Barbu Elena (şc. 8. Bacău), Mazilu Nicolai (Moineşti), Manole Luiza (ş. m. f. P. Neamţ), Barcan Eugenia (Borleşti), Teodoru Doina (Humuleşti), Bosînceanu Octavian (ş. m. b. P. Neamţ), Daniel Mioara (ş. 8 Bacău), Zukermann Kurti (şc. 5 Bacău) Clasa VI-a: Vueric Traian (şc. 8 Bacău), Postolache Corneliu (ş. m. b. Bacău), Hodrogea Teodor (ş. ped. b. Bacău); clasa VII-a: Gervescu Ioan (Roznov), Cociorvei Dorel (ş. 8 Bacău), Aricov Rodica (ş. m. f. P. Neamţ), Mircea Dan (ş. m. b. P. Neamţ).

REGIUNEA BAIA MARE. Clasa V-a: Balagh Iudith (şc. el. 2 Baia Mare), Porumb Marius (şc. el. 3 Baia Mare), Mihăiţeanu Doina (ş. ped. 1. Satu Mare), Verdeş Cornel (Cicîrlău, Somcuţa Mare); clasa VI-a: Szabo Eva (şc. maghiară nr. 4, Satu Mare).

REGIUNEA BARLAD. Clasa V-a: Crauss Mihai (ş. m. b. Bîrlad), Gogancea Doina (şc. el. 4 Bîrlad), Tudorancea Agripina (Mera, Focşani), Negoescu Nicolae (ş. m. b. Bîrlad),

Năstase Niculae Gh. (şc. 8 mixtă Bîrlad); clasa VI-a: Cosma Vasile (Stănişeşti Zeletin), Condrea Cezarina (şc. el. 2. f. Bîrlad).

REGIUNEA CLUJ. Clasa V-a: Podaru Florin (ş.m. l. Cluj), Marcovici Vicviana (ş. m. 11 Gherla), Tamaş Maria (şc. el. Ocna Dej), Solea Angela (Cristeiul Mureş), Dobo Atilla (ş. m. m. 1 Cluj), Gavrilescu Tudor (ş. m. 5 Cluj), Niculescu Mihaela (şc. el. 12 Cluj), Ungur Alina (ş. m. 2 Cluj), Singer Clara (şc. el. 1 Turda), Sălcudeanu Ioan (şc. el. 2 Cîmpia Turzii), Buga Dorin (şc. el. 1 Mihai Viteazu), Tîrşa Carolina (şc. el 12 Turda), Jude Livia (şc. el. 2 Turda), Butaş Floreta (şc. el. 2 Turda); clasa VI-a: Bucos Corina (ş. m. 2 Turda), Rusu Liviu (şc. el. Ghiolţ), Crivi Mircea (şc. m. micxtă Cîmpia Turzii); clasa VII-a: Erdös Iosif (şc. el. 22 Cluj).

REGIUNEA CONSTANŢA. Clasa V-a: Megas Mihai (şc. el. b. 12 Constanţa), Memet Nejdet (ş. el. b. 12 Constanţa), Munteanu Ion (şc. el. b. 12 Constanţa), Donca Victoria (ş. m. Medgidia), Trifănescu Alexandra (ş. m. Cernavodă); Clasa VII-a: Dumitriu Georgeta (ş. m. 2. f. Constanţa), Butnaru Gabriela (s. m. f. 2 Constanţa).

REGIUNEA CRAIOVA. Clasa V-a: Radu I. Vasile (ş. m. b. Caracal), Vechilu Mihai (Rast Băileşti), Gorun Valeriu (Perişor), Cancer Anca Ilina (ş. m. f. Tîrgu Jiu), Cinteză Aurora (Săel Novaci), Rufu Lucia (Strehaia), Marinescu Marian (Cerătu Segarcea), Ariciu Alexandru (ş. m. b. 2 Craiova), Mladinescu Mircea (ş. m. b. 1 Craiova); Clasa VI-a: Popescu Rodica (ş. m. f. 1 Craiova), Anghelescu I. Mircea (Craiova), Julea Violeta (şc. el. f. 4 Craiova), Şerban Viorel (ş. m. b. 3 Tîrgu Jiu), Cheţan Cecilia (Isbiceni Corabia); Clasa VII-a: Badea Paula (Simnicu de sus), Preoteasa Gh. (Simnicu de sus).

REGIUNEA HUNEDOARA. Clasa V-a: Fischer Anico (Deva), Munteanu Nicoleta (Deva), Hagi Cristea Luminiţa (Deva), Ciosescu V. (Ilia), Mazeş Magdalena (Ghelari), Ban Camelia (Poiana): clasa VI-a: Masek Corneliu (Gurabarza), Georgescu Doina (Poiana Sibiului); clasa VII-a: Bălănoiu Ileana (Poiana), Laslău Stela (Deva).

REGIUNEA GALAŢI. Clasa V-a: Arion Constantin (şc. b. 6 Brăila), Constanda Cristian (Brăila), Oprea Emilia (şc. f. 7. Brăila), Concul Alexandru (şc. b. 16 Brăila), Pavelescu Dan (şc. b. 11 Brăila), Ghirguş Georgeta (ş. m. nr. 1 Brăila), Iordăchescu Laurenţiu (ş. m. Tulcea), Arion Pavel (Nălbrăut Tulcea), Mocanu Iordana (Nălbrăut Tulcea), Cazacu Elena (ş. m. mixtă Viziru), Taranenco Nicu (şc. 16 Galaţi); clasa VI-a: Diaconu Traian (şc. el. b. 13 Galaţi); clasa VII-a: Diaconu Decebal (şc. el. b. 13 Galaţi), Grosu Gheorghe (ş. m. b. 1 Galaţi), Podeanu Firinel (şc. m. mixtă Brăila).

REGIUNEA IAŞI. Clasa V-a: Frolov Magdalena (ş. m. f. 1 Iaşi), Sîrbu Viorel (ş. m. b. 2 Iaşi), Băltaru Adrian (ş. m. b. 2 Iaşi), Onică Al. (ş. m. b. 2 Iaşi), Pîrjoiu Dumitru (şc. el. 19 Iaşi), Paraschiv Monica (ş. m. Paşcani), Pascal Viorel (Heci-Lespezi), Iţicescu Alexandru (ş. m. Hîrlău), Clos Florentina (Hîrlău), Iancovschi Mioara (Hîrlău), Ulea Marian (Vaslui), Giuşcă E. (Vaslui), Ioanid Ioan (şc. el. Podul Iloaiei), Rîpă Alexandru (Podu Iloaiei); clasa VI-a: Marinescu Alexandra (ş. m. f. 1 Iaşi), Atanasiu Adriana (ş. m. f. 1 Iaşi), Toma Constantin (ş. m. b. 2 Iaşi), Cernăianu Dan (ş. m. b. 2 Iaşi), Iconomu C. (ş. m. b. 2 Iaşi), Cărăuşu A. (ş. m. b. 2 Iaşi), Veruzi Mircea (ş. m. b. 2 Iaşi), Anghel Mircea (ş. m. b. 2 Iaşi), Anghelescu Bogdan (ş. m. b. 2 Iaşi), Fică Alexandrina (ş. clasică mixtă Iaşi), Pribeşteanu Elena (clasică mixtă Iaşi) Rothman Paula (şc. el. 8 Iaşi), Iosub Bela (şc. el. 8 Iaşi); clasa VII-a. Stratt Angela (ş. m.f. 1 Iaşi), Baliff Andrei (ş. m. b. 1 Iaşi), Dalos Ioan (s. m. b. 2 Iaşi), Nagacevschi Valeriu (ş. m. b. 2 Iaşi), Schwartz Reni (şc. el. 8 Iaşi).

REGIUNEA ORADEA. Clasa V-a. Bărbulescu Aurelia (ş. m. b. 2 Oradea), Modi Violeta (ş. m. 2. Oradea), Tiţ Florica (ş. m. 6 Oradea), Calceru Maria (ş. m. 6 Oradea), Fajzi Agota (ş. m. 6 Oradea), Hîncu Magda (ş. m. 6 Oradea), Popa Silvia (şc. el. Vascău), Sandor Maria (Haicu), Sălăgean Rodica (Haicu) Anonim (Borod, Ilejd), Mihancea Maria (Borod Alejd), Stoenescu Florica (Popeşti Marghita), Rus Gheorghe (Ianoşda Salonta), Pelea Dumitru (Bătar Salonta), Indric Cornelia (Inăud Salonta), Szabo Zoltan (ş. m. 4

Oradea), Jakob Mihai (ş. m. 4 Oradea); clasa VI-a: Gal Iuliana (ş. m. 2 Oradea), Borcea Dan (ş. m. 1 Oradea), Tempfli Ildiko (ş. m. 4 Oradea), Nagy Zoltan (ş. m. 4 Oradea); clasa VII-a: Jutea Mihai (ş. m. Beiuş), Cartiş Dan (şc. el Vaşcău), Stoianov Alexandru (şc. el. Vaşcău), Benickzy Ştefan (ş. m. 4 Oradea), Kiss Francisc (ş. m. 4 Oradea).

REGIUNEA STALIN. Clasa V-a: Prohasca Astrid (şc. el. 11 Oraşul Stalin), Saiţ Erika (şc. el. germană Sibiu), Kohl Arsid (şc. el. 10 Oraşul Stalin), Iliescu Violeta (şc. el. 10 Oraşul Stalin), Cordea Livia (şc. el. 8 Oraşul Stalin), Barbu Charlota (şc. el. 8 Oraşul Stalin), Beju Rodica (şc. el. 3 Sibiu), Popescu Rodica (şc. el. 19 Oraşul Stalin), Popescu Florica (şc. el. 19 Oraşul Stalin), Grovu Maria (şc. el. 19 Oraşul Stalin), Podişor Gheroghe (şc. el. 13 Sibiu), Rădescu Elena (şc. el. 13 Sibiu), Bădăluţă Elena (şc. el. 13 Sibiu), Constantinescu Radu (s. m. b. 1 Sibiu); clasa VI-a: Bazea Cătălin (s. m. b. 1 Oraşul Stalin), Popescu Horia (s. m. b. Oraşul Stalin), Manfred Stephani (şc. mixtă 3 Sibiu), Weprich Wiltrud (şc. el. 3 Sibiu), Deceanu Silvia (şc. el. 3 Sibiu); clasa VII-a: Lupescu Horia (şc. el. 11 Oraşul Stalin), Stoian Mircea (şc. el 11 Oraşul Stalin), Cristofor Lucia (ş. m. 5 Oraşul Stalin), Coman Dumitru (ş. m. b. 1 Oraşul Stalin), Spîrchez Florin (ş. m. b. 1 Oraşul Stalin).

REGIUNEA PITEŞTI. Clasa V-a: Velescu Victoria (şc. el 4 Piteşti), Braniște Ligia (şc. el. 4 Piteşti), Popescu Iolanda (şc. el. 4 Piteşti), Soare I. Gheorghe (Bradu de sus), Sandu Cornel (Bradu de sus), Popescu Valeria (Dărmăneşti) Mihai T. Aristotel (Dărmăneşti), Ionescu Elvira (Dărmăneşti), Delelici C. Varvara (ş. m. 2. f. Slatina), Dicu I.Maria (Bălteni), Ştefana R. Florica (Bălteni), Enache I. Elena (Bălteni), Ciurca C. Rada (Bălteni), Dumitru Maria (Bălteni), Lăutărescu P. Dumitru (Tutana), Mitucă Mihai (Domneşti), Horobeanu Constanţa (Domneşti), Liţă Gr. Georgeta (Suici), Străchioiu Maria (Muşăteşti), Geantă I. Constantin (Muşăteşti), Popescu I. Petre (Muşăteşti), Ocănoaia Gh. Stefan (Muşăteşti), Marinescu T. N. Elena (Dragodana), Andronescu Pompiliu (Urluiasca), Nicolescu Gh. Şerbana (Urluiasca), Ionescu L. Elena (Zăvideni), Bălan St. Ioan (Zăvideni), Rizescu I. Felicia (Suseni-Cerşani); Clasa VI-a: Rădulescu Constanţa (ş. m. 2 Piteşti), Ilasievici Viorela (ş. m. 2 Piteşti), Anton Pompiliu (şc. el. 3 Piteşti), Dobre M. George (şc. el. 5 Piteşti), Burghelea Dan (ş. m. b. 1 Rîmnicul Vîlcea), Marinescu Dan (ş. m. b. 1 Rîmnicu Vîlcea), Chiuchete Florea (Găneasa), Ionescu Ion (Albeşti), Pervescu I. Maria (Tutana), Stănescu N. Gheorghe (Stroeşti), Zevedei A. Valeriu (Stroeşti); clasa VII-a: Rîcă I. Constantin (ş. m. b. 1 Piteşti), Nanu Rodica (ş. m . f. 2 Piteşti).

REGIUNEA PLOIEŞTI. Clasa V-a: Ioţu Mircea (ş. m. b. 1 Ploieşti), Pop Augustin (ş. m. b. 1 Ploieşti), Popescu Claudia (ş. m. 2 mixtă Tîrgovişte), Popovici Margareta (Bucşani), Vetuci Oana (Bucşani), Constantinescu Alex. (şc. mixtă Buşteni), Dobre Anghelina (Buşteni), Chivu Doina (Buşteni), Popescu Cornel (Buşteni), Rădulescu Gh. (Buşteni), Itu Elena (Băicoi), Marin Radu (Fundeni), Dorojan Dumitru (Fundeni), Deciulescu Aretia (Fundeni), Banu Gheorghe (şc. nr. 1 Buzău), Mihalcea Andrei (şc. nr. 1 Buzău), Popică Margareta (şc. nr. 2 Buzău), Asanache Horia (şc. b. 5 R. Sărat), Cristescu Eugen (Chiojdeanca Cricov); clasa VI-a: Tomescu Ion (Uz. « Ilie Pintilie »), Herea Mihai Adînca, Tîrgovişte), Rîpeanu Cornelia (Fundeni), Ştefănescu Zoe (şc. mixtă Cislău), Buterez Ecaterina (Ungureni), Podeanu Viorica (ş. m. nr. 2 Buzău); clasa VII-a: Constantin Leonard (s. 8 Ploieşti), Costea Gheorghe (Pucheni Crainici), Anton Dumitra (Puchenii Mari), Duţă Gheorghe (Puchenii Mari), Stan Maria (s. m. 1 Tîrgovişte), Zaharescu Maria (şc. 1 Buşteni), Dumitrescu Dan (ş. m. 1, Cîmpina), Marcoşan Ion (Glodeanu Sărat Mizil).

REGIUNEA AUTONOMA MAGHIARA. Clasa V-a: Buciu Ana Maria (ş. m. 1 Reghin), Pitea Maria (ş. m. 1 Reghin), Grama Ana (ş. m. 1 Reghin), Branea Silvia (şc. el. 6 Tîrgu Mureş), Udreanu Corneliu (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Jakab Zoltan (şc. el. 5 Tîrgu Mureş), Pater Gyongyver (ş. m. 4 Tîrgu Mureş), Benke Iosif (şc. el. 7 Tîrgu Mureş), Farkas Zoltan (ş. m. 2 Tîrgu Mureş), Covrig Rafila (Sîngiorgiu Pădure), Bindea Margareta (şc. el. 3 Odorhei), Osvath Albert (Colăteşti), Veres Balint (Sft. Gheorghe); clasa VI-a: Arkosy Csaba (ş. m.

1 Tîrgu Mureş), Antoniuc Bogdan (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Ioan Corneliu (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Veeg Alexandru (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Ferencs Zoltan (Tuşnad Nou), Jakab Maria (Miercurea Niraj), Pap Iudith (şc. el. 1 Odorhei), Bod Imola (şc. el. 2 Tîrgu Mureş); Clasa VII-a: Moisă Ioan (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Moldovan Alexandru (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Coman Natalia (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Tălparu Alexandru (ş. m. 1 Tîrgu Mureş), Barabas Lidia (ş. m. 4 Tîrgu Mureş), Csiszar Anna (ş. m. 4 Tîrgu Mureş), Lorincz Andras (Tuşnad sat).

REGIUNEA SUCEAVA. Clasa V-a: Berceanu Florica (ş. el. 2 Botoşani), Bejenaru Adela (Suharău Darabani), Toxin Gheorghe (şc. medie mixtă Cîmpulung), Kniling Ramlinde (şc. el. Solca), Micu Mona Gabriela (ş. m. f. 2 Rădăuţi), Halăr Bori (ş. m. f. 2 Rădăuţi), Mayhoffer Otto (ş. el. 2 Rădăuţi), Pîrvu Liliana (şc. el. 2 Rădăuţi), Toniuc Alexandru (ş. m. Rădăuţi), Stralat Mihai (ş. m. b. Suceava), Cristeanu Ioan (ş. m. b. Suceva) Stoleru Mihaela (ş. m. f. Suceava), Florea Adriana (ş. m. f. Suceava), Spoială Victoria (şc. el. Bosanci), Polonic Ortensia (Bosanci), Lupuşor Cezar (Călăraşi Truseşti); Clasa VI-a: Ionescu Doina (ş. f. 2 Botoşani), Hriţcu Mircea (şc. 2 Botoşani); clasa VII-a: Helstovschi Eugenia (şc. 2 Botoşani), Nicorici Victor (Mirocani, Darabani), Bujoreanu Ioan (Bosanci).

REGIUNEA TIMIŞOARA. Clasa V-a: Miculescu Eleonora (Armeniş), Moga Ileana (Buziaş), Moroşan Petru (Brestovăţ), Guga Mihaela (Bocşa Romînă), Moravetz Doroteea (şc. el. 1 Caransebeş), Popescu Emilia (şc. el 1 Caransebeş), Stan Caius (şc. rom. Deta), Sănduleanu Viorica (şc. rom. Giarmata), Cojocaru Dan (ş. m. 2 Lugoj), Qous Helmut (şc. 7 Nădrag), Roiu Andrei (şc. el. Reşiţa), Fetl Reinhold (şc. el. Săcălaz), Rittersport Siegfried (şc. el. Slatina Timiş), Olariu Ileana (şc. el. 3 Timişoara), Strejaru Filip (şc. el. 12 Timişoara) Stana Gheorghe (şc. el. 15 Timişoara), Coşereanu Sanda (ş. m. 3 Timişoara), Köszegy Suzana (ş. m. 3 Timişoara); clasa VI-a: Nicoară Diodor (şc. el. Margina Făget), Palade Alexandra (ş. m. 3 Timişoara), Ferke Margareta (şc. el. 4 Reşiţa); Clasa VII-a: Martin Adeline (şc. germ. Cărpiniş), Brînaş Ileana (şc. el. Medadia), Turca Nicolae (şc. 4 Reşiţa), Popp Adriana (şc. 4 Reşiţa), Coşereanu Radu (şc. el. 7 Timişoara), Schwartz Gheorghe (ş. m. 5 Timişoara), Kaurek Albert (şc. el. germ. 6 Timişoara).

ASUPRA OPERAŢIILOR CU PUNCTE

GH. I. BERCEA,
student Timişoara

IN R.M.F. nr. 4/1953 se arată ce se înţelege prin adunarea punctelor*); se dau acolo numeroase exemple, apoi aplicaţii interesante.

Fiind date două puncte fixe A, B afectate de numerele (greutăţile) α respectiv β, prin urmare suma acestor puncte înţelegem un alt punct C (de greutate $\alpha + \beta$) pe AB astfel că: $\alpha \cdot \overline{AC} = \beta \cdot \overline{CB}$. Simbolic aceasta se notează astfel:

$$\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta) C$$

Suma aceasta se poate extinde la trei sau mai multe puncte.

Să considerăm trei puncte necolineare A, B, C afectate de numerele α, β, γ. Ne propunem să găsim punctul M dat de:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = (\alpha + \beta + \gamma) M$$

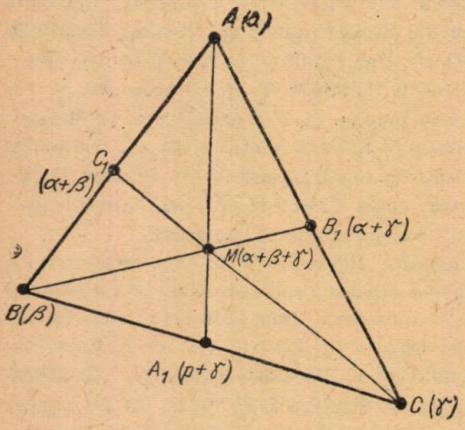
---

*) A se vedea articolul «Operaţii aritmetice cu puncte» de Oskar Kreindler (R.M.F. 4. 1953).

Facem aceasta în trei feluri:

a) Scriem $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta) C_1$ sau $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\beta}{\alpha}$.

Deci, $(\alpha + \beta) C_1 + \gamma C = (\alpha + \beta + \gamma) M$ sau $\frac{C_1M}{MC} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$



b) La fel deducem:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{şi} \quad \frac{A_1M}{MA} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

unde A_1 este dat de $\beta B + \gamma C = (\beta + \gamma) A_1$

c) La fel

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{şi} \quad \frac{B_1M}{MB} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}$$

unde B_1 este dat de $\gamma C + \alpha A = (\gamma + \alpha) B_1$

Am obţinut deci, relaţiile:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\beta}{\alpha}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\gamma}{\beta}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{1}$$

şi

$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}; \quad \frac{B_1M}{MB} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}; \quad \frac{A_1M}{MA} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}. \tag{2}$$

Punctul M se află pe fiecare din dreptele AA_1, BB_1, CC_1, deci dreptele sînt concurente. Pentru diferite valori ale lui α, β, γ obţinem diferite puncte M.

1) Dacă înmulţim relaţiile dela (1), obţinem:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

adică teorema lui Ceva, condiţia de concurenţă.

2. Din ultima relaţie dela (2) deducem:

$$\frac{A_1M}{AA_1} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ şi analoage. Deci:}$$

$$\frac{A_1M}{AA_1} + \frac{B_1M}{BB_1} + \frac{C_1M}{CC_1} = 1$$

La fel se deduce:

$$\frac{MA}{AA_1} + \frac{MB}{BB_1} + \frac{MC}{CC_1} = 2$$

deasemenea relaţii cunoscute.

3. Avem $\frac{MA}{A_1M} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{B_1A}{CB_1}$

Am obținut deci relația:

$$\frac{MA}{A_1M} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{B_1M}{CB_1}$$

4. Ținînd seamă de relația precedentă, se deduce relația:

$$6 + \sum \frac{MA}{A_1M} = \sum \frac{a^2}{BA_1 \cdot A_1C}$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului ABC.

5) Din relațiile

$$\frac{C_1M}{CC_1} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{și} \quad \frac{B_1M}{BB_1} = \frac{\beta}{\alpha+\alpha+\beta+\gamma}$$

avem:

$$\frac{C_1M}{CC_1} : \frac{B_1M}{BB_1} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Cum $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{BA_1}{A_1C}$, rezultă

$$\frac{C_1M}{CC_1} : \frac{B_1M}{BB_1} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

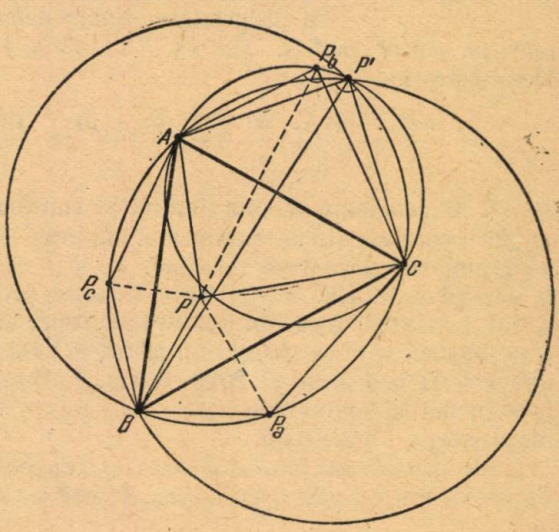
NOTE MATEMATICE

4. Generalizarea problemei 796.

Fie P un punct în planul unui triunghiu oarecare ABC. Simetricele cercurilor APB, BPC, CPA respectiv față de AB, BC, CA au un punct comun P'.

În adevăr, fie P_a, P_b, P_c simetricele lui P față de BC, CA, AB, iar P' intersecția cercurilor AP_cB, BP_aC (vezi fig. X). Avem,

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AP_cB;$$
$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BP_aC;$$
$$\sphericalangle CPA = \sphericalangle CP_bA$$



Din patrulaterele inscriptibile $P'AP_cB$ și $P'BP_aC$ deducem

$$\sphericalangle AP'B = 180° - \sphericalangle AP_cB = 180° - \sphericalangle APB \text{ și}$$
$$\sphericalangle BP'C = 180° - \sphericalangle BP_aC = 180° - \sphericalangle BPC.$$

Deci,

$$\sphericalangle AP'C = \sphericalangle AP'B + \sphericalangle BP'C = 180° - \sphericalangle APB + 180° - \sphericalangle BPC =$$

$$= \sphericalangle APC = \sphericalangle AP_b C.$$

Aceasta dovedește că patrulaterul $AP_c P'C$ este inscriptibil prin urmare și cel de-al treilea cerc $AP_b C$ trece prin P'.

În cazul cînd punctul P ocupă pe rînd pozițiile centrului cercului înscris (I) și centrului cercului circumscris (0) triunghiului considerat, regăsim enunțul problemei 796, cu soluția în G.M.F., seria B, anul V, nr. 1.

Mihail I. Popescu, student, București

CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. **Numere triunghiulare.** Să considerăm șirul numerelor naturale 1, 2, 3, ..., n, ... și să adunăm primele n numere ale acestui șir. Obținem numărul

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

care are proprietatea că unitățile cuprinse de el imaginate ca puncte se pot așeza în forma unui triunghi echilateral în așa fel că punctele sînt echidistante și fiecare latură a triunghiului conține n puncte. (vezi cazul $n = 4$ pe figură). Pentru acest motiv acest număr se numește *număr triunghiular*. Rezultă din definiție că șirul numerelor triunghiulare este următorul:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

cu termenul general $\frac{n(n+1)}{2}$.

Fig. 1

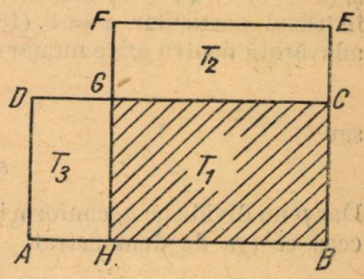
Aceste numere au unele proprietăți interesante. Iată o proprietate: *Suma a două numere triunghiulare consecutive este un pătrat perfect.* De ex.: $1 + 3 = 4 = 2^2$; $21 + 28 = 49 = 7^2$; etc. Demonstrație:

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)^2.$$

2. **O problemă de maximum.** Să considerăm toate paralelogramele dreptunghice care au același perimetru. Se pune problema: care dintre aceste paralelograme are suprafața maximă. Se știe că pătratul are această proprietate (a se vedea R.M.F. nr. 2/1952). Această problemă este de mult cunoscută și a fost rezolvată încă din antichitate. Vom arăta acum, o metodă de rezolvare a problemei, care se găsește în cartea a VI-a a operei lui Euclid: « *Elemente* », apărută de mai mult de 2000 de ani. Natural că vom expune această metodă, într-un limbaj matematic actual, dar nu vom modifica în principiu metoda de demonstrare a lui Euclid.

Fie $ABCD$ un paralelogram dreptunghic arbitrar, cu perimetrul dat: $4K$. Să construim un pătrat cu latura K și să așezăm cele două patrulatere așa cum

se vede pe figură. Afirmăm că suprafața T a patratului $HBEF$ este mai mare decît suprafața T' a paralelogramului dat. Dacă T_1 este suprafața comună a celor două figuri, T_2 suprafața paralelogramului $CEFG$, iar T_3 suprafața paralelogramului $AHGD$ atunci se vede din figură că $T = T_1 + T_2$ și $T' = T_1 + T_3$. Este suficient deci, să arătăm că $T_2 > T_3$. Pentru aceasta observăm că $AB + BC = 2k$ și $HB + BE = 2k$. De aci rezultă, avînd în vedere că $AB = AH + HB$, iar $BE = BC + CE$, următoarea egalitate: $AH = CE$. Din relațiile $CG = HF > HG$ rezultă că $T_2 = CG \cdot CE > HG \cdot AH = T_3$ deci, și $T > T'$, ceea ce era de demonstrat.



Fig, 2

Să notăm acum cu x și y laturile unui paralelogram dreptunghic. Atunci putem enunța proprietatea demonstrată mai sus în felul următor: *dacă* $x + y = 2k$, *atunci* xy *are o valoare maximă, cînd* $x = y$. Sau, avînd în vedere că perimetrul paralelogramului este egal cu $2(x + y) = 4k$, iar o latură a patratului avînd acest perimetru este egală cu $k = \frac{x+y}{2}$, putem scrie

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

de unde

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Deci, *media geometrică a două numere este mai mică decît media lor aritmetică* (avem egalitate, numai dacă cele două numere sînt egale).

3. **Teorema lui Fermat.** *Dacă numărul prim* p *nu divide pe* a, *atunci numărul* $a^{p-1} - 1$ *este multiplu al lui* p ($a^{p-1} - 1 = Mp$). De exemplu, $4^{5-1} - 1 = 15 = 5.3$. Aceasta este *teorema lui Fermat* care are o importanță deosebită în teoria numerelor și totodată în diferitele domenii ale matematicii. Putem da o demonstrare absolut elementară a acestei teoreme, folosindu-ne de *formula binomială a lui Newton*. Putem scrie:

$$(a+1)^p = a^p + c_p^1 a^{p-1} + c_p^2 a^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} a + C_p^p.$$

Vom arăta că, coeficienții C_p^1, C_p^2, ... C_p^{p-1} sînt divizibili cu p. Într-adevăr,

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

de unde

$$k!\ C_p^k = p(p-1)\ldots\ldots(p-k+1).$$

Numărul din membrul drept al egalității este divizibil cu p, deci și $k!\ C_p^k$ este un multiplu al lui p. Însă $k \leqslant p - 1$, deci $k! = 1.2.3.\ldots.k$ nu poate fi divizibil cu p. Rezultă că C_p^k este divizibil cu p, pentru $k = 1, 2, \ldots, p - 1$.

De aici rezultă, ținînd seama și de egalitatea $C_p^p = 1$, următoarea relație:

$$(a+1)^p = a^p + 1 + \text{mult. } p.$$

Scăzînd $a + 1$ din ambele părți ale egalității, obținem:

$$(a + 1)^p - (a + 1) = (a^p - a) + \text{mult. } p.$$

Conchidem din această relație, că dacă $a^p - a$ este divizibil cu p, atunci și $(a + 1)^p - (a + 1)$ este divizibil cu p. Dar această proprietate este adevărată în cazul particular $a = 1$ ($1^p - 1 = 0$, este divizibil cu p). Rezultă că este adevărată pentru orice număr a. Deci,

$$a^p - a = M \cdot p$$

sau

$$a(a^{p-1} - 1) = M \cdot p.$$

Dar p nu divide pe a, conform ipotezei făcute, deci p trebuie să dividă pe $a^{p-1} - 1$, ceea ce era de demonstrat.

VIBRATORUL CU FRECVENȚA STANDARDIZATĂ PENTRU STUDIUL UNDELOR

D. TĂNASE

Prof. Lic. băieți nr. 6, București

PENTRU studiul temei «Vibrații și unde» se poate face o lucrare de laborator în care să se determine lungimea undelor sonore cu ajutorul rezonanței. Metoda prezintă însă neajunsul, că prin ea nu se poate obține numărul impar de sferturi de undă care există într-o coloană de aer.

De asemenea nu se ajunge la un rezultat avantajos nici prin analogia cu o bară solidă, deoarece pe bara fixată la un capăt se poate arăta numai un sfert de lungime de undă (transversală) în mișcarea ondulatorie transversală. Această mișcare este caracterizată prin faptul că direcția mișcării vibratorii a punctelor ce alcătuiesc mediul elastic este perpendiculară pe direcția de propagare a acestei mișcări (unde).

Pentru rezolvarea acestor dificultăți se poate folosi vibratorul cu frecvență standardizată, acesta fiind un electromagnet ce se poate conecta la rețeaua de iluminat și care atrage sau poate introduce de 100 de ori pe secundă un miez de fier în bobină.

În principiu, folosirea vibratorului propus aici este identică cu folosirea unui camerton pe care este scrisă frecvența, însă avantajul vibratorului constă în faptul că vibrațiile lui nu se amortizează.

Frecvența vibratorului se poate verifica în modul următor.

Fixăm la vibrator o peniță cu care el poate face însemnări la intervale de timp egale pe discul unui patefon. Pe același disc se fac însemnări cu un camerton sonor de frecvență cunoscută (se pot folosi camertoane cu frecvență pînă la 400 Hz), sau se determină perioada de rotație a discului în același mod ca și perioada oscilațiilor pendulului. Din datele obținute se poate calcula imediat, frecvența vibratorului. Vibrațiile întreținute și de frecvență constantă dau posibilitatea de a se pune în evidență nodurile și ventrele pe fire, strune, tije (bare) și de a obține date pentru calcule cantitative.

Experienţa 1. Măsurarea vitezei de propagare a vibraţiilor transversale la o placă sau lamă de oţel (fig. 1).

O lamă de oţel (1) se trece liber printr-un suport (2) care la rîndul său este fixat la unul din capete cu un şurub (a). Placa fixată în (a) este făcută să vibreze cu ajutorul miezului de fier (4) care poate fi atras în electro-

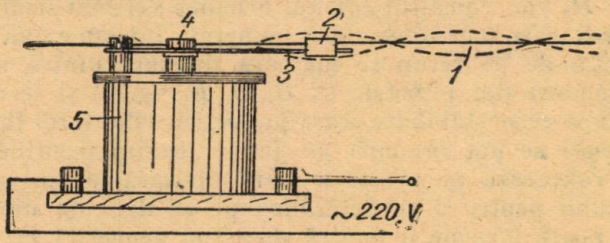


Fig. 1

magnetul (5). Bobina electromagnetului trebuie calculată pentru curentul de la reţea.

Cînd curentul trece prin bobină, lama (1) se deplasează încet într-o parte şi alta cu mîna, pînă se stabileşte pe ea un anumit număr de sferturi de undă. Se pot obţine uşor 1, 3, 5, 7, ... sferturi de undă care pot fi observate clar, avînd amplitudinea pînă la un centimetru.

La pornirea experienţei se poate proceda în modul următor. Se ridică puţin partea dreaptă a lamei vibratorului şi se dă posibilitate lamei (1) să alunece spre stînga în suportul (2). Această alunecare încetează în momentul cînd lama (1) începe să vibreze transversal. Măsurăm lungimea sfertului de undă şi apoi calculăm lungimea undei λ. Cunoscînd frecvenţa vibraţiilor (150 z_s) şi lungimea de undă λ, putem calcula viteza de propagare a vibraţiilor (undei).

$$\lambda = v.\ T; \quad T = \frac{1}{\nu}; \quad v = \nu\lambda$$

unde λ = lungimea de undă dată în cm; v = viteza de propagare a vibraţiei, dată în cm/s; T = perioada dată în secunde; ν = frecvenţa vibraţiei dată în H_z.

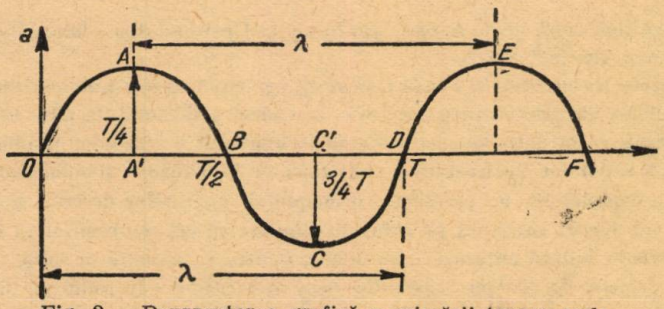


Fig. 2. —Reprzentarea grafică a mişcării transversale.
AA' — amplitudinea vibraţiei; *OD* sau *AE* reprezintă lungimea parcursă de undă în timp de o perioadă (λ)

Din experienţe se obţin viteze de 10 — 15 m/s.

Elevii trebuie să facă această experienţă înainte de a trece la determinarea lungimii de undă prin metoda rezonanţei. Ea duce la o înţelegere mai

uşoară a metodei a doua, care se poate efectua ca o experienţă demonstrativă (prin proiecţie de umbre).

Pe o lamă potrivită pentru cîteva sferturi de undă se poate forma şi un singur sfert de undă dacă ea se face să vibreze cu mîna. (Pentru reuşită trebuie ca vibratorul să nu fie conectat la reţea).

— 100 de H_z vor constitui sunetul armonic cel mai înalt, iar vibraţiile amortizate provocate cu mîna, dau sunetul fundamental.

Pe proiecţia de pe ecran se măsoară distanţa dintre nodurile undei transversale (noduri sînt punctele *O*, *B*, *D*, *E*, fig. 2) şi se calculează lungimea undei după ce se stabileşte scara proiecţiei, vibratorul fiind deconectat.

De asemenea se pot însemna pe perete (ecran) poziţiile nodurilor, iar pe urmă se proiectează pe perete o scară divizată în cm care se pune în locul vibratorului pentru a se determina pe ea distanţa dintre noduri.

Scara se poate face pe o bucată de sticlă acoperită cu gelatină.

Proiectarea concomitentă pe ecran a lamei care vibrează şi a scării nu dă rezultate bune, deoarece la rezonanţă rămîn vizibile numai nodurile, care se pierd uşor între liniile scării.

Experienţa 2. Determinarea vitezei de propagare a vibraţiilor transversale la bare fixate la ambele capete.

Drept corp elastic vibrant se poate folosi un fir, o strună sau o lamă elastică. Un capăt al corpului se fixează în stativul (2); iar la celălalt capăt se atîrnă o greutate. Vibratorul trebuie ţinut în mînă şi mişcat de-a lungul corpului vibrant (barei) pînă la apariţia vibraţiilor transversale. Calculul rezultatelor, folosind datele de la măsurători, se face ca în prima experienţă.

Observare. Această lucrare se poate face şi cu clasa VII elementară, deoarece elevii au noţiuni asupra curentului alternativ şi asupra vibraţiilor.

DIVERSE

IN ATENŢIA CITITORILOR

Din partea tov. conf. univ. Arpad Szanto, de la Universitatea « Ianos Bolyai » din Cluj, primim scrisoarea de mai jos:

« În « Gazeta Matematică şi Fizică », seria B, nr. 5/1954 a fost publicat articolul subsemnatului: « Problema electrizării prin frecare ». În cadrul articolului, la pag. 135, au fost descrise unele aparate electronice pentru punerea în evidenţă a sarcinilor produse prin frecare sau în general, a sarcinilor electrostatice, construite de N. Drozdov şi colaboratorii săi în anii 1945—46. Ca o completare la problema principiului aparatelor descrise găsesc necesar să menţionez că, un aparat construit pe principii similare ca cel reprezentat în fig. 2 din text, se găseşte descris la o dată anterioară, ca aparat pentru experienţe de curs, şi de către tov. St. Procopiu, profesor la Universitatea din Iaşi, în lucrarea « Introducere în Electricitate şi Magnetism (Ed. 1929, pag. 67) şi în ediţia a doua a acestei lucrări (Ed. 1942, pag. 83 « Electricitate şi Magnetism »). Acelaşi autor dă şi o modificare a experienţei pentru alimentarea lămpii în curent alternativ în Revista Adamachi (1946, pag. 129—131).

Pentru documentarea mai amplă a problemei, vă rog a da loc publicării, completarea de mai sus. »

CHESTIUNI PROPUSE

«OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1955» ETAPA FINALĂ (PE ŢARĂ) BUCUREŞTI 2 MAI

Problemele date la lucrarea scrisă, timp de lucru: 3 ore, toate chestiunile obligatorii.

SUBIECTE LA MATEMATICĂ

Clasa VIII-a

1654. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, ducem bisectoarea unghiului A care întîlneşte pe BC în D, iar prin D ducem o perpendiculară pe BC care taie pe AB în E şi pe AC în F.

a) Să se demonstreze că $BD = DF$ şi $CD = DE$.

b) Să se demonstreze că simetricul punctului E faţă de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC şi că simetricul punctului F faţă de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt egale între ele.

c) Să se arate că unghiurile EBF şi ECF sînt egale şi că $AE \cdot BF = AF \cdot CE$.

1655. Să se simplifice fracţia

$$\frac{x^4 - 16x^2 + 4}{(x - \sqrt{5} + \sqrt{3})(x + \sqrt{5} - \sqrt{3})}$$

apoi rezultatul să fie pus sub forma unui produs de factori de gradul I.

1656. Se dă ecuaţia:

$$\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a}}}} = \lambda\sqrt{a}$$

Să se determine λ astfel ca suma inverselor rădăcinilor adunată cu inversul sumei lor să dea $\frac{1}{a}$?

Clasa IX-a

1657. Să se găsească două progresii, una aritmetică şi una geometrică, fiecare din cîte patru termeni, aşa încît adunînd termenii de acelaşi rang din cele două progresii, să obţinem drept sumă respectiv numerele 18, 18, 26, 58.

1658. *a)* Dacă $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin(c+d)}{\sin(c-d)}$

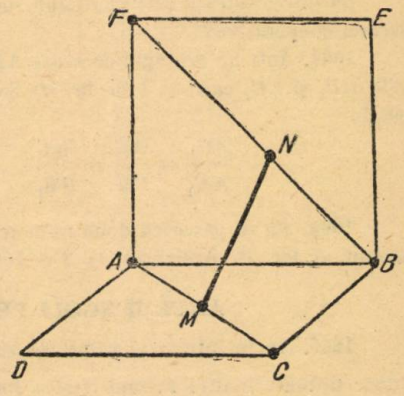
atunci mai avem şi relaţiile

$$\frac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)} = \frac{\cos(c+b)}{\cos(c-b)} \text{ şi } \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}.$$

b) Să se pună sub formă de produs expresia

$$E = \sin(a-b)\sin(a-c) - \cos b \cos c.$$

1659. Două patrate $ABCD$ şi $ABEF$ au o latură comună AB, iar planele lor sînt perpendiculare. Se iau pe diagonalele AC şi BF respectiv segmentele egale $AM = BN$ (a se vedea figura).



a) Să se arate că dreapta MN rămîne paralelă cu planul $CDFE$.

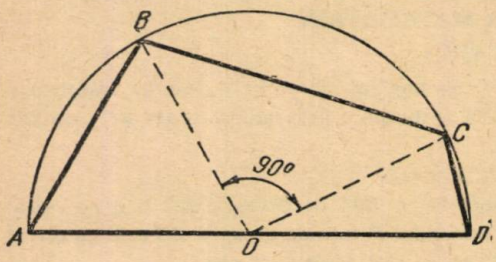
b) Care este locul geometric al mijlocului segmentului MN?

c) Să se arate că în poziţia în care lungimea segmentului MN este cea mai mică, segmentul MN este perpendicular pe BF şi AC şi că este paralel cu DE.

d) Să se calculeze lungimea segmentului MN în funcție de latura a a patratului $ACBD$ în în cazul precedent, adică lungimea cea mai mică a segmentului MN.

Clasa X-a

1660. Se consideră patrulaterul $ABCD$ din figură, înscris în semicercul de rază $\sqrt{2}$ metri. Se știe că latura BC este văzută din O sub un unghi de 90°, adică $\sphericalangle BOC = 90°$ și că $AB + BC + CD = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ metri.



a) Să se afle lungimile segmentelor AB, BC, CD, fără tabele.

b) Să se afle aria corpului născut prin rotirea patrulaterului $ABCD$ în jurul laturii AD.

c) Să se afle volumul aceluiași corp.

1661. Să se rezolve sistemul de inegalități:

$$\begin{cases} x - 5y - 5 < 0 \\ 2y + x^2 - 2x - 15 \leqslant 0 \\ \dfrac{(x^3 - 3x^2 - 4x)(2x - 1 - x^2)^3}{(4 - x^2)^3 (x^3 - 5x^2 + 4x + 10)} \geqslant 0. \end{cases}$$

Să se figureze în planul de coordonate rectangulare xoy punctele ale căror coordonate satisfac sistemul de inegalități.

1662. Se consideră desenul unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ și trei puncte date L, M, N situate respectiv pe muchiile $A'D'$, AB, CC'. Să se deseneze pe figură, poligonul de intersecție între fețele paralelipipedului și planul determinat de LMN, adică secțiunea făcută de planul LMN în paralelipiped. (vezi fig. de mai jos)

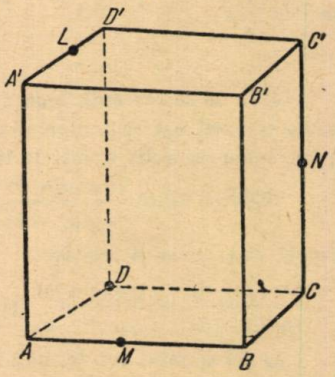
ANUL I. ȘCOLI PEDAGOGICE DE ÎNVĂȚĂTORI

1663. Trei cooperative asociate au avut un beneficiu de 60.000 lei. A treia a primit drept beneficiu suma de lei 15.000. Prima și a doua au primit capital social și beneficiu respectiv 54 000 și 81 000 lei.

Se întreabă care este capitalul social și beneficiul fiecărei cooperative?

1664. Într-un triunghi oarecare ABC ducem înălțimile BB_1 și CC_1 care se taie în H. Să se demonstreze relația

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{CH} = \frac{B_1C}{BB_1}.$$



1665. Să se găsească două numere întregi cunoscînd suma lor S și cel mai mare divizor comun al lor D. Aplicații: 1) $S = 700$, $D = 100$; 2) $S = 1323$, $D = 147$.

ANUL II ȘCOLI PEDAGOGICE DE ÎNVĂȚĂTORI

1666. În incinta unei uzine siderurgice se aduc 48841 kg cocs care se repartizează la două cuptoare înalte. Primul cuptor întrebuințează $\frac{2}{9}$ din cantitatea repartizată lui, iar al doilea cuptor întrebuințează $\frac{3}{11}$ din cantitatea ce i s-a repartizat. Partea rămasă primului cuptor este de două ori mai mare decît partea rămasă celui de-al doilea cuptor.

Se cere:

a) Ce cantitate de cocs a fost repartizată fiecărui cuptor.

b) Să se afle cît minereu de fier este necesar primului cuptor dacă pentru 100 kg fontă se pune 175 kg cocs știind că minereul de fier dă 29% fontă.

1667. — *a)* Se dă un triunghi oarecare ABC și se cere să se arate modul de construcție al unui patrat de aceeași arie.

b) Să se construiască patratul de arie egală cu aceea unui poligon oarecare dat.

1668. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x + \sqrt{y} = 1$$
$$y + \sqrt{x} = 1$$

Să se reprezinte grafic în sistemul rectangular de coordonate xoy punctele ale căror coordonate sînt soluții (rădăcini) ale sistemului dat.

1669. Un turist a parcurs un drum de 255 km în 27 zile, în trei etape, astfel: $\frac{2}{3}$ din lungimea drumului parcurs prima etapă este egal cu $\frac{5}{6}$ din lungimea drumului parcurs în în a doua etapă; iar $\frac{3}{4}$ din lungimea drumului din etapa a doua este egal cu $\frac{1}{2}$ din lungimea drumului din etapa a treia.

În prima etapă a mers zilnic cîte $5\frac{2}{3}$ ore, în a doua etapă a mers în fiecare zi $6\frac{4}{5}$ ore, ar în a treia etapă a mers zilnic cîte $7\frac{2}{7}$ ore. Tot timpul cînd a mers a avut aceeași viteză. Să se afle în cîte ore a parcurs fiecare etapă.

1670. Într-o sferă de rază R este înscris un trunchi de con circular drept. Distanțele cercurilor de bază la centrul sferei sînt respectiv $d_1 = 0{,}6\ R$ și $d_2 = 0{,}8\ R$. În funcție de raza R a sferei să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con.

1671. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$y + x^2 - 10\ x + 19 = 0$$
$$3y^2 - 4x = 0$$

Să se rezolve grafic prin reprezentarea în planul de coordonate xoy al curbelor celor două ecuații.

Să se verifice că punctul M (3,2) este unul din punctele de intersecție al celor două curbe.

ANUL I. ȘCOLI MEDII TEHNICE

1672. Printr-un punct P al bazei BC a unui triunghi oarecare ABC se duce o paralelă cu mediana AD a triunghiului; ea taie dreapta AB în M și dreapta AC în N.

a) Să se demonstreze relația $AM.AC = AN.AB$

b) $MP + NP = 2\ AD$.

1673. Să se rezolve ecuația $x^2 - x + a = 0$, știind că raportul rădăcinilor este a.

1674. Să se rezolve sistemul de ecuații:

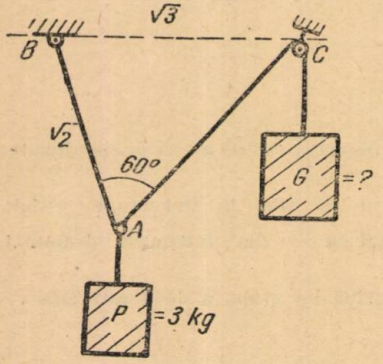
$$x + xy + y = 17$$
$$x^2 + x^2y^2 + y^2 = 129$$

ANUL II. ȘCOLI MEDII TEHNICE

1675. În interiorul unghiului xoy se iau două puncte fixe A și B astfel ca distanța dela x și distanța dela B la oy să fie egale. Fie M un punct mobil pe bisectoarea unghiului xoy.

Dreapta MA taie pe ox în P iar MB taie pe oy în Q să se arate că PQ păstrează o direcţie fixă.

1676. Un fir flexibil şi inextensibil de greutate neglijabilă este fixat cu un capăt în B, iar la o distanţă $BA = \sqrt{2}$ metri este legată o greutate $P=3$ kg. Firul trece apoi peste un mic scripete C situat pe orizintala punctului B la distanţa $BC = \sqrt{3}$ metri. Frecarea în scripete fiind neglijabilă, ce greutate G trebuie să suporte capătul liber al firului pentruca unghiul A să fie de 60°. (fără tabele)



1677. *a)* Să se rezolve ecuaţia

$$4 \cos (x - 30) \cos (x - 45) = \sqrt{2}$$

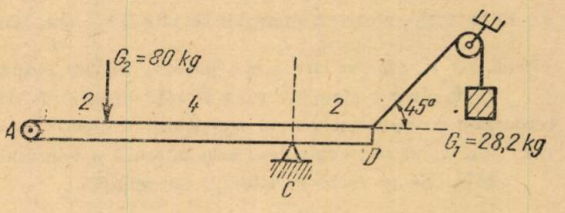
b) Să se determine progresia aritmetică în care cunoaştem ultimul termen egal cu 189, raţia egală cu 7 şi suma egală cu 1806.

SUBIECTE LA FIZICĂ

Clasa a VIII-a

VIII *). Sisteme de unităţi de măsură. Să se exprime în unităţile sistemului MKS, unităţile mărimilor învăţate la mecanică.

1678. O bară omogenă de 8 metri lungime, cu greutatea de 25 kg este articulată în capătul A şi sprijinită pe reazemul C la 3/4 de capătul articulat. Capătul liber este tras de o sfoară trecută peste un scripete fără frecare, aşa ca să facă 45° cu orizontala, de capătul sforii fiind legată o greutate de 28,2 kg. La 1/4 de capătul articulat se găseşte pe bară o greutate de 80 kg. Care este forţa de reacţiune a reazemului C?



Clasa a IX-a

IX *) Transformarea reciprocă a lucrului mecanic şi a energiei calorice; importanţa pentru tehnică.

1679. Pentru frînarea unei roţi cu diametru de 1 metru se aplică pe geanta ei un sabot cu o forţă de 800 kgf. Ştiind că pînă la oprirea completă roata va face 200 de rotaţii şi că coeficientul de frecare între sabot şi roată este de 0,2 să se calculeze căldura dezvoltată prin frînare şi temperatura sabotului la sfîrşitul frînării presupunînd că masa lui este de 15 kg şi că 50% din căldură rămîne în sabot.

Se consideră că fonta din care este făcut sabotul are căldura specifică de 0,11 şi că înainte de a începe frînarea temperatura sabotului era de 10°C.

CLASA X-a ŞI ŞCOLI MEDII TEHNICE

X*) Fenomene de emisie a electronilor din substanţe şi aplicaţiilor lor tehnice.

1680. Într-o cameră arde un bec de 60 waţi. La un moment dat se leagă în circuit şi un reşou de 240 W. Ştiind că tensiunea reţelei este de 120 V, iar rezistenţa conductorilor care leagă aparatele la reţea este de 6 ohmi, să se afle cu cît variază tensiunea la bornele becului cînd se leagă în circuit reşoul? (Să se facă schema montajului).

La chestiunile VIII *). IX *) şi X *) — fiind subiecte teoretice nu se vor trimite soluţii.

CHESTIUNI DE EXAMEN

DIN PROBLEMELE DATE ÎN SCRIS ŞI ORAL LA ADMITEREA INSTITUTUL DE PETROL ŞI GAZE DIN BUCUREŞTI, AUGUST 1954

1681. — Ştiind că o catetă a unui triunghi dreptunghic este de 6 cm, iar suma patratelor proiecţiilor catetelor pe ipotenuză este 90 cm², să se afle cealaltă catetă şi ipotenuza

1682. — Să se rezolve sistemul:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

1683. — Să se dovedească identitatea:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

1684. — Fiind dată ecuaţia $m^3 - x m^2 - (2x+1)m + (x^2+x+1) = 0$.

1. Să se determine m pentru ca valorile lui x să fie egale.
2. Între ce limite poate varia m pentru ca valorile lui x să fie reale.

1685. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$$

1686. — Se dă expresia:

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2\cos a \cos b \cos c.$$

Să se simplifice această expresie ştiind că $a+b+c=\pi$.

1687. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin(75^\circ + x) + \cos(105^\circ + x) = 1 - \sin 2x.$$

1688. — Să se rezolve sistemul:

$$x + xy + y = 14$$

$$x^2 y + xy^2 = 48$$

1689. — Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sin x + \cos)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

1690. — Să se găsească raza unei sfere înscrise într-un con circular drept. Înălţimea conului este h iar volumul său, v.

1691. — Să se rezolve ecuaţia:

$$8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

1692. — Fie K proiecţia vîrfului A a triunghiului dreptunghic ABC pe ipotenuza BC, iar P şi T proiecţiile lui K pe catetele AB şi AC. Cunoscînd lungimile $BP=d$ şi $CT=e$, să se calculeze lungimea ipotenuzei BC.

1693. — Să se rezolve sistemul:

$$\sin x = \sqrt{2}\sin y$$

$$\sqrt{3}\sin 2x = 2\sin 2y$$

1694. — Să se rezolve sistemul:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}$$

1695. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} - 2\sin(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x) = 0.$$

1696. — Într-un cerc dat se consideră diametrul AB. Se duc coardele AC şi BD care se taie în interiorul cercului în punctul P. Să se arate că $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL DE ARHITECTURĂ „ION MINCU" — BUCUREŞTI, AUGUST 1954

1697. — Să se simplifice fracţia:

$$E = \frac{x^2 + 2x + 2x\sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x^2 - x + x\sqrt{y} - \sqrt{y}}$$

1698. — Se dau cercurile O de rază R şi O' de rază $3R$, tangente exterior în A. Tangenta comună în A întâlneşte tangenta comună TT' în M'. Se cere: 1) să se calculeze unghiurile TOA şi $T'O'A'$; 2) să se arate că unghiul OMO' este drept; 3) să se calculeze aria TAT'.

1699. — Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \operatorname{tg} 4x + 4\operatorname{tg} 2x + 2a$$

ştiind că $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = a$.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1221

Se împarte arcul AB al unui cerc (O) în patru părţi egale $BC = CD = DE = EA$. Să se arate că $\frac{AC}{AE} - \frac{AB}{AD} = 1$.

I. I. Cristea, elev, Constanţa

Soluţia I-a. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ avem $DC = BC = AE$ şi $AD = BD$. Conform teoremei lui Ptolomeu, avem $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ înlocuim şi obţinem:

$$\frac{AC \cdot AD - AB \cdot AE}{AD \cdot AE} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{AC}{AE} - \frac{AB}{AD} = 1$$

Soluţia II-a. Fie M intersecţia coardelor AC şi BD. AM fiind bisectoare în triunghiul BAD avem:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MD} \quad \text{sau} \quad \frac{AB}{AD} \cdot \frac{MD}{BM} = 1 \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor ABM și ACE avem:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{BM} \tag{2}$$

Ținînd seama de ultimele două relații și că $BD = AD$, avem succesiv:

$$\frac{AC}{AE} - \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{BM} - \frac{AB}{AD} = \frac{AB(AD - MB)}{BM \cdot AD} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{BD - BM}{BM} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{BM}{DM} = 1$$

Soluția III-a, trigonometrică. Notăm măsura arcului $BC = 2\alpha$; $\sphericalangle AEC = 180° - 3\alpha$; $\sphericalangle BDA \cdot 180° - 4\alpha$ și $\sphericalangle ABD = 2\alpha$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiurile ACE și ABD, avem:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin(180° - 3\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3 - 4\sin^2\alpha;$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin(180 - 4\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha = 2 - 4\sin^2\alpha$$

Rezultă:

$$\frac{AC}{AE} - \frac{AB}{AD} = 3 - 4\sin^2\alpha - (2 - 4\sin^2\alpha) = 1$$

Problema 1283

Considerînd globul pămîntesc ca o sferă perfectă, se cere:

a) Să se afle locul geometric al proiecției (M') pe planul ecuatorului al punctelor M de pe pămînt care au latitudinea egală cu longitudinea;

b) Să se arate locul geometric generat de dreapta AM, A fiind punctul de pe ecuator de longitudine nulă.

(Olimpiada Matematică, București 1954

Soluție. Din A și M ducem perpendiculare pe $O\gamma$ în M'' și M'. Observăm că riunghiurile dreptunghice OMM' și OAM'' sînt egale deoarece; (γ fiind pe intersecția planului meridian cu ecuatorul).

$$\sphericalangle AOM'' = \sphericalangle MOM';$$
$$AO = OM = R$$

Atunci $OM' = OM''$; M' și M'' coincid, A și O sînt fixe iar $\sphericalangle AM'O = 90° = \text{constant}$.

Locul geometric al proiecțiilor M' sînt *două cercuri* de diametru cît raza pămîntului (cel de-al doilea care trece prin O și A' simetricul lui A în raport cu O).

b) Se observă că $\sphericalangle MAO = 45°$, deci fiind dată dreapta (Δ) perpendiculară ecuatorului în A, dreapta (Δ) rămîne fixă iar AM rămîne înclinată față de această dreaptă cu 45°. Așa dar, AM generează suprafața unui con.

Problema 1323

Să se arate că în triunghiul oarecare ABC cu mediana BL și bisectoarea BM, există relația

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{aria } ABC}{\text{arig } MBL} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}}$$

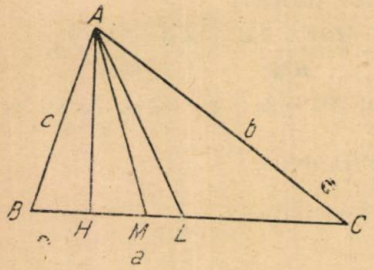
P. Saveiuc (Stalinogorsc) (Matematica v. Școle)

Soluție. Ducem înălțimea AH și avem:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } BML} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{HM}.$$

Din proprietăţile bisectoarei rezultă:

$$\frac{BM}{AB}=\frac{MC}{AC}=\frac{BM+MC}{AB+AC}=\frac{a}{b+c}\ ;\quad MB=\frac{ac}{a+c}\ ;$$



$$ML=BL-BM=\frac{1}{2}a-\frac{ac}{a+c}=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

sau

$$\frac{1}{2}\frac{a}{HM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a(b+c)}{a(b-c)}=\frac{b+c}{b-c}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } MBL}.$$

După teorema tangentelor avem:

$$\frac{1}{2}\frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } MBL}=\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}.$$

Problema 1328

Să se afle adevărata valoare a fracţiei $\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ *pentru* $x=1$ *şi a fracţiei* $\dfrac{x-\operatorname{tg}^3 x}{x+\operatorname{tg}^3 x}$ *pentru* $x=0$.

Simion Petre, Tg. Mureş

Soluţie. a) Înmulţind numărătorul şi numitorul primei fracţii cu

$$(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+\sqrt[m]{x}+1)\cdot(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{x}+1),$$

obţinem:

$$\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\frac{(x-1)(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\ldots+\sqrt[m]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\ldots+\sqrt[n]{x}+1)}$$

Aşa dar,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\ldots+\sqrt[m]{x}+1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\ldots+\sqrt[n]{x}+1}=\frac{m}{n}$$

b) Fracţia a II-a mai poate fi scrisă succesiv:

$$\frac{x-\operatorname{tg}^3 x}{x+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{x}}{1+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x}}=\frac{1-x^2\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^3}{1+x\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2}.$$

Deci,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}^3 x}{n+\operatorname{tg}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^3}{1+x\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2}.$$

Se știe că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Deci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg}^3 x}{x + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Problema 1330

Să se arate că oricare ar fi n real, avem:

$$0 < \frac{2n^4 - 2n^3 + n^2 + n + 1}{n^4 - n^3 + n^2 + 1} < 4$$

Gh. I. Bercea

Soluție. Numitorul fracției se poate scrie:

$$n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 = \left(n^2 - \frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 + \frac{n^2}{2}$$

adică este o sumă de patrate, deci este totdeauna pozitiv. Numărătorul se scrie:

$$\tfrac{1}{2}\left[(2n^2 - n)^2 + n^2 + 2n + 2\right]$$

Aci trinomul $n^2 + 2n + 2$ este totdeauna pozitiv, deoarece ecuația $n^2 + 2n + 2 = 0$ are rădăcini imaginare; deci și numărătorul este totdeauna pozitiv. Fracția este și ea pozitivă.

Să arătăm că avem și:

$$\frac{2n^4 - 2n^3 + 2^2 + n + 1}{n^4 - n^3 + n^2 - n + 1} < 4$$

sau

$$\frac{-2n^4 + 2n^3 - 3n^2 + 5n - 3}{n^4 - n^3 + n + 1} < 0$$

sau înmulțind cu -1 și schimbînd cu -1 și schimbînd sensul sensul inegalității:

$$2n^4 - 2n^3 + 3n - 5n + 3 > 0$$

(am lăsat deoparte numitorul deoarece am arătat că este totdeauna pozitiv).

Relația (1) se mai poate scrie: $(n^2 - \frac{1}{2}n)^2 + \frac{5}{2}n^2 - 5n + 3 > 0$. Trinomul $\frac{5}{2}n^2 - 5n + 3 = 0$ (este totdeauna pozitiv) deoarece ecuația $\frac{5}{2}n^2 - 5n + 3 = 0$ are rădăcini imaginare. Relația (1) este deci, adevărată oricare ar fi n real.

Problema 1332

Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$. Vîrfurile A_1 și A_2 sînt fixe, iar A_3 și A_4 se mișcă în spațiu astfel ca raportul ariilor $A_1A_2A_3$ și $A_2A_3A_4$ păstrează o valoare constantă. Deasemenea, unghiul dreptelor A_1A_2 și A_3A_4 rămîne constant și egal cu φ.

a) *Să se demonstreze că dreapta A_3A_4 rămîne tangentă unei sfere fixe.*

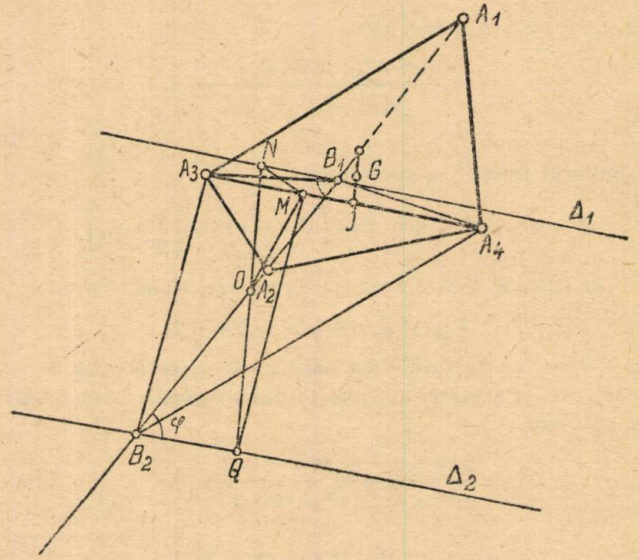
b) *Să se găsească locul geometric al centrului de greutate G al tetraedrului considerat, cînd dreapta A_3A_4 rămîne paralelă cu ea însăși.*

Mihai I. Popescu, student, București

Soluție: Notăm:

$$\frac{S(A_1A_3A_4)}{S(A_2A_3A_4)} = K$$

Considerăm planele bisectoare (P_1) și (P_2) ale unghiurilor dietre formate de fețele $A_1A_3A_4$ și $A_2A_3A_4$. Aceste plane vor intersecta muchia A_1A_2 respectiv în punctele B_1 și B_2. Remarcăm faptul că planele (P_1) și (P_2) sînt perpendiculare. Avem: $\frac{B_1A_1}{B_1A_2} = \frac{B_2A_1}{B_2A_2} = K$, deci punctele B_1 și B_2 sînt fixe. Fie O mijlocul segmentului B_1B_2. Deasemenea, fie Δ_1 și Δ_2 două drepte



paralele cu dreapta A_3A_4, trecînd respectiv prin B_1 și B_2, iar (P) un plan ce trece prin O și este perpendicular pe dreapta A_3A_4. Notăm, cu M, N, Q punctele unde dreptele A_3A_4, Δ_1, Δ_2 înțeapă respectiv planul (P). Se deduce ușor că triunghiul MNQ este dreptunghic (deci: $ON = OQ = OM$) și că OM este perpendiculară pe A_3A_4. Din triunghiul dreptunghic OB_1N obținem că:

$$ON = OB_1 \sin \varphi = \frac{B_1B_2 \sin \varphi}{2} = \text{constant}; \text{ deci și } CM = \frac{B_1B_2 \sin \varphi}{2} = \text{constant}.$$

În fine, stabilim afirmația enunțului: «Dreapta A_3A_4 rămîne tangentă sferei fixe de centru O și de rază $R = \frac{B_1B_2 \sin \varphi}{2}$.

b) Fie I și J mijloacele segmentelor A_1A_2 și A_3A_4. Centrul de greutate G al tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ se găsește în mijlocul segmentului IJ. În condițiile punctului *b)* dreapta A_3A_4 generează o suprafață cilindrică circulară (C), axa ei de simetrie (D) trecînd prin punctul O. Aceeaș suprafață o generează și punctul J. Deducem astfel, că punctul G va descrie suprafața cilindrică circulară (C'), omotetică cu (C), centrul de omotetie fiind I, iar raportul de omotetie fiind egal cu 1/2. Axa de simetrie (D') a suprafeței (C') trece prin mijlocul segmentului OI.

Observare. — Dreptele (D) și (D') sînt paralel cu direcția fixă pe care o păstrează dreapta A_3A_4.

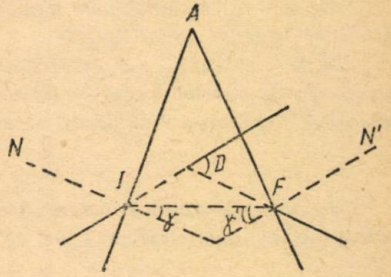
Problema 1346

O prismă optică are unghiul de refringență de 60°. Pe una din fețele ei cade un fascicol de lumină monocromatică. Experiența ne arată că atunci cînd unghiul de incidență al fascicolului

de lumină este de 60° si unghiul de emergență este tot de 60°. Să se calculeze indicele de refracție al prismei.

Virgil Atanasiu

Soluție. Dacă unghiul de incidență este egal cu unghiul de emergență ne aflăm în cazul deviației minime. Formulele prismei devin:
$D = 2\,i - A$ (1) și $A = 2r$ (2).



Din (1) scoatem $i = \frac{D + A}{2}$ și din (2) $r = \frac{A}{2}$, de unde:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{D + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = n$$

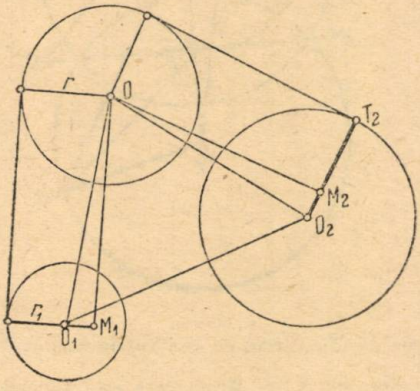
Înlocuind $A = 60°$, $D = 60°$ avem $n = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \sqrt{3}$

Problema 1350

Se dau două cercuri fixe, cu centrele O_1 și O_2, de raze respectiv r_1 și r_2. Să se afle locul geometric al centrului O al unui al treilea cerc, de rază r, astfel ca tangentele comune exterioare, la perechile de cercuri (O); (O_1) și (O); (O_2) să fie egale.

Ce condiție trebue să îndeplinească raza r a cercului (O) pentru ca locul geometric de mai sus să fie chiar mediatoarea segmentului O_1O_2?

Gh. D. Simionescu



Soluția. — Din unghiurile dreptunghice OO_1M_1 și OO_2M_2 rezultă:

$$OO_1^2 = OM_1^2 + (r_1 - r)^2$$

$$OO_2^2 = OM_2^2 + (r_2 - r)^2$$

Deoarece tangentele comune trebue să fie egale avem $OM_1 = OM_2$. Atunci prin scăderea egalităților de mai sus, obținem:

$$\overline{OO_1^2} - \overline{OO_2^2} = (r_1 - r)^2 - (r_2 - r)^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2 - 2r)$$

Deoarece diferența patratelor distanțelor dela O la două puncte fixe O_1 și O_2 este constantă, locul geometric al punctului O este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor O_1O_2.

Pentru ca locul geometric să fie mediatoarea segmentului P_1O_2 trebuie ca $OO_1 = OO_2$ adică

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2 - 2r) = 0$$

Dacă presupunem $r_1 \neq r_2$ atunci trebuie ca $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$. Deci, locul geometric se confundă cu mediatoarea segmentului O_1O_2 *dacă cercul O are ca* rază media aritemtică a razelor r_1 și r_2.

Același lucru se întîmplă dacă $r_1 = r_2$ oricare ar fi r, dar aceasta este evident.

Observare. — Locul geometric de mai sus este o generalizare a axei radicale. În cazul cînd $r = O$, adică cercul O se reduce la un punct, atunci locul devine chiar axa radicală a celor două cercuri O_1 și O_2.

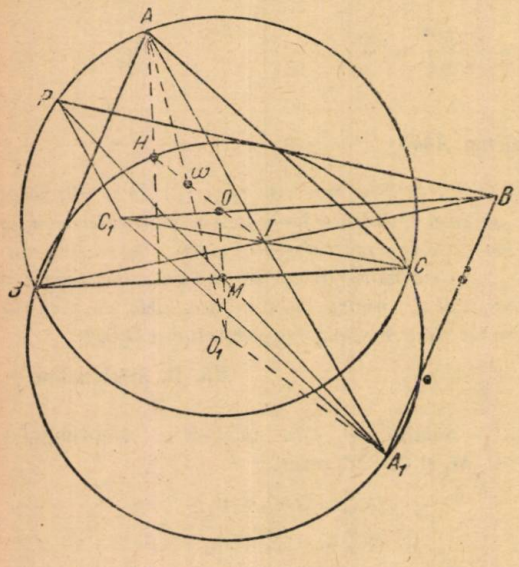
Problema 1352

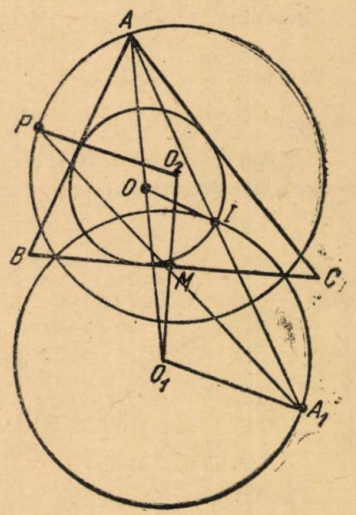
Fie A_1, B_1. C_1 simetricele unui punct P din planul unui triunghi ABC în raport cu mijloacele laturilor BC, CA, AB.

a) *Se știe că AA_1 BB_1, CC_1 sînt concurente într-un punct I*; b) *Să se afle locul geometric descris de punctul I cînd P descrie cercul circumscris triunghiului ABC*; c) *Cum trebuie să varieze P pentruca I să descrie cercul înscris triunghiului ABC?*

C. Ionescu-Țiu

Soluție. — Punctul P descriind cercul ABC de centru 0, punctul A_1 simetricul său față de M va descrie cercul A_1BC de centru 0_1 simetricul lui 0 față de BC, cercurile 0 și





0_1 fiind egale. Rezultă că punctul I mijlocul lui AA_1 va descrie cercul cu centrul în mijlocul lui $A0_1$ și de raza $I = \frac{1}{2} 0A = \frac{1}{2} R$; R fiind raza cercului ABC. Acest cerc este tocmai cercul lui Euler și ω este în mijlocul lui $0H$; H fiind ortocentrul triunghiului ABC.

— Locul lui I fiind cercul înscris triunghiului ABC, locul lui A_1 este cercul 0_1 de raza $0_1A_1 = 2.0I$ unde $A0 = 00_1$, iar locul lui P este cercul cu centrul în simetricul 0_2 al lui 0_1 față de mijlocul M al lui BC și de raza $0_2P = 0_1A_1 = 2.0I = 2r$.

Problema 1355

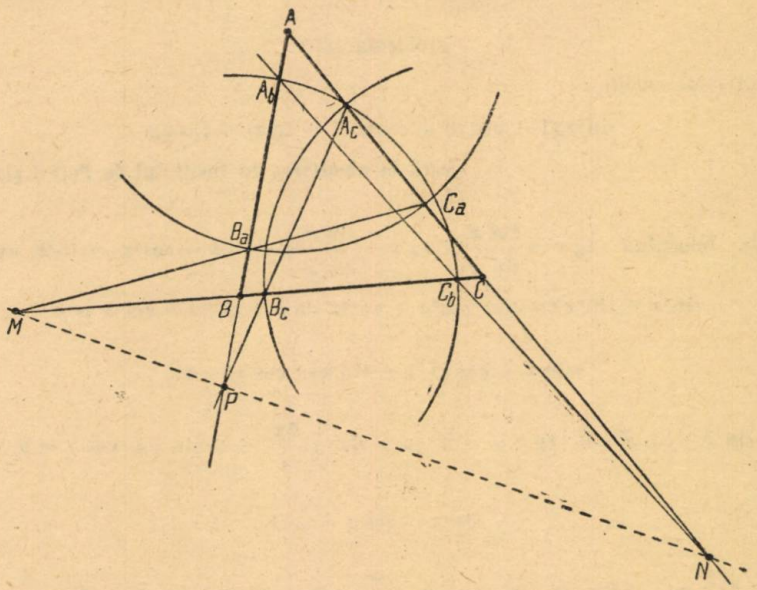
Luînd vîrfurile triunghiului ABC ca centre se descriu trei cercuri egale. Cercul cu centrul în A intersectează laturile AB, AC respectiv în Ba, Ca. Notăm cu Ab, Cb și Ac, Bc punctele analoage. Să se demonstreze că intersecțiile dreptelor BaCa, CbAb, AcBc *cu laturile triunghiului ABC sînt colineare.*

M. I. Popescu

Soluție. — Fie $M \equiv (BaCa,\ BC)$; $N \equiv (CbAb;\ CA)$; $P \equiv (AcBc;\ AB)$. Fie deasemenea $AB=c$; $BC=a$; $CA=b$ iar r raza celor trei cercuri.

Teorema lui Menelaos aplicată punctelor Ba, Ca, M colineare în triunghiul ABC dă

$$\frac{AB_a}{BB_a} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CC_a}{AC_a} = +1; \text{ de unde } \frac{BM}{CM} = \frac{BB_a}{CC_a} \cdot \frac{AC_a}{AB_a} \text{ și } \frac{BM}{CM} = \frac{c-r}{b-r}$$



Analog,

$$\frac{CN}{AN} = \frac{a-r}{c-r}; \quad \frac{AP}{BP} = \frac{b-r}{a-r}$$

și rezultă

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = \frac{b-r}{a-r} \cdot \frac{c-r}{b-r} \cdot \frac{a-r}{c-r} = +1$$

și rezultă că punctele M, N, P sînt colineare.

Problema 1378

Se dau trei termeni ai unei progresii:

$$(a+x)^2;\ (a^2+x^2);\ (a-x)^2.$$

Să se demonstreze că progresia este aritmetică și să se calculeze suma primilor n termeni

(Dată la admiterea în Institutul de Petrol și Gaze)

Soluție. Avem evident:

$$2(a^2+x^2) = (a+x)^2 + (a-x)^2$$

Deci progresia aritmetică cu rația $-2ax$.

Ultimul termen al n-lea este

$$a_n = (a+x)^2 - (n-1)\,2ax$$

adică,

$$a_n = a^2 + x^2 = 2x\,(2-n)$$

Suma primilor n termeni este:

$$S = \frac{[a^2 + x^2 + 2ax + a^2 + x^2 + 2ax\ (2 - n)]\, n}{2}$$

adică,

$$S = na^2 + nx^2 + nax\,(3 - n).$$

Problema 1379

Să se rezolve ecuația :

$$\sin^3 x\,(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

(Dată la admiterea în Institutul de Petrol și Gaze)

Soluție. Înlocuind $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ și $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ și $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, avem:

$$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

de unde:

$$(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0.$$

Avem,

$$\sin x + \cos x = 0;\ \operatorname{tg} x = -1;\ x = K\pi + \frac{3\pi}{4};\ 1 + \sin x - \cos x = 0$$

sau

$$\sin x - \cos x = -1$$

de unde

$$x_1 = 2K\pi \quad \text{și} \quad x_2 = 2K\pi - \frac{\pi}{2};\ \ (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots).$$

Problema 1380

Într-un trunchi de con este înscrisă o sferă de rază r. Generatoarea este înclinată cu unghiul α față de planul bazei. Să se găsească aria laterală a trunchiului de con.

(Dată la admiterea în Inst. Petrol și Gaze)

Soluție. Dacă R_1 și R_2 sînt razele bazelor trunchiului de con, iar G generatoarea, avem:

$$R_1 + R_2 = G \text{ iar } G = \frac{2r}{\sin \alpha}$$

Însă aria laterală $A_1 = \pi\, G\,(R_1 + R_2) = \pi \cdot \frac{4r^2}{\sin^2 \alpha}$

Problema 1381

Se dă sistemul și expresia algebrică:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2y + xy^2 &= a; \\ x^2y + xy^2 + y^3 &= b; \end{aligned} \qquad E(x;\ y) = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$$

Se cere; a) *să se calculeze expresiile rădăcinilor x și y;*
b) *să se calculeze valoarea algebrică a expresiei și să se arate că este egală cu $E\ (a;\ b)$.*

(Dată la admiterea în Institututul de Petrol și Gaze)

Soluție Sistemul se scrie:

$$\begin{aligned} x(x^2 + xy + y^2) &= a \\ y(x^2 + xy + y^2) &= b \end{aligned}, \text{ Împărțind, avem:}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\ ;\ x = \frac{a}{b}\,y \qquad (1)$$

Înlocuind în prima ecuație, avem: $y^3\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b}\right) = a$, de unde

$$y = \frac{b}{\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}}$$

La fel:

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}}$$

$E\ (x;\ y)$ se mai poate scrie:

$$E = \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x + y}{x - y}$$

sau ținînd seama de (1)

$$E = \frac{a + b}{a - b} = E\ (a;\ b)$$

Problema 1382

Să se rezolve ecuația:

$$tg\ 4x = 2\sqrt{3}\ (\cos^4 x - \sin^4 x)$$

(Dată la admiterea în Inst. Petrol și Gaze)

Soluție.

$$\text{tg}\ 4x = 2\sqrt{3}\ (\cos^2 x + \sin^2 x)\ (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\text{tg}\ 4x = 2\sqrt{3}\ \cos\ 2x$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos 4x} = 2\sqrt{3}\ \cos 2x$$

$$\frac{2\ \sin 2x\ \cos 2x}{\cos 4x} = 2\sqrt{3}\ \cos 2x$$

Se observă că $\cos 2x = 0$ e o soluție a ecuației $x = (2\ K + 1)\frac{\pi}{4}$;

Mai rămîne:

$$\sin 2x = \sqrt{3}\ \cos 4x = \sqrt{3}\ (1 - 2\ \sin^2 2x)$$

$$2\sqrt{3}\ \sin^2 2x + \sin 2x - \sqrt{3} = 0$$

De unde pentru $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = \frac{1}{2}\ \text{arc}\ \sin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pentru $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = K\pi + \frac{2\pi}{3}$, unde $K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Problema 1383

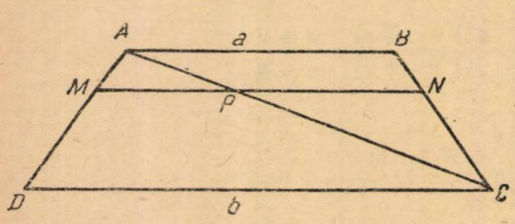
Fie $ABCD$ *un trapez avînd baza mică* $AB = a$ *i baza mare* $DC = b$. *Pe latura* AD *se ia un punct* M *astfel ca* $\frac{MA}{MD} = \frac{p}{q}$. *Prin* M *se duce paralela* MN *la cele 2 baze. Să se calculeze* MN *în funcţie de* a, b, p, q.

Soluţie. În triunghiul ACD avem:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{p}{q} \text{ sau } \frac{MA}{MA + MD} = \frac{p}{p+q} = \frac{MA}{AD}$$

$$\text{Însă: } \frac{MA}{AD} = \frac{MP}{b}; \text{ deci, } \frac{MP}{b} = \frac{p}{p+q} \tag{1}$$

$$MP = \frac{bp}{p+q}$$



Analog din triunghiul ABC se deduce:

$$PN = \frac{aq}{p+q} \tag{2}$$

Adunînd pe (1) cu (2) avem

$$MN = \frac{aq + bp}{p+q}$$

PROBLEME PROPUSE

1700. Fie un cerc O de diametru AB. Într-un punct C (fix) al acestui diametru, ridicăm o perpendiculară. Secanta variabilă ANM taie perpendiculara în N şi cercul în M. Se cere:

a) Locul geometric al centrului cercului circumscris patrulaterului $CNMB$. b) Locul punctelor de contact al tangentelor duse din A la aceste cercuri. c) Locurile *a*), şi *b*) taie diametrul AB respectiv în R şi P. Să se arate că segmentul PR este egal cu diferenţa dintre media aritmetică şi cea geometrică a segmentelor AB şi AC.

Şt. Musta

1701. Considerăm un dreptunghi $ABCD$ în care lungimea AB este cît diagonala patratului construit pe lăţimea AB. Să se arate că perpendiculara din C pe diagonala BD trece prin mijlocul laturii AB.

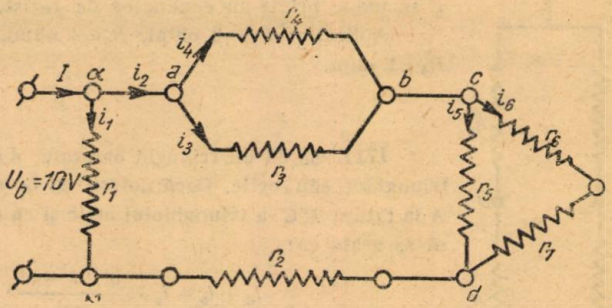
N. Mihăileanu

1702. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x + y + z = a$$
$$x + v + w = b$$
$$y + w + u = c$$
$$z + u + v = d$$
$$xu = yv = zw.$$

* * *

1703. Tensiunea la borne este 10 V (vezi figura). Valorile rezistenţelor din circuit sînt: $r_1=0{,}4$ ohmi, $r_2=0{,}8$ ohmi, $r_3=0{,}7$ ohmi, $r_4=0{,}1$ ohmi, $r_5=0{,}5$ ohmi, $r_6=0{,}7$ ohmi, $r_7=0{,}3$ ohmi, Se cere: a) rezistenţa echivalentă a circuitului; b) curentul total din circuit; c) valorile curenţilor ce străbat rezistenţele; *d*) căderea de tensiune între punctele *ab* şi *cd*.



Nicolae Suciu

1704. Dacă numerele n sînt multipli de 3 atunci puterile întregi şi pozitive ale lor n^m se pot descompune într-o sumă de numere întregi de forma $3a+3$, $3a+9$, ..., $3a+3n$.

Gh. I. Bercea, student, Timişoara

1705. În triunghiul ABC notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor, E şi F intersecţiile dreptei $A'C'$ cu cercul de diametru AB, iar I şi K intersecţiile dreptei $A'B'$ cu cercul de diametru AC. Să se arate că punctele A, E, I sînt colineare, deasemenea şi punctele A, F, K, sînt colineare.

Al. Alexandrescu, Bucureşti

1706. Să se arate că

$$(1+\operatorname{tg}a)^2+(1+\operatorname{ctg}a)^2=\frac{4(1+\sin 2a)}{\sin^2 2a}.$$

Cornel Uşvat, Beiuş

1707. Să se determine m, n, p în aşa fel ca polinomul $x^5+x^4+x^3+(m+n)x^2+(n+p)x+m+p$ să fie divizibil prin produsul $(x+1)(x+2)(x+3)$.

I. I. Loziciu, student, Timişoara

1708. Să se exprime unghiurile diedre formate de feţele unui tetraedru echifacial în funcţie de laturile a, b, c ale uneia din feţe, şi apoi raza sferei circumscrise tetraedrului. Aplicaţie $a=4$, $b=5$, $c=6$.

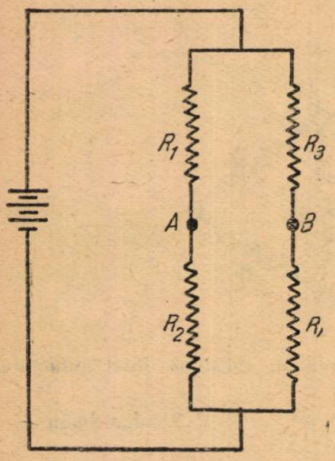
C. Ionescu-Ţiu

1709. Un circuit oscilant al unui post de radioemisie este alcătuit dintr-un condensator cu o capacitate de 1000 cm şi o bobină de autoinducţie. Ştiind că bobina are 20 de spire cu diametru de 4 cm şi de un metru lungime, să se calculeze frecvenţa oscilaţiilor produse şi lungimea de undă a acestui post ($\mu=500$).

Cecilia Cetăţeanu, studentă, Craiova

1710. Se consideră montajul din figură.

a) Să se afle curenții care circulă în fiecare rezistență știind că f.e.m. a bateriei de rezistență interioară neglijabilă, este de 14 V.



b) Să se afle care vor fi curenții dacă punctele A și B se unesc printr-un conductor de rezistență neglijabilă.

Aplicație: $R_1 = 2$ ohmi, $R_2 = 4$ ohmi, $R_3 = 3$ omhi și $R_4 = 1$ ohm.

A. Șaichin

1711. Se dă un triunghi oarecare ABC. Fie $A'B'C'$ triunghiul său ortic. Dacă notăm cu l_a distanța vîrfului A la latura $B'C'$ a triunghiului ortic și cu l_b, l_c analoagele, să se arate că:

$$l_a + l_b + l_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R}.$$

Simon St. Petre

1712. Fie un triunghi oarecare ABC și cercul său circumscris. Diametrul dus prin A taie dreapta BC în D, iar înălțimea din A taie cercul în E. Fie punctele $F = (AD,\ BE)$; $K = (AB,\ DE)$; $L = (BH,\ DE)$; $M = (BD, FK)$; $N = (BE, DH)$ unde H este ortocentrul.

Să se arate că punctele L, M, N sînt colineare.

Ion Alexa

1713. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$xy\,(x + y - 2z) = c$$
$$yz\,(y + z - 2x) = a$$
$$zx\,(z + x - 2y) = b.$$

Ion I. Cristea, elev, Constanța

1714. a) Un corp cu masa de 1 kg aflat inițial în repaos, străbate cu o mișcare uniform accelerată un spațiu de 1800 m în timp de un minut. Să se calculeze mărimea forței care produce mișcarea și lucrul mecanic efectuat.

b) Un glonte cu masa de 20 g are viteza de 500 m/s. Trecînd printr-o scîndură groasă de 10 cm glonțul își reduce viteza la 100 m/s. Să se calculeze forța de rezistență a scîndurii.

* * *

1715. a) O sursă luminoasă avînd 10 cd se află la distanță de 15 cm de un paravan. La ce depărtare trebuie așezată o sursă de 20 cd pentru a produce aceiași iluminare a paravanului?

b) Un obiect luminos rectiliniu se află la 20 cm depărtare de centrul optic al unei lentile convergente avînd distanța focală de 15 cm. Să se afle distanța corespunzătoare a imaginii.

* * *

1716. Să se arate că oricare ar fi $n \geqslant 3$ avem inegalitatea

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3\pi}{4n}.$$

C. Ionescu-Țiu

1717. a) Pe un scripete fix sînt atîrnate în echilibru două greutăţi egale avînd masa de 475 g. fiecare. Ce acceleraţie va obţine sistemul dacă deasupra uneia dintre cele două greutăţi se aşează o greutate suplimentară cu masa de 30 g? ($g=980$ cm/s^2).

b) Să se calculeze grafic şi prin calcul, rezultanta a 2 forţe concurente $F_1=5$ kgf şi $F_2=10$ kgf formînd un unghi de 60°.

* * *

1718. Să se determine m pentruca dreptele date de ecuaţiile:

$$mx+3y-3m=0$$
$$2x-y-m=0$$
$$2x-(m+3)y+2=0$$

să fie concurente apoi să se reprezinte grafic cele trei drepte.

N. C. Ciomu

1719. Într-un triunghi oarecare ABC cu înălţimile AA', BB', CC' notăm cu M intersecţia dreptelor $B'C'$ şi AA'; iar cu N şi P proiecţiile punctelor B' şi C' pe BC Să se arate că

$$\frac{1}{B'N}+\frac{1}{C'P}=\frac{2}{MA'}$$

D. C. Panu, Galaţi,

1720. Ce capacitate trebuie să aibă condensatorul aparatului de recepţie radio pentru a prinde lungimi de undă de 1500 metri ştiind că selfinductanţa bobinei din circuit este de 0,0002 henry?

M. E. Stanciu, elev, Giurgiu

1721. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\frac{-x+y+z}{a}=\frac{x-y+z}{b}=\frac{x+y-z}{c}=xyz.$$

Simon St. Petre

1722. Dacă A', B', C' mijloacele laturile şi α, β, γ sînt luate pe înălţimile triunghiului ABC în afară sau în interiorul triunghiului astfel ca $A\alpha=\frac{a}{2}$, $B\beta=\frac{b}{2}$ şi $C\gamma=\frac{c}{2}$; să se demonstreze că dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sînt concurente.

Gh. Dobrotescu. profesor, Predeal

1723. Să se determine un plan pe care un triunghi oarecare se proiectează ortogonal după un triunghi echilateral. Să se construiască. (« Gazeta Matematică » Supliment VII.253 — mai 1937).

Adrian Gheorghiu

1724. Se dau cercurile O_1 şi O_2 egale şi tangente în M. Un cerc oarecare O trecînd prin M taie pe O_1 în A şi pe O_2 în B. Dreapta MA întîlneşte pe O_2 în A'; iar MB întîlneşte pe O_1 în B'. Să se demonstreze că

$$MB=MB' \text{ şi } MA=MA'$$

(« Gazeta Matematică » Supliment T.C. 83 — iunie 1937).

Gh. Buicliu

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE *)
PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 653. La o cooperativă s-au vîndut caiete cu 0,90 lei şi cu 0,50 le bucata. Pentru 64 caiete vîndute s-a încasat 46 lei. Prin aritmetică să se afle cîte caiete de fiecare fel au fost vîndute?

* * *

E: 654. Un trapez dreptunghic în A are $AB = 2DC$, unde AB şi CD sînt respectiv baza mare şi baza mică. Notînd cu M proiecţia lui A pe BC să se arate că $MD = AD$.

Zamfira Petrică, studentă, Bucureşti

E: 665. Suma a două numere este 100. Împărţind numărul mare la cel mic obţinem cîtul 4 şi restul 10. Să se afle cele două numere.

Marius Zaharescu, student, Bucureşti

E: 656. Din oraşele Arad şi Brad, situate la distanţa de 300 km, pleacă simultan unul spre celălalt, două trenuri. Cel care pleacă din Arad face 40 km/oră, iar cel care pleacă din Brad face 20 km/oră. După trei ore, din aceleaşi gări pleacă alte două trenuri şi sosesc astfel toate la aceiaşi oră în staţia Gurahonţ. Se cere:

a) să se calculeze distanţele între Arad-Gurahonţ şi Brad-Gurahonţ;

b) să se calculeze după cît timp dela plecare se întîlnesc primle două trenuri;

c) vitezele ultimelor două trenuri.

G. T. Groşforeanu, elev, Bucureşti

E: 657. O echipă de 12 zidari ar termina o lucrare în 16 zile. O altă echipă de 18 zidari ar termina aceiaşi lucrare în 10 zile. În cît timp ar termina aceiaşi lucrare dacă ar lucra 7 zidari din prima echipă şi 8 zidari din a doua echipă?

* * *

E: 658. Să se afle care este anul care urmează să fie patrat perfect şi care a fost ultimul an, exprimat de un cub perfect?

* * *

E: 659. Să se arate că:

a) dacă $x + y = 1 + xy$ una din necunoscute este egală cu unitatea iar cealaltă poate avea orice valoare;

b) dacă $x - y = 1 - xy$ atunci $y = -1$ şi x poate lua în acest caz orice valoare:

c) dacă $x + y = 1 - xy$, atunci $x = \dfrac{1-y}{1+y}$ şi $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Ce devine o necunoscută cînd cealaltă este egală cu -1; dar cu unu?

d) dacă $x - y = 1 + xy$ atunci $x = \dfrac{1+y}{1-y}$.

Ce devine y, cînd $x = 1$; dar cînd x este -1?

C. I. Ţ.

E: 660. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2 = 2x^2 - y^2 + xy.$$

I. Brezeanu, student

---

*) V: 653, 655, 661, VI: 656, 657, 658, 668, VII: 654, 659, 660, 662, 663, 664, 665, 666, 667.

E: 652. Într-o livadă de pomi sînt meri, peri și pruni plantați în 52 rînduri, fiecare rînd numai pomi de același fel. În fiecare rînd de meri sînt cu 5 pomi mai puțini decît în fiecare rînd de pruni și cu doi pomi mai mulți decît în fiecare rînd de peri. Se mai știe că sînt de 5 ori mai puține rîndurile de meri decît rîndurile de pruni și de două ori mai multe decît rîndurile de peri, iar numărul total de pomi este 556. Să se afle cîte rînduri de meri, peri și pruni sînt și cîți pomi sînt în fiecare rînd.

L. Aurel, elev, Oradea

E: 661. Să se arate că:

$$\left(\frac{xy}{z}+x+y-z\right)\left(\frac{yz}{x}-x+y+z\right)=\left(\frac{yz}{x}-x+y+z\right)\left(\frac{zx}{y}+x-y+z\right)=$$

$$=\left(\frac{zx}{y}+x-y+z\right)\left(\frac{xy}{z}+x+y-z\right)=4(xy+yx+zx).$$

I. I. Cristea, elev, Constanța

E: 662. Să se determine valorile lui a și b pentruca împărțirea

$$\frac{3ax^3-x^2-3bx+4a}{x^2-b}$$

să se facă exact.

M. Jășcanu, elev, Dorohoi

E: 663. Să se arate că

$$a(1+b^2)^2+b(1+a^2)^2+(a+b)^3(1-ab)=(a+b)(1+a^2)(1+b^2)+$$
$$+4ab(a+b)(1-ab).$$

C. I. Ț.

E: 664. Să se arate că:

$$m(1+n^2)[n(1+m^2)+(m+n)(1-mn)]+n(1+m^2)[m(1+n^2)+$$
$$+(m+n)(1-mn)]+(m+n)(1-mn)[m(1+n^2)+n(1+m^2)]=$$
$$=2mn(1+m^2)(1+n^2)+2n(1+m^2)(m+n)(1-mn)+$$
$$+2m(m+n)(1-mn)(1+n^2).$$

C. I. Ț.

E: 665. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2{,}5 \quad \text{și} \quad \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{3}{x^2y^2}=0.$$

V. Andronescu, elev, București

E: 667. Se dă un triunghi oarecare ABC și se duce înălțimea AA'. Fie M, N, P respectiv simetricele punctului A' față de mijloacele laturilor BC, CA, AB. Să se arate că patrulaterul $MNPA'$ este trapez isoscel.

Donescu Șt. Dragomir, Focșani

E: 668. Pe un șantier, 10 muncitori lucrînd 6 ore pe zi au executat în 7 zile 490 m³ săpătură. Cîți muncitori trebuie să angajeze șeful șantierului pentruca în 5 zile lucrînd 8 ore pe zi să execute 980 m³ săpătură?

Marius Zaharescu, student, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *)

(urmare din numărul precedent)

(Soluții bune primite în cursul lunii februarie 1955)

FĂGĂRAȘI. Clasa IX-a. Sipoș Gheorghe (1375, 377, 378, 416, 436, 441, E: 558, 560, 561, 563, 568, 574)

FOCȘANI. Clasa IX-a. Atanasiu Costica (1372, 375, 377, 378, 383, 386, 392, 403, 404 405, 418, 436, 449, 453, 464, 467, 485, E: 551, 552, 558, 559, 561, 567, 568, 571, 572, 574, 581, 586, 587), Calciu Gheorghe (1405, 408, 419, 432, 433, 436, 447, E: 552, 559, 574), Cosor Emanuel (1372, 375, 377, 378, 383, 386, 418, 419, 442, 443, 449, 464, 467), Cristea Aurel (1373, 375, 378, 379, 381, 384, 385, 395, 396, 397, 405, 408, 409, 411, 416, 421, 424, 432, 433, 436, 437, P), Geaboc Mihai (1372, 375, 377, 378, 383, 405, 418, 464, 467, E: 551, 552, 553, 558, 559, 561, 563, 567, 568, 571, 572, 574), Lupșa Dan (1441, 449, 460, E: 576, 577, 578, 581, 585, 586, 588), Nistor Nicolae (1372, 375, 378, 403, 404, 405, 418, 432, 436 443, 449, 453, 459, 461, E: 551, 552, 559, 561, 567, 572) Stan Virgil (1372, 375, 378, 392, 404, 405, 418, 432, 436, 443, 449, 453, 459, 561, E: 552, 558, 559, 561, 563, 567, 574), *Tigănuș Mircea* (1372, 374, 375, 377, 378, 383. 403, 405, 407, 413, 414, 415, 416, 418, 419, 436, 437, 442, 443, 449, 453, 464, 467. E: 551, 552, 558, 559, 561. 563, 564, 565, 567, 568, 570, 572, 573, 575, 578, 579, 580, 581, 585, 586, 587, 588), Stoica N. Constantin (1372, 374, 375, 377, 378, 383, 402, 418, 419, 436, 442, 499, 453, 464, 467, E: 558, 559, 560, 561), Sivoglu Nicolae, (1372, 375, 377, 378, 383, 386, 392, 403, 404, 405, 415, 418, 432, 436, 449, 453, 464, 467), clasa X-a. Paraschiv N. Constantin (1375, 377, 392, 436, 443, 449, 459, 461, E: 551, 552, 558, 559, 561, 572), *Țîru Emil* (1373, 374, 379, 380, 387, 388, 390, 395, 404, 409, 411, 415, 416, 418, 440, 441, 444, 448, 449, 453, 456, 459, 460, 461, 462, 464, 467, 468, E: 553, 555, 580, 587, P), absolvent *Donescu Șt. Dragomir* (1371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 419, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 429, 436, 437, 438, 440, 441, 442, 443, 449, 451, 453, 454, 455, 456, 458, 459, 460, 464, 465, 466, P).

GALAȚI. *Școala medie tehnică de mecanică*, anul III. Ariton. I. Vasile (1301, 302, 312, 338, 339, 345, E: 505, 517, 518, 520), Calianu Oprea (1373, 379, 382, 434, E: 558, 559, 560, 563, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 578, 579, 584, 586, 587, P); clasa IX-a. Grosu G. Florin (1350, 351, 354, 355, 358, 360, 361, 362, 363, 364, 365, E: 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549); clasa X-a. Bușilă G. Gheorghe (1372, 374, 375, 377, 378, 381, 383, 384, 385, 392, 403), Cioceanu Marta (1333, 339, 349, 354, 363, 372, 374, 377, 378, 383, 403, 404, 409, 410, 416, 436), Pinilie Paraschiva (1372, 373, 374, 375, 376, 378, 383, 403, 404, 409, 410, 416, 436).

GHEORCHIENI. Clasa X-a. Resenberg Silvia (1374, 380, 409, 410, 416, 432, 436, E: 558, 559, 563, 568, 570, 574, 575).

GIURGIU. Clasa VIII-a. Bădilă I. Mihai (1183, 372, E: 558, 559, 563, 564, 567, 571, 574, 580); clasa IX-a. Codreanu N. Petre (1376, 378, 381, 386, 410, 411, 413, 416, 418, 436, 437, 442, 443, 449); clasa X-a. *Bigan V. Stan* (1372, 385, 386, 389, 390, 392, 396, 397, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 418, 419, 420, 422, 423, 424, 431, 432, 433, 436, 438, 441, 442, 443, 451, P), *Mișcol M. Mircea* (1383, 406, 411, 413, 422, 425, 440, 441, 442, 449, 451, 452, 453, 455, 457, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 467).

---

*) Nu se mai iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor pentru școala de 7 an trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către studenți, și nici soluțiile trimise în număr mai mic decît 10 soluții bune, nici soluțiile necorect redactate.

HUNEDOARA. *Şcoala medie tehnică metalurgică.* Anul III. Petrocescu Victor (1372, 374, 375, 380, 383, 384, E: 5550, 551, 552, 554, 558, 560, 561, 562, 567, 568, 569, 572.)

IAŞI. Clasa X-a *Hogaş C. Constantin* (1349, 354, 358, 362, 363, 372, 375, 377, 378, 379, 380, 385, 407, 411, 413, 416, 436, 441, 449, E: 537, 538, 540, 544, 546, 552, 558, 559, 560, 561, 563, 574, 575, 586, 587, 588), Hermezin Marinel (1372, 375, 377, 378, 379, 385, 410, 411, 416, 434, 436, E: 563, 574, 586, 587, 588), *Leonte N. Ion* (1358, 362, 363, 372, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 391, 401, 402, 403, 407, 410, 411, 416, 436, 441, 449, 453, 460, 465, E: 536, 537, 539, 540, 451, 546, 547, 549, 552, 559, 563, 568, 569, 570, 571, 574, 575, 578, 580, 586, 587, 588, P). *Şcoala pedagogică mixtă.* Anul IV. Căruntu Nicolae (1441, 449, E: 551 559, 560, 561, 562, 563, 566, 568, 573, 574, 575, 578, 580, 582, 586, 587, 588), Gafencu Gheorghe (E: 562, 563, 564, 566, 567. 568, 569, 570, 571, 573, 574, 575, P), Mustăţea Elvira (1372, 375, 381, E: 561, 562, 565, 571, 574, 575, 586, 587, 588).

LUGOJ. Cuzma Nicolae (Cîteva experienţe). Clasa X-a. Lăzărescu Mircea (1372, 374, 375, 377, 380, 381, 383, 388, 392, 493), Nemeş Alexandru (1402, 449, E: 557 568, 572, 574, 478, 586, 588).

LUPENI (Hunedoara). Clasa X-a Nicolau Ana (1449, 451, 458, 464, 465, 467, E: 557, 568, 572, 574).

MIZIL. *Fîntînele.* Absolvent. *Parepa C. Grigore* (1390, 395, 396, 405, 406, 421, 425, 426, 432, 433, 436, 437, 440, 442, 445, 449, 451, 453, 456, 457, 458, 458, 460, 461, 462, 465, 467, P).

OCNA MUREŞ. Liceul mixt. Clasa IX-a. Duca Vasile (1354, 458, 363, 372, 374, 377, 381, 392, 404, 412, 416, 436, 449, 464).

ORADEA. Şcoala de 7 ani *Tulca (Salonta)* clasa VII-a. Cioară Ana (E: 554, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 578, 579, 584, 587), Cioară Carolina (E: 559, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584, 587), Cioară Lidia (E: 559, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584, 585, 587),Cioară Mihai (E: 561, 563, 566, 567, 568, 572, 573, 574, 582, 586),Coş Simion (E: 558, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584), Cotrau Florica (E: 558, 559, 561, 563, 568, 571, 574 575, 579, 584, 585, 587), Crăciun Maria (E: 554, 559. 561, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 587), Lucaci Teodor (E: 558, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584, 587), Martin Silvia (E: 554, 561, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584, 585, 587), Mateiaş Ana (E: 554, 558, 561, 563, 568, 571, 574, 578, 579, 584, 585, 587), Mangrau Maria (E: 557, 558, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584), Olariu Emil (E: 558, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 579, 584, 587), Piroş Ioan (E: 561, 563, 566, 567, 568, 573, 574, 582, 586), Vlaş Maria (E: 554, 559, 563, 568, 571, 574, 578, 579, 582, 587), Vidican Dumitru (E: 554, 558, 561, 563, 568, 571, 576, 579, 584, 585, 587), Vidican Lidia (E: 554, 559, 561, 563, 571, 574, 575, 578, 579, 584, 587, 598); clasa X-a. Brelan Mircea (1384, 385, 410, 413, 431, 433, 432, 443, 449, 464).

ORAŞUL STALIN. *Cercul de matematici* nr. *2.* Cîrstocea Cornel (E: 546, 558, 560, 563, 568, 571, 574, 575, 586, 587, 588); clasa IX-a.Gheorghe Miron (1372, 375, 378, 449, E: 505, 568, 571, 574, 576, 587), *Podeanu Corneliu* (1342, 347, 346, 372, 373, 374, 375, 378, 389, 408, 409, 411, 413, 414, 416, 432, 433, 434, 437, E: 538, 539, 563, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 576, 577, 478).

PIATRA NEAMŢ. Clasa VII. *Şcoala din Roznov. Gervescu M. Ioan* (E: 550, 551, 553. 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589); clasa X-a. Ardeleanu Margareta (1372, 377, 378, 410, 412, 413, 416, 436, 437, 441). Gheorghiu Elena (1372, 377, 386, 403, 410, 411, 413, 436, 440, 449), Iftimoaia Florica (1372, 373, 374, 383, 408, 410, 413, 414, 416, 436), Rapoţica Aurelia (1372, 384, 386, 403, 409, 410, 416, 436, 442, E: 558, 559, 560, 561, 563, 564, 567, 568, 571, 574, 586, 587, 588), Rusu M. (1372, 375, 410, 436, E: 558 559, 563, 567, 568, 571, 574, 587), Stăncescu Angela (1375, 410, 436, E: 558, 559, 563, 568, 571, 574, 587, 588).

PITEŞTI. Şcoala medie tehnică de mecanizarea agriculturii. Anul IV. Mihai St. M. Constantin (1375, 437, E: 505, 506, 510, 512, 520, 521, 536, 537, 546, 547, 554, 558, 559, 560, 561, 563, 564, 567, 568, 571, 572, 574, 578, 581, 584, 587, 588). *S. m. t. de alimentare cu apă şi construcţii comunale.* Anul II. Oprea M. Gheorghe (1431, 433, E: 561, 563, 568, 571, 574, 575, 578, 580, 584, 586, 587, 588,), Popescu Gh. Dumitru (1375, 431, 432, 449, E: 554, 558, 559, 560, 561, 563, 568, 571, 574, 578, 584, 586, 587, 588). Şcoala de 7 ani, *Oarja*, clasa VII. Nedelea A. Valeria (E: 558, 560, 563, 567, 568, 571, 574, 578, 581, 586, 588, 597). Şcoala medie de băieţi. Clasa IX-a. Dumitru T. Nicolae (1372, 378, 411, 421, 434, 439, 442, 449, 451, 465); clasa X-a. Bogaciu Valeriu (1391, 392, 395, 396, 397, 403, 404, 405, 406, 407, 408), Raducanu M. (1418, 419, 424, 449, 456, 460, 461, 457, E: 578, 586, 587, 588), *Şerb Gh. Gabriel Adrian* (1390, 391, 392, 394, 395, 396, 397, 399, 401—414, 416—423, 425—434, 436—444, P).

PLOEŞTI. Clasa VII-a. Oprescu Eugen (E: 551, 552, 555, 559, 565, 569, 574, 575, 578, 582), Salveţiu Mircea (E: 551, 552, 555, 559, 565, 578, 581, 582, 585, 586); clasa VII-a, seral. Stratulat D. Gheorghe (E: 559, 561, 563, 568, 569, 571, 574, 575 580, 586, 587, 588); Şcoala medie «I. L. Caragiale», clasa VIII. A. Constantinescu. St. Vasile. (E: 554, 557, 563, 567, 568, 571, 574, 580, 586, 587, 588), Delibaş Constantin (1372, 374, 392, 402, 403, 404, 449, E: 559, 560, 561, 564, 574, 580, 585, 586, 587, 588); clasa X-a. *Lupuţiu Ioan* (1442, 443, 445, 448, 449, 453, 454, 456, 458, 459, 460, 461, 464, 465, 467, P) *Popovici G. Iulian* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 381, 397, 400, 401, 406, 409, 410, 411, 412, 413, 415, 416, 417, 418, 419, 421, 423, 424, 425, 427, 434, 436, 438, P), *Stroe P. Radu* (1346, 350, 355, 365, 373, 386, 408, 409, 410, 411, 416, 419, 425, 426, 436, 437, 439, 442, 443, 448, 449, 451, 453, 459, 460, 461, 464, 465, 467).

PUCIOASA (Reg. Ploieşti). Clasa IX-a. *Bucur Gheorghe* (1361, 372, 381, 385, 397, 411, 412, 413, 416, 427, 433, 436, 437, 439, 442, 443, 449, 460, 465, E: 550, 551, 554, 556, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 567, 568, 569, 5670, 571, 575, 575).

RIMNICU-VILCEA. Clasa IX-a. Abagiu V. Dorel (1372, 375, 378, 383, 434, 443, 449, 464, E: 559, 561, 563, 565, 568, 569, 571, 574, 575, 576, 577, 580, 583, 586, 587, 588), Budu D. Tudor (1372, 375, 377, 378, 383, 403, 410, 416, 432, 449, 456, 458, E: 558, 559), Ioaneş O. Sorin (1383, 403, 404, 434, 443, 458, E: 563, 567, 568, 571, 574), *Ţugulea Eugen* (1358, 372, 373, 375, 378, 379, 382, 390, 392, 402, 403, 405, 409, 410, 413, 414, 416, 434, 436, 441, 449, 456, 461, 464, 465, E: 559, 563, 568, 571, 574, 576, 580, 586, 587), Sacerdoţeanu Ştefan (1373, 375, 378, 383, 434, 443, 464, E: 559, 561, 568, 571, 572, 576, 583, 586, 578, 688); clasa X-a. Cîrstoiu C. Barbu (1378, 578, 579, 386, 409, 410, 412, E: 561, 581, 588), Popa Elian (1374, 376, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 384, 486, 403, 404, 405, E: 559), Şerbana I. Ion (1460, 461, E: 558, 559, 560, 561, 563, 571, 573, 574, 587), Udubaşa G. Gheorghe (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 382, 383, 403, 432, 436, 449, 456, 458, 468, E: 558, 559, 560, 561, 563, 566, 568, 571, 574, 578, 587).

RIMNICU SĂRAT. Clasa IX-a. Curocichiu Veronica (1375, 416, 436, 449, 464, 465, E 552, 558, 559, 563, 565, 574, 580), Tudorancea Anişoara (1375, 377, 383, 403, 449, 464, E: 552, 558, 559, 568 571, 574, 575, 580, 586, 587, 588); clasa X a. Cristea R. (1372, 375, 378, 416, E: 551, 552, 554, 555, 559, 562, 563, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575), REŞIŢA. Clasa X-a. Weiss Adolf (1373, 374, 375, 376 377, 378, 379, 380, 382, 383, 392, 403, 404, 406, 407)

ROMAN. S. m. *t. de mecanizarea agriculturii*, anul IV. *Căluianu Gh. Nicolae* (1369, 370, 372, 373, 374, 375, 376 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 389, 390, 392, 393, 397, 398, 401, 403, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 415, 416, 423, 427, 431, 432, 433, 434, 436, 440, 457, 458, 459, 460, 461, 462, E: 553, 458, 559, 560, 561, 563, 565, 566, 568, 569, 570, 571, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 583, 584, 586, 587, 588), Şcoala medie clasa IX-a *Murărescu Gheorghe* (1273, 274, 276, 283, 284, 285, 287, 325, 333.

338, 339, 340, 341, 342, 343, 350, 351, 357, 358, 362, 363, 367, 372, 373, 374, 375, 382, 383, 386, 403, 405, 408, 409, 411, 412, 413, 416, 418, 419), Zaharia Gheorghe (1374, 377, 378, 379, 382, 383, 392, 403, 409, 411, 416 439).

SATU MARE. Clasa X-a. Graur Florin (1372, 375, 382, 383, 416 436, E 558, 559, 565, 567, 572, 576, 578, 581). Pop Liviu (1374 378, 383, 411, 441, E· 552, 559, 578, 585, 586).

SFINTU-GHEORGHE. Clasa X-a C. Bărgăuanu Margareta (1378, 380, 392, 408, 409, 410, 411, 436, 439, 442, E: 558, 563, 568, 571, 574, 586, 587, 588).

SIBIU. Clasa X-a. Schlesinger Toma (1373, 375, 377, 379, 380, 388, 396, 409, 412, 413, 415, 442, 464), absolvent *Uță Marin* (1408—416, 418—427, 429, 431—434, 436, 437, 439, 440, 442, 443, 449, 451, 453, 454, 456, 458, 460).

SLATINA. Clasa IX-a. Bărbulescu Marcel (1372, 375, 377, 383, 386, 402, 403, 408, 418), Constantinescu C. Teodor (1373, 378, 381, 410, 416, 422, 436, 441, 442, 449), Cioantă Victor (1375, 377, 416, 436, E: 563, 668, 571, 574, 578, 580, 586, 588), Dumitrașcu I. Ilie (1379, 380, 412, 415, 416, 436, 442, 443, 449, 458), Radu Laurențiu (E: 561, 563, 568, 569, 570, 571, 574, 576, 579, 583, 584, 586, 587, 588), Zaharia A. Traian (1372, 373, 375, 377, 379, 383, 402, 403, 409, 416, 449, E: 559, 563, 565, 569, 571, 574, 575, 580, 586); clasa X-a. Antonescu Păun (1375, 377, 380, 383, 402, 407, 410, 412, 413, 415, 416, 432, 434, 436, 437, 442, 443, 449, 458, 465, P), Boghian Dragoș (1373, 375, 376, 377, 378, 379, 381, 383, 403, 408, 411, 416, 436, E: 558, 560, 561, 563, 568, 570, 571, 574, 575, (Ene Vasile (1372 374. 375, 377, 378, 410, 412, 418, 432, 441, 449, E: 565) Ghergu N. Ion (1410, 412 414 416, 443, E: 578, 580, 586, 587 588).

SLĂNIC. (Reg. Ploiești) Clasa IX-a. Ionescu Ion (1377, 386, 412, 432, 443, 449, E: 558, 561, 563, 564, 566, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 586, 587, 588).

TIRGU OCNA. Radu Constantin (1373, 375, 377, 380, 382, 383, 413, 416, 436, 449).

TIRGU MUREȘ. Școala medie nr. 3, fete. Clasa VII-a. Matei Didina (E: 558, 559, 563, 566, 567, 568, 572, 573, 574, 587), Neagoe Olimpia (E: 558, 559, 563, 566, 567, 568, 572, 573, 574, 587),

TECUCI. Clasa X-a. *Radu V. Alexandru* (1372, 373, 374, 377, 379, 382, 392, 410, 412, 415, 416, 419, 431, 432, 434, 436, 440, 441, 448, 449, 460, 464, 465).

TIMIȘOARA. Studenți. Bercea I. Gheorghe (« Asupra operațiilor cu puncte » N), Isfan S. Cornel (1408, 409, 411, 413, 416, 423, 434, 436, 437, 442, 449, 459, E: 563, 565, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 581, 582, 584, 586, 587, 588, 589,), *Pigli Traian* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 388, 392, 395, 403, 404, 405); clasa VII-a. Coșereanu Radu (E: 534 536, 537, 540, 552, 559, 564, 565, 567, 570 572. 578, 579, 580, 585, 586, 587, 588); clasa VIII-a. Mihăileanu N. Constantin (1403. 404, 426, 474, E: 553, 561, 566, 567, 572, 573); clasa IX-a. Cismariu Ionica (1379, 408, 411, 436, 442, 449, E: 563, 568, 571, 574, 575); clasa X-a. Braia Ioan (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 408, 409, 410, 413, 416, 436, 439), Brand Iosif (1372, 374, 375, 377, 380, 383, 403, 410, 413, 416, 436).

TURNU MĂGURELE. — Clasa IX-a. Niculescu M. Iulian (1375, 378, 390, 460, E: 558, 559, 560, 561, 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 576, 577, 579, 580, 586, 587, 588).

URLAȚI. — (Reg. Ploești) Școala medie. Clasa IX-a Iorgulescu Alexandru (1375, 383, 403, 416, 436, 449, 460, E: 558, 559, 565, 567, 572, 586).

VASLUI. — Clasa X-a. *Stănescu Viorel* (1273, 274, 275, 276, 284, 292, 296, 297, 300, 310, 312, 317, 318, 319, 320, 325, 326, 333, 335, 336. 337, 338, 339, 340, 341, 342, 416, 431, 436, E: 486 —490, 493, 494, 497, 499, 505, 508, 510, 512, 513, 515, 518, 519, 521—532, P).

ZALĂU. — Clasa IX-a. Farcaș Beniamin (1377, 386, 407, 449, 451, E: 523, 524, 554, 558, 559, 584); Clasa X-a. Roman Vasile (1442, 449, 460, E: 525 528, 532, 576, 578, 579, 580, 586, 587, 588); Școala medie tehnică de cărbune. anul IV. Opriș A. Ioan (1374, 377, 379, 380, 382, 409, 416, 436, 438, 441, 459, 460, 461, E: 563, 566, 568, 571, 574, 575, 580, 586, 587, 588).

EVIDENȚIAȚI*)

In cursul lunii martie 1955 s-au evidențiat prin rezolvări de probleme din Gazeta Matematică și Fizică — seria B, tovarășii din localitățile care încep cu literele A — O, după cum urmează:

Cristea I. Ion (clasa IX-a, Constanța), *Rus A. Ioan* (clasa X-a, Oradea), *Grosu A. Florin* (clasa IX-a, Galați), *Guiașu Silviu* (clasa X-a, Oradea), *Duduica Radu* (clasa IX-a, s.m.17, București), *Iordache I. Dan* (clasa X-a, Constanța), *Dinu Gh. Gheorghe* (anul III electrotehnică, Craiova), *Ciurdea Eugen* (clasa X-a, Galați), *Breban Mircea* (clasa X-a Oradea), *Preda Adrian* (clasa X-a, Curtea de Argeș), *Torjescu Florin* (student, București), *Dumitrescu I. Aurel* (clasa X-a, Curtea de Argeș), *Chimoiu I. Dumitru* (Balș, Craiova), *Bărbuică Nicolae* (anul III electrotehnică, Craiova), *Mitroaica I. Gheorghe* (clasa X-a, Calafat), *Mișcol Mircea* (clasa X-a, Giurgiu), *Popescu Paul* (anul II, măsurători terestre, București), *Vrăjitoru Mihai* (clasa VII-a, Aiud), *Stanciu Alexandru* (clasa X-a, s.m.20, București), *Hogaș Constantin* (clasa X-a, Iași), *Țîru Emil* (clasa X-a, Focșani), *Pitucea Eugen* (anul *III* electrotehnică, Craiova), *Popa Gh. Stancu* (cșasa X-a, Corabia), *Trif Miron* (Bordești, Arad), *Albăstroiu Petre* (student, București), *Bădescu E. Marcel* (clasa X-a, s.m.4 « A. Vlaicu », București), *Lazăr Edith*, (studentă București), *Dumitrescu Badea Ovidiu* (clasa X-a, s.m.4 « A. Vlaicu, » București), *Cuperman Vladimir* (clasa X-a, s.m. 20, București), *Ceaușel I. Gheorghe* (Vadul Poștii,Buzău), *Vasilescu Aurel* (clasa X-a, Călărași), *Chelebeu Traian* (clasa X-a, Oradea) *Zaharescu Marius* (student, București), *Popovici Radu* (clasa X-a, s.m.18, București), *Neguț Gh. Nicolae* (absolvent, București), *Nicolescu Dan* (clasa IX-a, Călărași), *Mitrofan I, Gheorghe* (absolvent, Caransebeș), *Mureșan Tr. Augustin* (student, Cluj), *Stepan Ionel* (anul III, școala hidrotehnică, Constanța), *Răducanu V. Gheorghe* (anul II. școala de drumuri, Craiova), *Buruiană Gheorghe* (student, Galați), *Bigan V. Stan* (clasa X-a, Giurgiu), *Pivniceru Radu* (clasa X-a, Galați), *Parepa C. Grigore* (absolvent, Mizil), *Ioniță Tudor* (anul IV, Orașul Stalin), *Bercovici Izu* (Focșani), *Porțeanu Mircea* clasa X-a, Oradea), *Desculțu Traian* (Alexandria), *Mazilu M. Constantin* (clasa X-a, Călărași), *Pleniceanu Ion* (clasa X-a, Calafat), *Miu Gh. Filipoiu* (student, f. f., București), *Schileru I. Dinu* (clasa X-a, s.m.1, București), *Ivănceanu Tatiana* (s.m. 22, București), *Stănășilă Octavian* (clasa X-a, s.m.4, « A. Vaicu », București) *Țibuleac Florin* (clasa VIII-a, Hîrlau), *Rădoi D. Mircea* (clasa X-a s.m.4 « A. Vlaicu », București *Torsan Ilie* (Alba Iulia), *Petre T. Petre* (clasa X-a, s. m. 4, « A. Vlaicu », București), *Grosșoreanu T. Gelu* (clasa VI-a, sc. de 7 ani nr. 7, București), *Cososki Florin* (clasa X-a, Botoșani).

* * *

Pînă la 1 aprilie 1955 s-au primit cîte cel puțin 10 probleme bine rezolvate din problemele propuse în ultimele 4 numere, în « Gazeta Matematică și Fizică » seria B, și probleme propuse (P), note, articole, dela tovarășii din localitățile care încep cu literele A—O:

AIUD. — Clasa VII-a. *Vrăjitoru Mihai* (1432, 493, 494, 495, E. 551, 552, 553, 554, 555, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 566, 567, 568, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588); clasa X-a. Florea Ștefan (1372, 374, 375, 377, 379, 380, 385, 402, 403), Vrăjitoru Dan (1392, 406, 408, 409, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 423, 424, 426, 431, 432, 433, 434, 436, P).

ALBA IULIA. — Clasa IX-a. Făgădaru Ion (1475, 493, 516, 522, 531, E. 587, 588, 589, 592, 607, 608); *Absolvent, Torsan Ilie* (1410, 412, 442, 465, 473, 474, 475, 479, 485, 486, 492, 495, 496, 498, 513, 520, 521, 524, 526, 527, 532, 533, 534, 536, 537, 553, E. 580, 586—588, 597—603, 606, 608).

---

*) Evidențiații pe luna martie 1955 și lista rezolvitorilor din localitățile care încep cu literele P—Z se va publica în numărul următor al G.M.F.—B.

ALEXANDRIA. — *Absolvent Grigore Emil* (1373, 375, 377, 379, 409, 411, 416, 436, 442, 443, 453, 465, 472, 474, 475, 478, 479, 486, 493, 494, E. 559, 563, 564, 568, 570, 571, 575, 576, 578, 586, 587, 588), *Desculţu Traian* (1409, 411, 416, 436, 442, 449, 460, 465, 472—476, 478, 479, 481, 482, 486, 494, 515, 516, 517, 522, 523, 526, 527 528, 529, 534, E. 576, 577, 578, 579, 586, 587, 588, 592).

ARAD. — *Şcoala medie de textile*, anul II. Criştiu Ioan (1372, 373, 375, 382, 384, 416, 472, E. 563, 568, 578), Dîrlea F. Ştefan (1432, 493, 494, 495, E. 559, 569, 578, 579, 587, 588); clasa IX-a Blidişel Ioan (E. 563, 568, 569, 578, 579, 580, 586, 587, 588), Brehorin Gheorghe (1416, 432, 436, 449, 460, 461, E. 563, 574, 582, 586, 587, 588), Babec Aurel (1409, 411, 413, 416, 431, 432, 433, 436, 438, 439, 449, 456), Haber Gheorghe (1409, 411, 413, 416, 431, 432, 433, 436, 438, 439), Luttwak Toma (1409, 411, 413, 416, 424, 432, 436, 438, 449, 456, 461), Tudor Grigore (1411, 413, 416, 424, 432, 433, 436, 439, E. 563, 568, 574), Rotar Gheorghe (1409, 411, 413, 416, 432, 436, 438, 439, 449, 461, E. 576, 577); clasa X-a. Borza R. Florin (1371, 378, 381, 384, 416, 436, E. 558, 559, 560, 563, 578), Brneac Doina (1410, 436, 442, 449, 472, 474, 475, 481, 498, 1506), Cojocariu Elena (1472, 473, 474, 475, 479, 482, 483, 498, 499), Ciungan Silvia (1436, 440, 472, 473, 474, 475, 477, 479, 482, 483, 485, 498, 511), Delamarina Sultănica (1472, 474, 475, 479, 481, 482, 483, 486, 498, 506), Furtuna Ileana (1472, 473, 474, 475, 479, 482, 483, 485, 498, 499), Jeba Simona (1472, 473, 474, 475, 479, 482, 483, 485, 498, 506), Herschkovits Heinrich (1408, 409, 410, 413, 416, 424, 436, 438, 439, 440), Farco Maria (1376, 378, 382, 436, 442, 472, 473, 474, 475, 479, 482, 483, 498, 506), Popescu Gheorghe (1408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 436, 439, 440, E. 563, 565, 566, 568, 571, 574), absolvent *Bordeşti. Trif Miron* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 403, 404, 405, 441, 442, 443, 449, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 465, 467, 472).

BACĂU. — Clasa VI-a. Postolache C. Dan (E. 554, 561, 562, 571, 574, 575, 580, 586, 587, 588); clasa IX-a. Anton Dumitru (1374, 377, 378, 379, 383, 403, 411, 436, 449, E. 558, 559), Clapon Virgil (1378, 411, E. 558, 559, 563, 567, 568, 572, 574, 577, 581, 587, P), Ionescu Gheorghe (1375, 378, 436, E. 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 567), Manole Pavel (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 389, 403, 404, 405, 418, E. 558, 559, 560, 561), Zilberman Mircea (1449, 472, 474, 475, 493, 495, E. 582, 583, 585, 586, 587, 588); clasa X-a. Palaghiţă I. Ştefan (1408, 410, 419, 442, 449, 465, 467, 472, 475, 481, 483, 486, 498, 509), Vasilache Mihail (1436, 441, 449, 460, 472, 473, 475, 479, 486, 498).

BAIA MARE. — Profesor Durlea Mihai (« Evoluţia metodelor de determinare a căldurii specifice a corpurilor solide »). Clasa VIII-a. Pop I. Mihai (E. 558, 559, 563, 568, 571, 574, 575, 586, 587, 588); clasa IX-a Babici Valer (1373, 449, 451, 486, E. 582, 584, 586, 587, 588, 590), Conţiu Ioan (1411, 416, 436, 449, E. 553, 558, 559, 560, 561, 562, 564, 568, 571, 574, 575, 580, 585, 586, 587); clasa X-a. Dumitrescu Carpat (1416, 436, 472, 474, 479, 481, 482, 486, 493, 494, 496, 515, 516, 526, 531, 532, E. 563, 568, 571, 572, 574, 608), Vaida Ioan (1410, 411, 416, 436, 449, 472, 473, 474, 478, 479, 481, 485, 486, 493, 494, 495, 520, 522, 526, E. 563, 568).

BALŞ (Craiova). — *Absolvent. Chimoiu I. Dumitru* (1372—1375, 377—383, 409—413, 436, 440, 441, 442, 449, 459, 460, 461, 472, 474, 475, 476, 478—481, 484—486, 493—496, 498, 499, 513, 518, 520, 521, 522 524, 526, 527, 529, 531, 532, 533, 536, E. 552, 558, 559, 561, 577, 578, 592, 597, 598, 600, 601, 602, 605, 607, P); clasa IX-a. Nicolăescu Marilena (1472, 474, 475, 481, 482, 490, 499, 512, 513, 524, 526, 528, 529, 530).

BÎRLAD. — Clasa X-a. Copciac Valeria (145, 441, E. 558, 561, 580, 582, 586, 587, 599), Simionescu R. Alexandru (1372, 374, 375, 377, 378, 382, 383, 403, 404, E. 559).

BOLINTINUL DE VALE (Bucureşti). — Clasa X-a. Iorga Sergiu (1373, 375, 377, 378, 383, 402, 403, 409, 411, 413, 416, 436, 449, 460, E. 554, 559, 560).

BOTOŞANI. — Clasa IX-a. Lelescu Neculai (1397, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 432, 436, 449, 451, 462, 465, 472, 474, E. 554, 558, 559, 561, 568, 569, 574, 575, 585,

586, 587, 588), Tudose C. Maria (1449, E. 559, 561, 568, 574, 580, 582, 586, 587, 588); clasa X-a. Burcă Pantelimon (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 381, 383), Baban Mihai (1372, 373, 375, 376, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 385, 397, 403, 404), *Cososki Florin* (1373, 379, 380, 381, 383, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 418, 431, 432, 434, 436, 441, 442, 449, 451, 462, 464, 465, E. 554, 563, 565, 568, 569, 570, 571, 574, 575, 578, 579, 580, 584, 585, 586, 587, 588), Ciuperca D. Theodor (1372, 373, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 383, E. 558, 560, 561, 586, 587, 588), Dumitriu Zamfir (1410, 412, 440, 442, 449, 472, 481, 485, 486, 494, 506), Ene Mihai (1372, 374, 375, 376, 377, 378, 380, 381, 383, 385, 386, 397, 403, 404, 407), Herşcovici Iancu (1372, 373, 374, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 385, 409, 410, 411, 416, 418, 424, 436, 442, 443, 449, 459, 461), Hoişie Rubin (1436, 442, 472, 474, 475, 482, 483, 486, 493, E. 567, 569, 570, 574, 582), Lupu Mihai (1372, 374, 377, 379, 380, 382, 383, 385, 404, E. 559), Sapira N. Suhar (1436, 449, 472, 474, 482, 483, 486, 492, 494, E. 570), Sulim Saly (1410, 413, 414, 442, 449, 464, 472, 473, 474, 475, 493, 494, 496, 526, 546, E. 592, 600, 603, 605, 608), Ştefan Vasile (1397, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 449, 451, 462, 465, 472, 474, 475, 483, 493, E. 578, 579, 584, 586, 587, 588), Toma E. Ştefan (1465, 472, 474, 475, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 506, E. 568, 571, 574, 577, 578, 586, 587, 588), Vamanu Elena (1440, 449, 461, 472, 473, 475, 478, 481, 483, 485, 493, 494, 506), Vartolomei Mihai (1372, 373, 375, 377, 378, 379, 436, 442, 462, E. 562, 563, 571), absolvent Cuprian I. (1474, 475, 479, 482, 484, 485, 486, 494, E. 558, 559).

BRĂILA. — Clasa X-a. Buzea Radu (1374, 378, 379, 382, 383, 384, 385, 386, 388, 403, 404, 405, 406, 407, 416, 418, 436), Ganea Mihail (1372, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 383, 410, 414, 416), Gagu Valeriu (1372, 374, 375, 377, 378, 410, 416, 437, 449), Melica, George Axinte (1372, 373, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 386, 388, 403, 405, 407, 436, 437, P), Mocanu Gheorghe (1373, 376, 379, 380, 381, 382, 386, 388, 392, 403, 404), Patraş S. Viorel (1372, 374, 375, 377, 378, 383, 403, 404, 416, 418, 432, 436).

BREAZA (Ploieşti). — *Şcoala medie « Dimitrie Cantemir »*. Clasa VIII-a. Bălănescu Florin (1374, 377, 383, E. 568, 569, 571, 574, 575, 586, 588), Florea Ilie (E. 553, 559, 560, 561, 568, 569, 571, 574, 575, 588, 586, 587), Mancu Florin (1372, 374, 377, 383, E. 553, 559, 560, 561, 563, 568, 569, 571, 575, 586, 587, 588); clasa IX-a. Cletea Aurel (1374, 377, 378, 383, 386, 416, 418, 419, 436, E. 559, 560, 561, 563, 565, 568, 572, 574, 575).

BUCECEA (Botoşani). — Clasa VI-a. Ionescu Doina (E. 561, 563, 566, 568, 573, 574, 580, 582, 586, 587).

BUCUREŞTI. — Studenţi. *Albăstroiu I. Petre (Fac. Mine)* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 392, 402, 403, 404, 406, 408, 410, 411, 414, 415, 416, 418, 423, 426, 436, 437, 438), Crăciun V. Constantin (Fac. Matematici) (1372, 374, 375, 377, 378, 436, 439, 472, 474, 475, 479, 480, 482), *Lazăr Edith (Fac. Matematici)* (1372, 373, 375, 377, 378, 379, 403, 408, 409, 410, 411, 413, 416, 419, 436, 439, 442, 449, 464, 472, 474, 475, 477, 478, 482, 483, 485, 486, 493), Iosifescu V. Marius (Fac. Matematici) (« Asupra rezolvării ecuaţiei de gradul al III-lea »), *Miu Gh. Filipoiu* (Fac. Matematici) (1373, 374, 375, 379, 382, 383, 385, 392, 442, 443, 449, 458, 460, 464, 465, 471, 472, 473, 474, 475, 479, 481, 482, 483, 485, 486, 493, 496, 498), Stoka Marius (Fac. Matematici) (« Asupra ecuaţiei a cos x + b sin x = c »), Pîrvu H. Viorel (Fac. Arhitectura) (1411, 416, 423, 427, 428, 473, 474, 475, 480, 482, 483), Pandele Constantin (Fac. Electrotehnica) (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 392, 397, 406), Marin St. Drăgan (Fac. Chimie) (1408, 409, 410, 411, 413, 414, 416, 437, 449, 451), *Torjescu Florin (Fac. Mecanică)* (« Sume de funcţii trigonometrice ale arcelor în progresie aritmetică », 1392, 396, 397, 403, 404, 405, 406. 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 419, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 434, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 447, 449), *Zaharescu Marius* (Institutul Politehnic) (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 388, 392, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 409, 410, 411, 412,

413, 414, 415, 416, P), Popescu I. Mihail (Institutul Hidrotehnic) (« Generalizări ale unor probleme de geometrie »).

Şcoala medie nr. 1 « N. Bălcescu ». — Clasa IX-a. Dogaru C. Mihai (1372, 373, 374, 375, 379, 416, E. 558, 559, 563, 568, 570, 571, 574), Basarab Şerban (1375, 378, 383, 390, 392, 397, 401, 403, 404, 405, 407, 408, 409, 411, 412, 416, 424, 434, 436, 443), Ioanid Gh. Iordan (1409, 436, 442, 443, 473, 474, 475, 479, 481, 485, 486, 492, 494, 522, 526, 532, E. 560, 563, 567, 568, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 586, 587, 588), *Schileru I. Dinu* (1413, 416, 449, 464, 472, 473, 475, 476, 478, 479, 480, 483, 485, 493, 510, 517, 523, 532, 536, 538, 540, 542, 545, 550, 555, E. 567, 568, 577, 584, 589, 592, 593, 594, 595, 597, 600, 603, 604, 606, P); clasa X-a. Lupaş Tiberiu (1372, 376, 377, 378, 379, 384, 417, 465, 474, 475, 493, 494, 495), Popa R. Gheorghe (1372, 373, 374, 375, 379, 381, E. 559, 563, 568, 570 571, 574.

Şcoala medie nr. 2. Clasa VIII-a. Teodorescu Nicolae (1471, 474, 476, 478, 479, 481, 482, 484, 486, 490, 491, 493, 496, 498); clasa IX-a. Popa Adrian (1372, 377, 378, 383, 397, 402, 403, 449, 460, 465, E. 559, 580, 581, 582), Rosen Juju (1374, 377, 378, E. 558, 559, 560, 561, 563, 568, 571, 574, 575, 586, 587, 588).

Şcoala medie nr. 4 de băieţi « Aurel Vlaicu », Griviţa Roşie. Clasa VIII-a. Ionescu Dumitru (1441, 528, E. 580, 584, 592, 600, 601, 602, 607, 608), Stamatoiu Petre (1434, 474, 493, 495, E. 536, 547, 565, 569, 582, 583, 592, 597, 598, 600, 601, 602, 607, 608), Zvorişteanu Alexandru (1407, 461, 534, E. 525, 538, 555, 557, 600, 601, 603, 608), Vasilescu Gheorghe (1393, 441, 461, E. 537, 557, 566, 577, 578, 579, 586, 587, 588, 601). Mănescu Lucian (1362, 460, 461, 510, E. 540, 576, 577, 578, 579, 601, 608). Clasa IX-a. Blidaru Lucian (1520, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, E. 592, 597, 602), Russo Dan (1474, 475, 478, 484, 485, 516, 518, 522, 527, 528), Rădulescu Constantin (1493, E. 536, 569, 582, 583, 592, 597, 601, 602, 607, 608), Şteflea Nicolae (1449, 451, 464, 513, 515, 517, 540, E. 563, 565, 566, 573, 567, 568, 571, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 582, 585, 586, 587, 588, 595, 596, 597, 599, 601, 603, 608), Nistreanu N. Valeriu (1416, 432, 436, 437, 449, 474, 475, 478, 482, 484, 485, 486, 493, 494, 495, 496, 497, E. 526, 528, 529, 532, 563, 567, 568, 569, 571, 573, 574, 575, 576, 578, 580, 584, 586, 588, 592, 594, 597, 602, 603, 605, 606, 608, P). Clasa X-a. *Bădescu E. Marcel* (1381, 386, 406, 425, 459, 460, 478, 480, 481, 485, 493, 498, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 528, 529, 531, 532, 534, 536, 537, 538, 540, 543, 546, 553, E. 552, 554, 558, 559, 563, 567, 568, 571, 572, 574, 576, 578, 581, 586, 587, 588, P), Maria Pavel (1372, 374, 377—386, 404, 449, 453, 464), Anastasiu Gheorghe (1409, 416, 472, 474, 478, 480, 485, 493, 530, 532), Bazarea Toma (1417, 472, 513,515, 526, E. 563, 565, 568, 570, 571, 574, 586, 587, 588, 608), Calciu Traian (1372, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 524, 526, 531, E. 592, 597, 600, 608), Cristea Ionel (1322, 373, 375, 377, 378, 380, 381, 382, 409, 413, 416, 436), *Dumitrescu Badea Ovidiu* (1331, 333, 349, 354, 360, 365, 370, 374, 403, 406, 419, 441, 456, 457, 459, 460, 468, 482, 510, 513, 515, 516, 520, 521, 523, 525, 526, 527, 529, 530, 532, 533, 536, 538, E. 596, 606, P), Dănescu Stelian (1372, 513, 515, 518, 520, 521, 524, 526, 531, 532, 540, E. 592, 597, 600, Oancea Ion 608), Dinescu D. Radu (1378, 404, 436, 446, 461, 474, 483, 520, 558, E. 558, 559, 571, 596), (1372, 513, 515, 516, 518, 520, 524, 526. 527. 531, 532, E: 592, 597, 606), Spătaru Ion (1494, 508, 511, 512, 513, 515, 516, 520, 521, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 534, 536, 546, 549, 555, E: 592, 597, 600, 606, 608), Hanganu Ştefan (1498, 513, 515, 520, 524, 525, 526, 531, 532, E. 571), Iovan Dumitru (1479, 513, 515, 520, 526, 527, 528, 530, 531, 532, 534, 578, 592, 596, 597, 598, 600, 601, 606, 608), Jambori Anghel (1416, 449, 453, 464, 472, 474, 480, 481, 482, 483, 513, 518, 522, 524, 526, 529, 532), Movanu Radu (1378, 383, 413, 513, 515, 526, 528, 553, E. 592, 597, 606, 608), Georgian Dan (1513, 515, 517, 518, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 534, 536, 546, 555), Stănăşilă Octavian (1476, 479, 480, 482, 483, 485, 486, 487, 500, 506, 508, 511, 513, 515, 517, 518, 520, 522, 526, 528, 532, 534, 536, P), *Petre T. Petre* (1379, 380, 472, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 493, 494, 496, 498, 513, 516, 520, 521, 522,

524, 526, 532, 536, E. 592, 597, 600, 601, 602, 607, 608), Stoicescu Gheorghe (1393, 409, 416, 472, 475, 476, 478, 480, 482, 483), *Rădoi D. Mircea* (1372, 377, 378, 380, 409, 416, 472, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 485, 486, 493, 494, 498, 513, 516, 517, 520, 522, 524, 526, 527, 532, 533, 536), Ştefan Grigore (1377, 378, 406, 459, 513, 515, 516, 526, 527, E: 601, 608), Stoian Cornel (1373, 374, 376, 378, 379, 380, 382, 409, 436, 451, 453, 472, 474, 483), Voicu Constantin (1373, 377, 409, 416, 436, 449, 465, 472, 474, 475, 478, 480, 481, 482, 485, 501, 506, 513, 515, 525, 526, 527, 531), Viscopoleanu Octavian (1416, E: 563, 567, 568, 572, 574, 584, 586, 587, 588), Vraciu Petre (1372, 374, 376, 378, 379, 382, 409, 416, 449, 451, 453, 463, 472, 474, 475, 478, 481, 482, 483, 486, 513, 515, 526, 532).

Şcoala medie nr. 5. Clasa X-a. Şerbescu M. Alexandru (1375, 409, 449, 472, 474, 475, 477, 478, 480, 481, 482, 483, 486, 491, 493, 494, 495, 498, 499).

Şcoala medie nr. 6. Clasa IX-a. Ieremia I. Mircea (1433, 449, E. 552, 559, 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574, 578, 588); clasa X-a. Popovici I. Radu (1377, 381, 383, 406, 408, 472, 477, 482, 483, 486, 489, 493, 509), Ştefănescu Vladimir (1409, 410, 411, 412, 413, 416, 441, 443, 448, 460).

Şcoala medie nr. 7. Clasa VI-a. Groşforeanu Gelu (1449, E. 557, 559, 561, 563, 564, 568, 569, 571, 574, 577, 579, 580, 582, 586, 587, 588, 591, 592, 594, 597, 607, P); clasa X-a. Stegăroiu Radu (1372, 373, 374, 375, 377, 379, 381, 382, 383, 384, 385, 416).

Şcoala medie nr. 8. Clasa VIII-a. Gheţu P. Ioana (1372, 374, 381, 384, 389, 396, 408, 437, 458, E: 564, 565, 569, 580, 584, 588, 589, 590).

Şcoala medie nr. 10. Clasa IX-a. Nicoară Nirvana (1372, 374, 377, 378, 379, 382, 383, 385, 386, 403, 404), Nicolăescu Silvia (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 385, 386).

Şcoala medie nr. 11. Clasa X-a. Donciu Mihai (1401, 442, 449, 465, 468, 472, 474, 475, 481, 485, 486), Mihăilescu Constantin (1380, 381, 382, 407, 457, 459, 460, 461, 462, E: 550, 551, 552, 554, 558, 559, 560, 561).

Şcoala medie nr. 13. Clasa IX-a. Caragea Dimitrie (1373, 408, 409, 410, 411, 412, 418, E: 563, 564, 565, 568, 569), Dobre Ion (1408, 409, 411, 414, 416, 432, 434, 436, 449, 459, 462, E: 564, 565, 567, 568, 569, 574, 575, 578, 579, 581, 584, 586, 587, 588), Saganai A. Nusfet (1409, 412, 416, E: 563, 564, 565, 566, 567, 568, 572, 573, 574, 575); clasa X-a Manea I. Mihai (E: 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 584, 585, 586, 587, 588, P).

Şcoala medie nr. 15. Clasa VI-a. Chioralia Gabriela (E: 563, 564, 568, 569, 571, 574, 575, 582, 586, 587, 588); clasa IX-a. Delcescu Rodica (1411, 412, 416, 436, 443, 449, 453, 458, 464, 467, E: 559, 576, 577, 578) clasa X-a. Stroe Lăcrimioara (1372, 374, 376, 377, 381, 403, 474, 475, 481).

Şcoala medie nr. 16. clasa IX-a. Custa Mariana (1377, 404, 409, 416, 436, E: 558, 559, 563, 568, 574), Crămărescu Rodica (1374, 375, 397, 411, 412, 416, 436, 449, E: 563, 567, 568, 571, 574, 586, 587, 588).

Şcoala medie nr. 17. Clasa IX-a *Duduica Radu* (1464, 467, 470, 473, 474, 475, 476, 478, 480, 481, 482, 484, 485, 486, 489, 490, 491, 493, 494, 496, 498, 499, 1502, 503, 504, 508, 509, 510, 511, 513, 515, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 533, 534, 536, 550, 558), Harnic Victor (1372, 378, 412, 413, 416, 418, 436, 443, 464, 467, E: 564), Iosif Gheorghe (1372, 375, 386, 389, 416, 423, 439, 464, 465, E: 551, 553, 563, 568, 575, 586, 587, 588, 590); clasa X-a. Asnaş S. Dan (1410, 412, 416, 423, 434, 436, 437, 440, 441, 442, 443, 449, 461, 468), Caliman George (1372, 373, 374, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 389), Ghisibel Adrian (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 389, 416, 433, 449, E: 555, 561, 578, 580, 588), Marinescu Nicolae (1372, 374, 377, 378, 379, 381, 383, 385, 403, 404, 405, 409, 411, 415, 442), Ozi Ioe (1373, 374, 375, 377, 378, 379, 449, E: 558, 560, 561, 576, 580, 588).

Şcoala medie nr. 18. Clasa X-a. *Popovici I. Radu* (1377, 381, 383, 406, 408, 415, 551, 472, 474, 475, 477, 478, 480, 482, 483, 486, 489, 493, 495, 499, 509, 510, 513, 515, 520,

522, 527, 531, 533, E: 570, 592, 595, 597, 601, 602, 603, 606, 607, 608), Ştefănescu Dan (1372, 373, 375, 376, 378, 379, 381, 382, 392, 416, 436, 472).

Şcoala medie nr. 19. Clasa IX-a. Nicolau C. Ileana (1437, 460, E: 575, 576, 577, 578, 579, 581, 583, 585, 587, 588, 589).

Şcoala medie nr. 20. Clasa VIII-a. Stănescu I. Corneliu (1474, 529, 534, 558, 586, 587, E: 580, 592, 597, 599, 601, 608); clasa IX-a. Ene Ion (1372, 374, 375, 378, 381, 383, 403, 408, 409, 416, 436, 445, 458, 465, E: 558, 560,-571, 580, 584), Necula Aurel (1375, 377, 378, 409, 416, 436, E: 548, 574, 580, 584), Puiu Tiberius (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 390, 397, 403, 405, E: 551, 552, 553, 554, 558, 559, 560, 561, 562); clasa X-a. Bunea C. Dan (1376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 409, 410, 411, 416, 436, 441, 442), *Cuperman Vladimir* (1373, 375, 379, 380, 382, 383, 386, 396, 403, 404, 409, 410, 411, 413, 416, 436, 437, 449, 453, 464, 465, 473, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 485, 486, 493), Matei Ion (1375, 436, 449, 472, 474, 475, 477, 493, 494, E: 558, 559, 574, 575), Moţoc Ioan (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 385, 389, 402, 408, 409, 410, 411, 416, 434, 436, 464, 465), Popescu Jean (1449, 472, 475, 479, 481, 482, 487, 493, E: 559, 563, 568, 571, 574, 584, 586, 587), *Stanciu Alexandru* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 403, 409, 410, 411, 416, 436, 441, 442, 449, 472, 473, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 491, 493, 495, 497, 498, 499), Pavel G. Adrian (1408, 409, 410, 411, 414, 416, 436, 440, 442, 449, 486).

Şcoala medie nr. 21. Clasa VIII-a. Demayo Adriana (1449 E: 569, 572, 575, 578, 580, 585, 586, 587, 588).

Şcoala medie nr. 22 fete. Clasa VII-a. *Ivănceanu Tatiana* (1460, 471, 474, 485, E: 551, 554, 558, 559, 563, 564, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 580, 581, 586, 587, 588, 592, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 607, 608), Butoi Mihaela (E: 564, 592, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 607, 608, 1456, 471, 474, 485, 542).

Şcoala medie nr. 23. Clasa VIII-a, Cociu M. Basarab (1431, 432, 433, 449, 486, E: 563, 565, 568, 571, 572, 575, 586, 587, 588), Dumitriu Nicolae (1468, 486, E: 559, 563, 568, 569, 574, 578, 580, 585).

Şcoala medie tehnică « Iosif Rangheţ ». Anul III. Fulga Dumitru (1374, 377, 379, 416, 432, 436, 444, 449, 459, 460, 461, E: 558).

Şcoala medie tehnică de mecanică nr. 2. Absolvent *Neguţ G. Nicolae* (1409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 431, 432, 433, 436, 440, 441, 442, 443, 449, 453, 459, 460, 461, 462, 465, 472, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 495, 496, 497, 499, 504, 505, 506, 509, 511).

Şcoala medie tehnică de construcţii, anul IV. Fomov Mihai (1493, 494, 495, E: 550, 563, 566, 567, 568, 570, 571, 572, 573, 575, 580, 586, 587, 588, 589).

Şcoala medie tehnică de măsurători terestre. Anul II. *Popescu Paul* (1380, 396, 418, 421, 434, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 483, 486, 491, 493, 495, 498, 499, 502, 504, 513, 514, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, E: 592, 593, 594, 596, 597, 598).

Şcoala de 7 ani nr. 119. Clasa VII-a. Tohăneanu Florin (E: 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574, 576, 578, 579, 580, 581, 586, 587).

Şcoala de 7 ani nr. 148. Clasa VII-a. Oprica I. Mihail (E: 558, 559, 561, 567, 571, 572, 574, 575, 576, 578, 579, 580, 586, 587).

BUZĂU. Clasa VIII-a. Suciu A. Tiţa. (1493, 513, 515, 524, 526, 527, 528, 530, 531, E: 560, 563, 564, 566, 568, 573, 574, 580, 582, 584, 586, 587, 588, 592, 597, 600, 601, 605, 607, 608); clasa IX-a. Barbulescu N. Viorica (E: 563, 564, 566, 567, 574, 580. 586, 587, 588, 608), Dinca Antoaneta (1403, 449, [E [559, 561, 563, 565, 568, 574, 586, 587, 588), Fotescu Mariana (E: 526, 527, 530, 531, 560, 563, 564, 566, 568, 571, 574, 586, 587, 588); clasa X-a. Cristea Pompiliu (1403, 410, 411, 412, 419, 423, 432, 436, 440, 460, 465, 472, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 499), Ionescu Mariana (1396, 436, E: 559, 561, 563, 566,

568, 571, 574, 584, 586, 587, 588), absolvent com. Vadul Paşii, *Ceauşel I. Gheorghe* (1409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 431, 432, 433, 436, 440, 441, 442, 443, 449, 453, 459, 460, 461, 462, 465, 472, 474, 475, 479, 481, 483, 484, 485, 494, 504, 506, 509).

CALAFAT. Clasa VIII-a. Ghinea I. Petru (1372, 377, 383, 493, E: 554, 558, 559, 560, 561, 563, 568, 569, 574, 575), Pascu Ştefan (1372, 377, 383, 449, E. 559, 561, 563, 568, 569, 571, 574, 582), Clasa X-a. Caraş Nicolae (1412, 443, 449, 472, 474, 478, 481, 483, 486), Ispir Ştefan (137, 377, 379, 381, 383, 403, 404, 436, 472, 474, 475, 478, 481, 483, 485, 486, 493, 494, 499, 506), Lupescu Vasile (1372, 375, 377, 432, 436, 475, 478, 483, 485, 493, 494, 495, 475, 477, E: 551, 554), *Mitroaica I. Gheorghe* (1469 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 489, 490, 496, 592, 593, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 506, 509, 512, 513, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 528, 529, 531, 532, 533), *Pleniceanu Ion* (1375, 377, 379, 381, 383, 403, 404, 436, 441, 442, 449, 472, 474, 475, 486, 493, 494, 495, 513, 516, 517, 520, 523, 529, 533., 535, 545, 596, 603, 504, P).

CĂLĂRAŞI. Clasa IX-a. *Nicolescu Dan* (1374, 375, 377, 378, 379, 382, 383, 384, 385, 390, 400, 407, 408, 416, 433, 434, 436, 442, 449, 460, 472, 474, 475, 477, 481, 486, 493); clasa X-a. Duda Nicolae (1410, 438, 471, 472, 473, 474, 475, 478, 483, 498, E: 513, 515, 520, 526, 528, 530, 532, 533, E: 586, 587, 588), *Mazilu N. Constantin* (1442, 443, 456, 465, 474, 475, 476, 479, 481, 482, 483, 484, 485, 489, 490, 491, 513, 515, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 533, 534, 536, P), Pana Gheorghe (1472, 475, 482, 483, 486, 489, 516, 520, 523, 527, 530, 531, 533), Pronovici Anatolie (1371, 473, 513, 515, 520, 524, 526, 528, 533), *Vasilescu Aurel* (1406, 408, 409, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 421, 423, 426, 436, 439, 440, 441, 442, 443, 449, 453, 458, 459, 465, 467, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 481, 482, 483, 484, 486, 491, 493, 494, 495, 498, 499). *Şcoala medie tehnică de mecanizarea agriculturii*, anul IV. Banu Alex. (1410, 413, 414, 436, 442, 449, 460, 472, 473, 474, 475, 482).

CARANSEBEŞ. Liceul mixt, clasa X-a. Cîmpean Viorel (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 390, 407, 410, 412, 449, 460, E: 558, 568, 575, 576, 586, 587), Absolvent. *Mitrofan I. Gheorghe* (1382, 385, 386, 395, 405, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 419, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 431, 433, 436, 439, 440, 442, 443, 449, 451, 452, 453, 457, 459, 461, 462, 464, 465, 468, E: 568, 574, 575, 578, 586, 587, 588, P).

CÎMPINA. Cond I. Ioan (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 383, 384, 385, 386), Florea C. Gheorghe (1403, E: 536, 563, 568, 569, 570, 571, 574, 575, 586, 587, 588).

CÎMPULUNG-MUSCEL. Clasa X-a. Drăguş Ion (1372, 375, 378, 379, 416, 436, 472, 475, 486, 493, 495, 504, 409, E: 558, 559, 560, 563, 5571, 574, 586, 587, 588), Rada Nicolae (1372, 374, 377, 383, 386, 403, 404, 405, E: 558, 559); *Şcoala medie tehnică de cărbuni*. Anul IV. *Ujupan M. Ion* (1372, 373, 374, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 382, 392, 400, 403, 406, 407, 431, 432, 433, 434, 441, 493, 494, 495), absolvent. Savin Dan (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 383, 392, 402, 403, 407, P).

(va urma)

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

ERATĂ. La E: 615, pag. 140 în loc de $\sqrt{1-1}$ se va scrie $\sqrt{1-a}$
La pag. 201 rîndul 5 de sus în loc de clasa III-a se va scrie clasa VIII-a
La pag. 228 rîndul 13 de sus în loc de premeabilitate trebue permeabilitate
La problema 1620 pag. 235 în loc de Gheoghiu se va scrie Gheorghiu

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multe probleme pe aceiași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— *Se primesc soluții numai* la problemele și exercițiile din ultimile *patru* numere apărute.

— Rezolvitorii pot trimite *într-un singur plic*, francat după greutate, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului* 1955, *se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul* 1955.

— *Pentru anul* 1955, *G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX- a și a X-a sau de către studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic decît zece soluții bune sau necorect redactate.

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *În redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute, corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții au fost scrise îngrijit și sînt bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante sub formă de note.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a « Olimpiadei matematice și fizice »*, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a presei București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat să *facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— **Cititorii și colaboratori revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care dorese să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15-18, miercuri între orele 10-13 și sîmbătă între orele 15-18 la sediul redacției din strada Academiei 14, București — Telefon 4.46.53**

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi de* **A O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **. S. Şklovski** (lei 6,85)
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu** (lei 6,55).

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRIRDERI ŞI INSTITUŢII. TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 5, PENTRU URMĂTOARELE ŞASE NUMERE.

C. 662. Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

KAT
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VI — Iulie 1955

7

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 7 — Iulie 1955

SUMARUL:

Pag.

1. *Rezolvarea ecuaţiei de gradul III-lea de Marius Iosifescu* 293
2. *Bazele fizice ale metodelor pentru controlul fabricatelor metalurgice. Defectoscopia magnetică de Ana Boiangiu* 304
3. *Construcţia unui refractometru pentru lichide de V. Pavlu* 314
4. *Chestiuni de examen (1725—1754)* 318
5. *Probleme rezolvate (E: 534; 1263; 1348; 1351; 1364; 1367; 1368; 1377; 1384)* 322
6. *Probleme propuse (1755—1778)* 328
7. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 669—E: 678)* 331
8. *Consfătuirea din Bucureşti cu cititorii G.M.F—B* .. 333
9. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 334

ANUL VI 7 IULIE 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 7 Iulie 1955

REZOLVAREA ECUAŢIEI DE GRADUL AL III-LEA

MARIUS IOSIFESCU

student

1. ISTORIC. Dacă unele ecuaţii de gradul al II-lea au fost rezolvate încă de grecii antici (în *Elementele* lui Euclid sînt rezolvate cîteva ecuaţii de gradul al II-lea prin metode geometrice), rezolvarea ecuaţiei generale de gradul al III-lea aparţine epocii Renaşterii, deci sfîrşitului Evului Mediu.

Este demn de remarcat faptul că deşi partea cea mai considerabilă a dezvoltării matematicilor în Evul Mediu le revine arabilor, ei nu au reuşit să găsească soluţia ecuaţiei cubice. Numeroasele lor lucrări manifestă interesul pe care ei îl purtau acestui subiect; principalul punct de plecare al acestor cercetări a fost problema lui Arhimede asupra diviziunii sferei (să se împartă o sferă printr-un plan în două segmente sferice care să fie într-un raport dat). Această problemă conduce într-adevăr la rezolvarea unei ecuaţii de forma $x^3+ax^2+b=0$. Ne parvenind să-şi imagineze totuşi, o soluţie generală a ecuaţiei de gradul al III-lea prin radicali, arabii rezolvau ecuaţiile cubice numerice, care interveneau în probleme practice printr-o metodă de aproximaţie destul de bună. În cartea Liber Abacci (1228) a lui Leonardo din Pisa (Fibonacci) care era, evident, un discipol al arabilor, găsim un asemenea exemplu de rezolvare aproximativă a unei ecuaţii numerice de gradul al III-lea ($x^3+2x^2+10x=20$) printr-o metodă de origină arabă.

În prezent se ştie că Scipione del Ferro, profesor de matematici la *Bologna* dela 1496 la 1525, a reuşit îa începutul secolului al XVI-lea (1515) să rezolve ecuaţiile cubice de forma $x^3+mx=n$, m şi n fiind pozitivi. Nicolo supranumit Tartaglia sau le Begue, care poate cunoştea acest prim rezultat, a parvenit de la 1535 la 1541 la soluţionarea oricărei specii de ecuaţii de gradul al III-lea. Hyeronimo Cardan combinînd informaţiile pe care şi le procurase asupra metodei lui del Ferro cu cele pe care le luase de la Tartaglia, a publicat fără consimţămîntul acestuia, în 1545, metoda de rezolvare azi încă cea mai răspîndită. Tartaglia a protestat în zadar împotriva gestului lui Cardan. El a murit*) înainte de a putea da publicului o expunere a descoperirilor sale asupra ecuaţiei cubice,

*) Pînă-n 1881 nu s-a cunoscut data morţii lui Tartaglia; ea era diferit raportată de diverşi autori. În 1881 graţie descoperii testamentului lui Tartaglia şi a unei note manuscrise inserate pe verso-ul foii a 2-a a acestei piese autentice problema a fost clarificată. Rezultă din aceste scrieri că Tartaglia, născut la *Brescia* în 1500 sau 1501, a murit la *Veneţia* în noaptea din spre 13—14 decembrie 1557. Adevăratul său nume este Nicolo Fontana.

iar formula care ar fi trebuit să-i poarte numele se numeşte şi astăzi, formula lui Cardan.

Lucrarea lui Cardan din anul 1545 intitulată «*Artis magnae sive de Regulis Algebricis liber unus*» a avut scopul principal să pună bazele metodelor de rezolvare a ecuaţiilor de gradul al III-lea şi al IV-lea, descoperite cu puţin înainte de către del Ferro, Tartaglia şi Ferrari.

Fiind dată o ecuaţie de gradul al III-lea

$$x^3 + px + q = 0$$

atunci

$$x = u + v \tag{1}$$

cu

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ şi } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad uv = -\frac{p}{3}$$

Vom demonstra această formulă mai jos. Continuăm acum prin a face consideraţii asupra formulei de rezolvare (1) a lui Cardan-Tartaglia.

Este necesar înainte de toate să arătăm că pînă la epoca Renaşterii, noţiunea de număr real pozitiv se prezenta ca noţiunea generală de număr; atît numerele complexe cît şi cele negative erau considerate ca imaginare, fictive. Ecuaţiile de gradul al II-lea care aveau rădăcini complexe erau socotite nerezolvabile. Rezolvarea ecuaţiilor de gradul al III-lea şi al IV-lea a pus probleme noi, care au determinat pe matematicieni să renunţe la ignorarea completă a numerelor complexe şi să pornească la studiul empiric al proprietăţilor lor. Iată în ce constau aceste noi probleme.

După cum vom demonstra în § 2, dacă $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, ecuaţia nu are decît o singură rădăcină reală şi două rădăcini complexe conjugate. De exemplu ecuaţia $x^3 - 9x - 28 = 0$, pentru care $D = 14^2 - 3^3 > 0$ are rădăcinile: 4; $-2 + i\sqrt{3}$; $-2 - i\sqrt{3}$. Dacă $D = 0$, ecuaţia are trei rădăcini reale dintre care două egale între ele. De ex. ecuaţia $x^3 - 12x + 16 = 0$ cu $D = 8^2 - 4^3 = 0$, are rădăcinile 2; 2; -4.

În aceste cazuri sub radicalul cubic al expresiilor lui u şi v avem numere reale. Cum pentru Cardan rădăcina cubică avea o singură valoare (valorile complexe fiind îndepărtate) el a conchis, precum au făcut şi înaintaşii săi, că ecuaţia are o singură rădăcină.

Dacă $D < 0$ ecuaţia are trei rădăcini reale. Acest caz este caracterizat printr-o particularitate care nu era cunoscută pînă în secolul al XVI-lea. De ex. ecuaţia $x^3 - 21x + 20 = 0$ are trei rădăcini reale: 1; 4; -5. Dar $D = 10^2 - 7^3 < 0$. Conform formulei generale va trebui să avem $x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}$. Numărul complex apare deci aci nu ca un rezultat ci ca un termen intermediar în calcule care ne duce la rezultate reale.

Cardan nu a putut lămuri enigma acestui «casus irreductibilis» (caz ireductibil) tocmai pentrucă ignora numerele complexe. Din această problemă a început să se întrevadă faptul că numerele complexe care apar în rezolvarea ecuaţiilor nu mai pot fi total ignorate. Matematicienii s-au străduit să stabilească cum trebuie făcute operaţiile cu numere complexe pentru ca rezultatele reale obţinute cu ajutorul numerelor complexe să fie exacte. Primul care

a înțeles că considerarea rădăcinilor complexe putea prezenta utilitate în rezolvarea ecuațiilor a fost Rafaelo Bombelli (n. la Bologna), care a publicat în 1572 o *Algebră*. *Bombelli* a demonstrat geometric că în cazul ireductibil ecuația are sigur o rădăcină reală. De unde deduce *a priori*, că radicalii din formula lui Cardan-Tartaglia trebuie să se descompună în așa fel ca părțile imaginare să se distrugă cum se întîmplă în următorul exemplu. Fie de rezolvat:

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Aplicînd formula generală obținem:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-1^2}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-1^2}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$

$$x = 4.$$

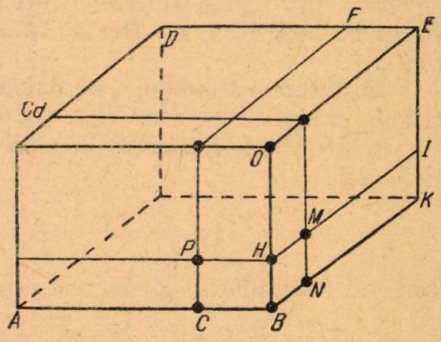
Bombelli spune că a extras rădăcina cubică, dar omite să ne spună după care regulă. Dacă punem

$$2 + 11i = (y + iz)^3 \quad ; \quad 2 - 11i = (y - iz)^3$$

găsim de o parte și de alta aceleași ecuații de condiție

$$y^3 - 3yz^2 = 2 \quad ; \quad 3y^2z - z^3 = 11$$

care admit soluția simplă $y = 2$; $z = 1$. Iată de ce Bombelli a reușit să extragă rădăcinile cubice. Mai tîrziu Wallis, în Algebra sa (1685), privea metoda lui Bombelli, ca singura bună de urmat și dădea cîteva noi exemple de descompunere.



Cazul ireductibil n-a fost rezolvat decît la începutul secolului al XVIII-lea de către Moivre prin folosirea funcțiilor circulare.

Nu mult după apariția lucrării lui Cardan, « *Artis magnae* », învățatul belgian Simon Stevin (n. Bruges 1548, m. 1620 în *Țările de jos Septentrionale)* a dat în *Aritmetica* sa (Leyda, 1585) o metodă remarcabilă de rezolvare prin *Algebră geometrică* a ecuației de gradul al III-lea. Vom da în încheierea acestui paragraf demonstrația sa.

Stevin stabilește mai întîi teorema « *Dacă se taie o linie dreaptă într-un loc oarecare, cubul întregii linii va fi egal cu cuburile celor două porțiuni plus de trei ori solidul dreptunghiular construit pe cele două porțiuni și pe întreaga linie* ».

Este formula cubului unui binom dar scrisă astfel:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b).$$

Demonstrația este geometrică și se citește pe figură.

Iată în rezumat acum și sub o formă algebrică, demonstrația lui Stevin a formulei lui Cardan-Tartaglia:

« Fie $x^3 = px + q$. Eu zic că admite soluția

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Reîntorcîndu-ne la figură să punem

$$x = DE;\ \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = DF;\ \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = FE.$$

Trebuie să arătăm că $\overline{DE}^3 = p.\ \overline{DE} + q$. Dar după teorema enunțată la început remarcînd că $\overline{DE} = \overline{DF} + \overline{FE}$, avem:

$$\overline{DE}^3 = \overline{DF}^3 + \overline{FE}^3 + 3\,\overline{DF} \cdot \overline{FE} \cdot \overline{DE}.$$

Ori,

$$\overline{DF}^3 + \overline{FE}^3 = q \quad , \quad \overline{DF} \cdot \overline{FE} = \frac{p}{3}$$

q.e.d. »

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al III-lea, și apoi a celor de gradul al IV-lea, a fost prima victorie a matematicii din timpurile noi. Ea nu numai că a pus problema rezolvării ecuațiilor de gradul al V-lea, dar a îndreptat gîndirea matematică spre rezolvarea problemei generale referitoare la ecuațiile algebrice de gradul n. Matematicienii s-au ocupat cu studiul problemei numărului rădăcinilor unei ecuații algebrice de gradul n și a relațiilor dintre coeficienți și rădăcini. În 1629 G i r a r d a formulat afirmația că orice ecuație algebrică întreagă de gradul n are n rădăcini, dar el nu a putut să demonstreze această teoremă. Deabia în 1799, G a u s s a dat o demostrație riguroasă.

În decursul timpului s-au dat numeroase metode noi de rezolvare a ecuației de gradul al III-lea. Vom prezenta aci pe cele mai importante:

2. *Metode de rezolvare.* Ecuația cubică $x^3 - 1 = 0$ are, după cum se știe, rădăcinile

$$1;\ \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\ ;\ \beta = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Între aceste rădăcini avem relațiile:

$$1 + \alpha + \beta = 0;\ \ 1 + \alpha^2 + \beta^2 = 0;\ \ \alpha\beta = 1;\ \ \alpha = \beta^2;\ \ \beta = \alpha^2.$$

Ecuația generală de gradul al III-lea este de forma

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0.$$

Susbstituția $z = x - \frac{A}{3}$ o reduce la forma

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

care poate fi rezolvată în multe feluri.

a) *Metoda lui* H u d d e. Vom înlocui pe x prin două noi necunoscute u și v punînd $x = u + v$. Ecuația (1) va deveni:

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$$

și va fi satisfăcută dacă determinăm u și v cu ajutorul ecuațiilor

$$u^3 + v^3 = -q;\ \ uv = -\frac{p}{3}. \tag{2}$$

Ridicînd pe ultima la cub obținem:

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}. \tag{3}$$

Remarcăm aci că ultima ecuație s-ar păstra dacă înlocuim p prin αp sau βp.

u^3 și v^3 sînt deci rădăcinile ecuației

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

și sînt date de formulele:

$$\left\{ \begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix} \right\} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

de unde

$$x = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

adică tocmai formula lui Cardan-Tartaglia.

Cum o rădăcină cubică are numai trei valori, avem pentru x nouă valori, deci se introduc șase rădăcini străine; aceasta din cauza înlocuirii celei de-a doua ecuații (2) prin ecuația (3).

Cele nouă valori sînt rădăcinile a trei ecuații:

$$\left\{ \begin{matrix} x^3 + px + q = 0 \\ x^3 + \alpha p x + q = 0 \\ x^3 + \beta p x + q = 0. \end{matrix} \right. \tag{4}$$

Pentru a separa rădăcinile acestor ecuații, observăm că fiecare dintre ele este relativă ipotezelor respective

$$uv = -\frac{p}{3} \quad ; \quad uv = -\frac{\alpha p}{3} \quad ; \quad uv = -\frac{\beta p}{3}.$$

Dacă p și q sînt reali, u și v trebuie să fie aleși în așa fel ca produsul lor să fie real. Avem trei cazuri de considerat:

1°. $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$. În acest caz u^3 și v^3 sînt reali, deci u și v au un sistem de valori reale; dacă desemnăm aceste valori prin u_1 și v_1 toate valorile lui u și v vor fi:

$$u_1 \quad ; \quad u_1\alpha \quad ; \quad u_1\beta \quad ; \quad v_1 \quad ; \quad v_1\alpha \quad ; \quad v_1\beta$$

și ecuația propusă va avea rădăcinile:

$$x_1 = u_1 + v_1 \quad ; \quad x_2 = u_1\alpha + v_1\beta \quad ; \quad x_2 = u_1\beta + v_1\alpha \tag{5}$$

în așa fel ca uv să fie real în toate cazurile. A doua și a treia ecuație (4) vor avea respectiv rădăcinile:

$$\begin{matrix} u_1 + v_1\alpha \quad ; \quad u_1\alpha + v_1 \quad ; \quad u_1\beta + v_1\beta \\ u_1 + v_1\beta \quad ; \quad u_1\beta + v_1 \quad ; \quad u_1\alpha + v_1\alpha \end{matrix} \tag{5'}$$

Putem de asemenea lua $x = u - \frac{p}{3u}$ sau $x = v - \frac{p}{3v}$ și vom obține numai rădăcinile veritabile.

În cazul pe care l-am examinat ecuația are o rădăcină reală și două rădăcini complexe conjugate.

2°. $D = 0$. În acest caz u_1 și v_1 sînt egale. Ecuația are rădăcinile reale, două fiind egale între ele.

3°. $D < 0$. În acest caz u^3 și v^3 sînt complexe, u și v sînt de asemenea complexe, dar putem împerechia valorile lor în așa fel ca $uv = -\frac{p}{3}$ să fie real. Formulele (5; 5′) vor da rădăcinile și dacă p și q sînt imaginare. Cînd p și q sînt reale, rădăcinile vor prezenta o formă imaginară; vom arăta că totuși ele sînt reale. Avem într-adevăr:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Dacă punem acum

$$-\frac{q}{2} = r\cos\theta \quad ; \quad \sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} = r\sin\theta$$

găsim

$$u^3 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad v^3 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

sau

$$r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \cos\theta = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Avem deci

$$\begin{cases} u = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{3} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{3}\right) \\ v = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{3} - i\sin\frac{2k\pi+\theta}{3}\right) \end{cases}$$

și

$$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{2k\pi+\theta}{3} \qquad (k = 0;\ 1;\ 2).$$

(Întrucît $\sin\theta > 0$, θ se va găsi în primul sau în al doilea cadran).

În cazul de care ne-am ocupat cele trei rădăcini sînt reale și inegale. Cum am văzut în § 1, el a primit numele de «caz ireductibil» întrucît rădăcinile se pot reprezenta prin radicali numai sub o formă imaginară. Dacă încercăm să calculăm pe u și v sub forma $a + ib$ fără a folosi funcțiuni circulare, ne întoarcem la o ecuație de tipul celei date.

Vom arăta acum, cum obținem în cazul 1° rădăcinile sub formă trigonometrică.

Dacă $p < 0$ atunci putem pune

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \sin \omega.$$

Vom obține

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cos \omega} = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2} \cos \omega} = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \sqrt[3]{\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}}$$

întrucît în virtutea notației făcute

$$\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \sin \omega}.$$

Introducînd în sfîrșit un nou unghi, φ, prin relația

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}},$$

obținem următoarea expresie a rădăcinii reale

$$x_1 = -2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\varphi.$$

Se poate arăta că rădăcinile complexe sînt

$$x_{2;3} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\varphi \pm i \sqrt{-p} \operatorname{cotg} 2\varphi.$$

Dacă $p > 0$ și notăm

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \operatorname{tg} \omega$$

obținem

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{q \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}} = \sqrt{\frac{p}{3}} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{q \cos^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}} = \sqrt{\frac{p}{3}} \sqrt[3]{\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}}.$$

Notînd

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$$

avem

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg} 2\varphi.$$

Rădăcinile complexe vor fi

$$x_{2;3} = \sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg} 2\varphi \pm i\sqrt{p}\operatorname{cosec} 2\varphi.$$

Atragem atenţia asupra faptului că dacă ecuaţia de gradul al III-lea se prezintă sub forma

$$x^3 + px^2 + q = 0$$

atunci substituţia $x = \frac{q}{y}$ o transformă într-o ecuaţie de forma (1):

$$y^3 + pq\,y + q^2 = 0$$

prin urmare

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2q}\right)^2 + \left(\frac{p}{3q}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2q} - \sqrt{\left(\frac{1}{2q}\right)^2 + \left(\frac{p}{3q}\right)^3}}}.$$

Aplicaţia I-a. Fie de rezolvat $x^3 - 6x - 2 = 0$. Ne aflăm în cazul $D < 0$. Avem:

$$\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad x = 2\sqrt{2}\cos\frac{2k\pi + \theta}{3}; \qquad (k = 0;\ 1;\ 2)$$

$$\log\cos\theta = \bar{1},5484550; \quad \theta = 69°43'36''; \quad \frac{\theta}{3} = 23°14'32''$$

$$\frac{\theta}{3} + 120° = 143°14'32''; \quad \frac{\theta}{3} + 240° = 263°14'32''.$$

Obţinem:

$$\log x_1 = 0,4147872; \quad \log(-x_2) = 0,3552710; \quad \log(-x_3) = \bar{1},5222267$$

$$x_1 = 2,5988; \quad x_2 = -2,2660; \quad x_3 = -0,3328.$$

Aplicaţia II-a. Fie de rezolvat $x^3 - 3x + 5 = 0$. Pentru această ecuaţie $D > 0$. Aplicînd formulele stabilite mai sus găsim

$$x_1 = -2,2868 \qquad x_{2,3} = 1,1434 \pm 0,96037\,i.$$

b) *Metoda lui* Lagrange. Fie x_1, x_2, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$. Considerăm expresia

$$y = (x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3)^3.$$

Permutînd rădăcinile se pare că vom obţine pentru y şase valori. În realitate y nu ia decît două valori distincte. În adevăr,

$$x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = \alpha(\beta x_1 + x_2 + \alpha x_3) = \beta(\alpha x_1 + \beta x_2 + x_3)$$

$$\alpha x_1 + x_2 + \beta x_3 = \alpha(x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3) = \beta(\beta x_1 + \alpha x_2 + x_3)$$

și

$$(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3)^3 = (\beta x_1 + x_2 + \alpha x_3)^3 = (\alpha x_1 + \beta x_2 + x_3)^3$$

$$(\alpha x_1 + x_2 + \beta x_3)^3 = (x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3)^3 = (\beta x_1 + \alpha x_2 + x_3)^3$$

Fie deci,

$$y_1 = (x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3)^3 \quad ; \quad y_2 = (x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3)^3.$$

Avem,

$$y_1 + y_2 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12 x_1 x_2 x_3 -$$

$$- 3(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) =$$

$$= 2(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 9(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2^2 +$$

$$+ x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) =$$

$$= - 9[(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - 3 x_1 x_2 x_3] = - 27 q \text{ *)}$$

$$y_1 y_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = - 3p$$

y_1 și y_2 vor fi deci rădăcinile ecuației

$$y^2 + 27 q y - 27 p^3 = 0$$

iar x_1; x_2; x_3 vor fi soluția sistemului

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = \sqrt[3]{y_1} \quad ; \quad (\sqrt[3]{y_1}\sqrt[3]{y_2} = - 3p).$$

$$x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 = \sqrt[3]{y_2}$$

De aci obținem formula lui Cardan-Tartaglia. Rădăcinile care verifică ecuația dată coincid cu cele obținute prin metoda lui Hudde.

c) *Metoda lui* Tschirnhausen și Euler. Această metodă constă în a nota

$$y^3 + py + q = x$$

și în a alege pe p și q în așa fel încît eliminînd pe y între această ecuație și ecuația $y^3 = d$ să obținem ecuația propusă.

În cele ce urmează, noi vom reduce ecuația completă

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 \qquad (1')$$

la o ecuație cubică binomă printr-o metodă mult mai simplă.

Efectuăm substituția de forma

$$x' = \frac{x - m}{x - n} \qquad (m \neq n)$$

---

*) Aci utilizăm relațiile dintre rădăcini și coeficienți:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_2 = p \quad \text{și} \quad x_1 x_2 x_3 = - q.$$

Ele se obțin imediat din identitatea:

$$x^3 + px + q \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

de unde

$$x = \frac{m - nx'}{1 - x'}$$

Ecuația (1') devine

$$f(x') = f(n)\, x'^3 - 3\,[a_0 mn^2 + a_1 (n^2 + 2mn) + a_2 (m + 2n) + a_3]\, x'^2 +$$
$$+ 3\,[a_0 nm^2 + a_1 (m^2 + 2mn) + a_2 (n + 2m) + a_3]\, x' - f(m) = 0$$

unde am notat cu $f(x)$ primul membru al ecuației (1').

Vom pune condiția ca ultima ecuație să fie binomă.

$$a_0 mn^2 + a_1 (n^2 + 2mn) + a_2 (m + 2n) + a_3 = 0$$
$$a_0 nm^2 + a_1 (m^2 + 2mn) + a_2 (n + 2m) + a_3 = 0$$

Prin scăderea acestor relații, apoi prin înmulțire respectiv cu m și n și scădere, obținem

$$a_0 mn + a_1 (m + n) + a_2 = 0$$
$$a_1 mn + a_2 (m + n) + a_3 = 0$$

Rezultă în ipoteza $a_1^2 - a_0 a_2 \neq 0$

$$m + n = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_1^2 - a_0 a_2} \qquad mn = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2}$$

deci m și n sînt rădăcinile ecuației

$$(a_1^2 - a_0 a_2)\, y^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_2)\, y + a_2^2 - a_1 a_3 = 0. \qquad (R)$$

Rezultă că transformarea

$$x = \frac{m - nx'}{1 - x'}$$

conduce de la (1') la ecuația binomă

$$f(n)\, x'^3 - f(m) = 0.$$

Prin urmare

$$x_1 = \frac{m\sqrt[3]{f(n)} - n\sqrt[3]{f(m)}}{\sqrt[3]{f(n)} - \sqrt[3]{f(m)}}; \quad x_2 = \frac{m\sqrt[3]{f(n)} - n\alpha\sqrt[3]{f(m)}}{\sqrt[3]{f(n)} - \alpha\sqrt[3]{f(m)}};$$

$$x_3 = \frac{m\sqrt[3]{f(n)} - n\alpha^2\sqrt[3]{f(m)}}{\sqrt[3]{f(n)} - \alpha^2\sqrt[3]{f(m)}}.$$

Dacă $a_1^2 - a_0 a_2 = 0$ atunci ecuația se scrie:

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + \frac{3a_1^2}{a_0} x + a_3 = 0$$

$$\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right)^3 - \frac{a_1^3}{a_0^3} + \frac{a_3}{a_0} = 0$$

deci se rezolvă imediat și are o rădăcină reală și două complexe conjugate.

Discuție. Dacă ecuația (R) are rădăcini reale adică dacă

$$\Delta = 4(a_1^2 - a_0 a_2)(a_2^2 - a_1 a_2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 < 0$$

este vizibil că ecuația (1′) va avea o singură rădăcină reală x_1 și două complexe conjugate x_2 și x_3.

Dacă $\Delta > 0$ ecuația (R) va avea rădăcini complexe conjugate

$$m = a + bi \quad ; \quad n = a - bi;$$

$f(m)$ și $f(n)$ vor fi de asemenea două numere complexe conjugate, deci

$$\sqrt[3]{f(m)} = c + di; \quad \sqrt[3]{f(n)} = c - di.$$

Prin urmare,

$$x_1 = \frac{(a+bi)(c+di) - (a-bi)(c-di)}{c - di - c - di} = \frac{ad - bc}{d}$$

$$x_2 = \frac{(a+bi)(c+di) - \alpha(a-bi)(c+di)}{c - di - \alpha(c+di)} = \frac{\sqrt{3}\,ac - bc + ad + \sqrt{3}\,bd}{d + \sqrt{3}\,c}.$$

Ecuația are deci în acest caz toate rădăcinile reale.

Dacă $\Delta = 0$ și $a_2^2 - a_1 a_3 = 0$, ecuația are rădăcinile reale două fiind egale între ele și egale cu m. Rădăcina dublă este deci,

$$\sqrt{\frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2}} \cdot \operatorname{sig} n\,(a_0 a_3 - a_1 a_2). \qquad \text{(dată de } R\text{)}$$

Dacă $\Delta = 0$ cu $a_2^2 - a_1 a_3 = 0$ și $a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0$, ecuația are o rădăcină reală triplă.

Dacă aplicăm această metodă ecuației reduse *) $(a_1 = 0)$ obținem

$$\frac{f(m)}{f(n)} = \frac{m}{n}.$$

Într-adevăr, ecuația (1′) este echivalentă cu

$$f(n)\,x'^3 - f(m) = 0$$

sau cu

$$f(n)(x-m)^3 - f(m)(x-n)^3 = 0.$$

Scriind că în această ecuație lipsește termenul în x^2 obținem relația scrisă mai sus, Deci

$$nx'^3 = m$$

$$x = -\sqrt[3]{mn}\,(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})$$

m și n fiind rădăcinile ecuației $3p\,y^2 + 9q\,y - p^2 = 0$.

Obținem astfel însăși formula lui C a r d a n - T a r t a g l i a.

---

*) $x^3 + px + q = 0$.

BAZELE FIZICE ALE METODELOR PENTRU CONTROLUL FABRICATELOR METALURGICE.

DEFECTOSCOPIA MAGNETICĂ

ANA BOIANGIU
asistent universitar

ÎN orice ramură a industriei, o condiţie esenţială a progresului este calitatea produselor. În realizarea acestei condiţii, fizica, prin diferitele fenomene pe care le studiază, prin legile şi principiile stabilite, contribuie la posibilitatea construirii unor aparate de control a produselor fabricate şi prin aceasta, la îmbunătăţirea calităţii.

În industria metalurgică, prin control se urmăreşte materialul atît în diferitele faze de prelucrare, cît şi sub forma piesei finite, pentru verificarea proprietăţilor fizice de care sînt legate întrebuinţările sale, adică: proprietăţile electrice, proprietăţile magnetice, conductibilitatea electrică şi termică, rezistenţa la uzură, duritatea, etc.

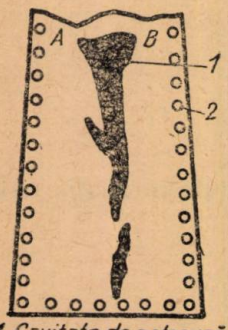
Complexul de proprietăţi al produselor metalurgice este determinat în măsură însemnată şi de gradul de impurificare cu elemente dăunătoare: gaze, zgură, materiale refractare, etc., precum şi de gradul de contaminare a materialului cu diferite defecte.

Din cauza defectelor şi impurităţilor conţinute, materialul nu corespunde scopului.

Pentru a înţelege importanţa controlului în industria metalurgică este necesară o privire succintă asupra naturii, repartizării şi împrejurărilor în care apar aceste defecte.

Oţelul lichid conţine gaze, care se elimină în timpul turnării în lingotiere (forme metalice în care se toarnă oţelul topit), ridicîndu-se la suprafaţă prin masa materialului. Dacă, din cauza unui defect de turnare (temperatură prea joasă de turnare, lipsa adaosurilor pentru liniştire), aceste gaze nu se pot ridica şi elimina, ele rămîn în oţel sub formă de bule numite incluziuni gazoase sau sufluri.

Solidificarea unui lingou are loc mai întîi la margine, unde oţelul vine în contact cu pereţii lingotierei, iar apoi spre centru. Prin răcire volumul scade, astfel încît la partea superioară a lingoului se formează un gol în formă de pîlnie numit cavitate de retasură. În această cavitate se strîng impurităţile şi gazele din oţel. Partea din lingou care conţine cavitatea de retasură se îndepărtează prin tăiere fiind treimea de sus a lingoului; într-o turnare corectă ea nu prezintă nici o deficienţă pentru piesele care se vor prelucra din materialul respectiv.



1 Cavitate de retasură
2 Sufluri
Fig. 1

Există însă cazuri cînd prin turnare greşită această cavitate de retasură ABC se întinde de-a lungul întregii piese (fig. 1). Numai prin îndepărtarea treimei de sus a lingoului ar ajunge la prelucrări ulterioare un material cu totul impropriu; de aceea este necesar un control al materialului.

Din cauza tensiunilor care au loc în urma contracţiei inegale a materialului prin solidificare pot apărea şi diferite fisuri. Acestea se pot produce şi în timpul laminării sau forjării, dacă aceste operaţii se fac la temperatură prea joasă sau dacă oţelul provine dintr-o şarjă necorespunzătoare.

La operațiile de tratament termic și în special la călire, fisurile sînt foarte frecvente din cauza tensiunilor ce apar în urma variațiilor bruște de volum sau structură cristalină. În piesă pot apărea fisuri și în timpul întrebuințării, din cauza diferitelor solicitări mecanice la care este supusă piesa.

Toate aceste defecte trebuie detectate la timp, atît pentru a împiedica ridicarea nejustă a prețului de cost al produselor prin creșterea numărului de piese rebutate, cît și pentru a împiedica eventualele accidente.

Controlul se face supunînd atît semifabricatele cît și piesele finite la diferite încercări; acestea se pot împărți în două mari grupe:

I. Încercări care ajung pînă la ruperea sau tăierea piesei, după care aceasta nu mai poate fi utilizată.

II. Încercări care nu implică distrugerea sau altererea piesei.

Din prima grupă fac parte: încercarea la tracțiune, la compresiune, la forfecare, la încovoiere, la torsiune, la șoc, precum și cercetarea microscopică.

Din grupa a doua fac parte: controlul cu raze X, controlul cu ultrasunete, controlul electric, controlul electromagnetic și controlul magnetic.

Încercările materialelor fără distrugerea lor permit verificarea calității tuturor pieselor unei serii, așa cum se vor prezenta ele într-un ansamblu mecanic și nu numai a unei singure piese dintr-un lot, după calitățile căreia se trag concluzii asupra tuturor pieselor.

Totuși încercările fără distrugere nu înlătură încercările cu distrugere, prin care se obțin și valorile numerice ale caracteristicilor mecanice sau — în cazul examenului microscopic — indicații exacte asupra naturii defectului, indicații care completează metodele din grupa a doua.

Încercările fără distrugerea materialului constituie o bogată exemplificare a modului de folosire a cunoștințelor pe care le dă fizica în construcția de aparate industriale ; în cuprinsul acestui articol vom da o expunere sumară a principiilor care stau la baza acestor metode de detectare a defectelor, ocupîndu-ne îndeosebi de metoda magnetică.

Controlul cu raze X se bazează pe proprietatea razelor X de a pătrunde prin metale, fiind absorbite mai mult sau mai puțin, în funcție de densitatea acestora. După trecerea lor prin piesă, razele X impresionează o placă fotografică sau un ecran fluorescent. Dacă piesa este omogenă, adică nu conține fisuri, placa fotografică se înnegrește uniform, sau ecranul fluorescent prezintă o luminiscență uniformă. Dacă materialul prezintă fisuri, sufluri, sau conține impurități de zgură, razele X sînt absorbite mai puțin și în locurile respective ecranul fluorescent este mai luminat, deci clișeul mai înnegrit.

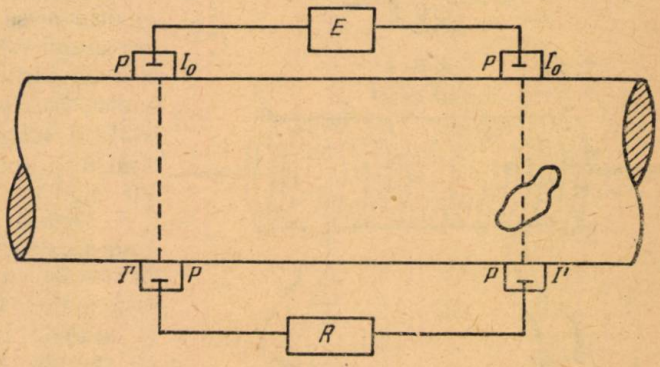


Fig. 2

Controlul cu ultrasunete folosește proprietatea acestor unde de a se reflecta și de a fi amortizate diferit la trecerea prin medii cu densități diferite. În fig. 2 se poate vedea schema de principiu a metodei care se bazează pe *măsurarea gradului de amortizare.* Ultrasunetele

sînt generate cu ajutorul unui emițător electronic E, care transmite oscilații electrice la un « pipăitor » P, în care un cristal piezoelectric transformă oscilațiile electrice în vibrații mecanice, ultrasonore. În cazul cînd materialul nu are defecte, intensitatea I_0 a acestor unde este amortizată pînă la o valoare I care este înregistrată la receptorul R și măsurată. Înregistrarea se face de asemenea cu ajutorul unui cristal piezoelectric P care primește vibrații mecanice și le transformă în oscilații electrice, a căror intensitate este măsurată cu precizie. În locul cu defect D densitatea este mai mică decît în restul materialului, deci intensitatea amortizată I' are o valoare mult inferioară intensității I determinată la aceeași grosime într-un loc fără defect.

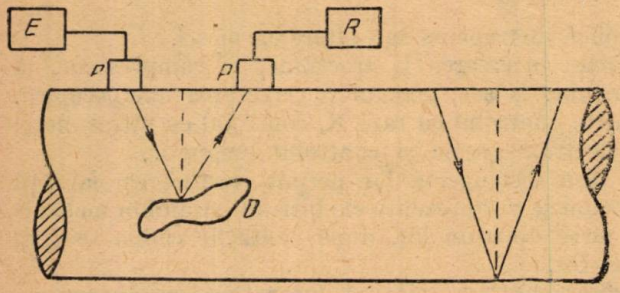


Fig. 3

În concluzie, variația intensității undelor recepționate indică existența unui defect în interiorul materialului respectiv.

Metoda prin reflexia undelor. La această metodă emițătorul E și receptorul R se află pe aceeași parte (fig. 3); se măsoară astfel intensitatea undelor reflectate. În locul cu defect D, drumul fiind mai scurt, intensitatea recepționată este mai mare decît în cazul cînd n-ar exista defectul.

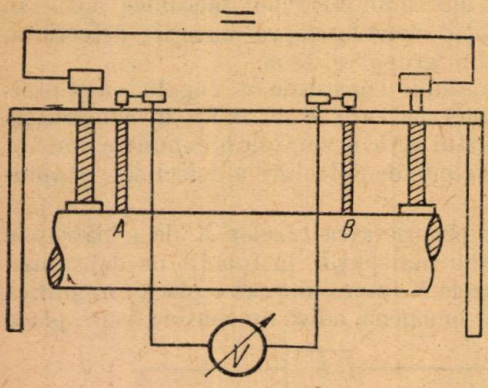


Fig. 4

Metoda electrică se bazează pe faptul că diferitele incluziuni opun o rezistență variată la trecerea unui curent electric.

Metoda constă în trecerea unui curent electric continuu de circa 100 A prin piesa de controlat. Suprafața metalului este cercetată cu ajutorul a două vîrfuri metalice legate la un voltmetru; căderea de tensiune constatată între două puncte A și B indică prezența unor defecte între ele (fig. 4).

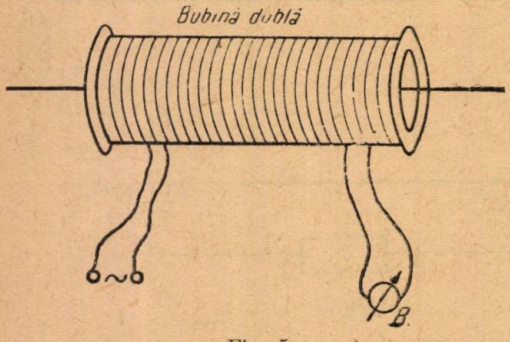


Fig. 5

Metoda electromagnetică și metoda magnetică sînt aplicabile numai la metale cu permeabilitate magnetică mare: fier, oțel, nichel, cobalt și aliajele lor. Dispozitivul folosit la metoda electromagnetică constă din două bobine concentrice, în interiorul cărora se introduce materialul de controlat (fig. 5). Dacă una din bobine este parcursă de un curent electric alternativ, în bobina a doua este indus un curent a cărui intensitate poate fi măsurată cu un amper-

metru *A*. Intensitatea curentului indus depinde de permeabilitatea magnetică a materialului controlat și în consecință, prezența unui defect determină micșorarea curentului indus.

Fiind foarte rapidă, această metodă este aplicabilă mai ales la materiale trase în fire, la bare lungi, la șine, etc. Locurile cu defecte se pot detecta ușor prin variația intensității curentului indus.

Metoda magnetică se bazează pe experiența bine cunoscută a materializării liniilor de forță magnetică, adică pe formarea spectrului magnetic. În fig. 6 sînt reprezentate spectrele magnetice obținute în cazul unui magnet în formă de bară (*a*) și în cazul a doi magneți lungi așezați cu polii de semn contrar față în față (*b*). Liniile de forță arată în ce direcție acționează forțele magnetice în diferitele puncte ale cîmpului asupra grăunților de pilitură de fier, care fiind magnetizați prin influență au devenit niște mici magneți. Examinînd

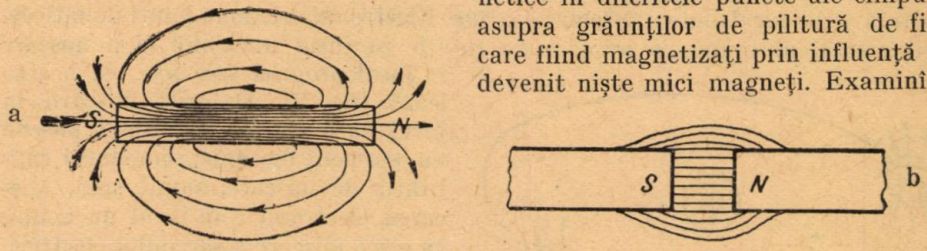


Fig. 6 (*a b*)

distribuția acestor linii de forță putem trage concluzia asupra mărimii forței magnetice; aceasta este mai mare acolo unde liniile de forță sînt mai dese și mai mică acolo unde liniile de forță sînt mai rare. Un spectru magnetic asemănător obținem presărînd pilitură de fier pe un carton perpendicular pe direcția unui curent, deoarece un curent creează în jurul său un cîmp magnetic.

Spațiul din jurul magnetului sau curentului în care se manifestă forțele magnetice se numește cîmp magnetic.

Să vedem cum este folosită această experiență la detectarea defectelor din metale.

Metoda magnetică constă în crearea unui cîmp magnetic puternic în piesa controlată și presărarea unei pulberi fine de fier pe suprafața piesei. Cercetînd piesa cu ochiul liber, observăm aglomerări de pulbere în anumite regiuni ale suprafeței, fapt care indică prezența unor defecte în regiunile respective. Pulberea de fier materializează și în acest caz liniile de forță magnetică, care în dreptul defectelor suferă o distorsiune, așa cum se vede în fig. 7 (*a* și *b*).

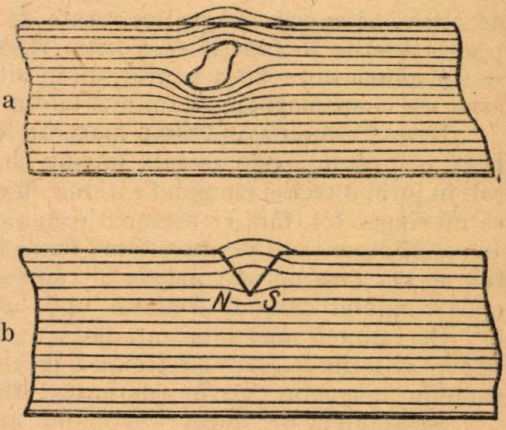


Fig. 7 (*a b*)

Pentru explicarea acestei distorsiuni a liniilor de forță trebuie să facem unele precizări referitoare la inducția magnetică, permeabilitate, reluctanță, refracția liniilor de forță, flux magnetic, magnetismul substanțelor.

Să vedem ce se întîmplă dacă într-un cîmp magnetic se găsesc diferite medii magnetice (înțelegînd prin medii magnetice orice substanță capabilă

să influenţeze cîmpul magnetic). Dacă într-un cîmp magnetic se introduce un corp paramagnetic, în acest corp apar linii de forţă suplimentare. Fenomenul acesta de variaţie a fluxului magnetic datorită proprietăţilor magnetice ale corpului, în cazul cînd acesta este introdus într-un cîmp magnetic se numeşte inducţie magnetică. Prin introducerea în cîmpul magnetic a unor corpuri feromagnetice fluxul magnetic iniţial se măreşte foarte mult. Un corp diamagnetic îşi crează un flux magnetic propriu cu sens opus cîmpului exterior, în consecinţă fluxul magnetic iniţial se micşorează.

Explicaţia acestei comportări a diferitelor medii magnetice ar putea constitui subiectul unui articol separat, de aceea ne vom mărgini să dăm aci numai noţiunile de bază.

Se ştie că orice atom este constituit dintr-un nucleu încărcat cu o sarcină pozitivă şi din electroni cu sarcini negative. Electronul are două feluri de mişcări în interiorul atomului: o mişcare de rotaţie în jurul nucleului şi o mişcare în jurul propriei sale axe, ca o sfîrleză (fig. 8). Datorită mişcării în jurul axei proprii electronul posedă un moment mecanic, momentul cantităţii de mişcare, numit spin. Mişcarea electronilor în jurul nucleului, ca orice mişcare a sarcinilor electrice, poate fi asemuită cu un curent electric. Dar un electron în mişcare produce un cîmp magnetic analog cîmpului magnetic produs de un curent. Orbitele şi axele de rotaţie ale fiecărui electron dintr-un atom se pot afla în poziţii diferite unele faţă de altele. Cîmpurile magnetice create de electronii în mişcare vor avea şi ele poziţii diferite în funcţie de poziţia electronilor unul faţă de altul, astfel încît se vor aduna sau scădea parţial sau în întregime. Drept urmare, atomul poate avea un cîmp magnetic rezultant diferit de zero sau egal cu zero.

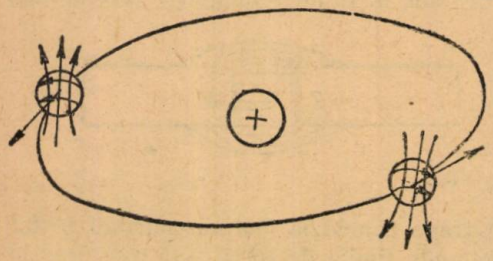


Fig. 8

Despre atomii avînd cîmp magnetic se spune că au « moment magnetic ». Dacă o substanţă este aşezată într-un cîmp magnetic exterior atomii ei se vor roti în jurul direcţiei cîmpului exterior cu o viteză foarte mare. Atomul se roteşte ca un singur tot, fără ca aşezarea reciprocă a axelor electronilor să se schimbe. În aceşti atomi care se rotesc tăind liniile de forţe magnetice ale cîmpului exterior se vor crea curenţi induşi, al căror cîmp magnetic este îndreptat în sens opus cîmpului exterior conform legii lui Lenz.

Deci atomii unei substanţe pot avea un moment magnetic egal sau diferit de zero datorită mişcării electronilor, precum şi un cîmp magnetic de sens contrar cîmpului magnetic exterior, datorită rotirii lor în acest cîmp exterior.

Substanţele ale căror atomi nu posedă moment magnetic se numesc diamagnetice; ele au deci numai cîmpul magnetic al curenţilor induşi, astfel în cît micşorează cîmpul magnetic exterior. Atomii substanţelor paramagnetice au ambele feluri de cîmpuri. Momentele magnetice ale atomilor lor se orientează în acelaşi sens ca şi cîmpul exterior şi datorită faptului că acestea au o valoare mai mare decît cîmpul curenţilor induşi rezultatul este o mărire a cîmpului magnetic exterior.

Cîteva substanţe au proprietatea de a forma un cîmp magnetic suplimentar deosebit de intens; ele se numesc feromagnetice. Magnetizarea substanţelor feromagnetice depinde numai de orientarea spinilor electronilor, iar nu de

rotația lor în jurul nucleului. În cristalele corpurilor feromagnetice există între electronii atomilor vecini forțe intense de proveniență electromagnetică, care orientează axele spinilor în poziții paralele. Regiunile cu spini paraleli sînt deci, puternic magnetizate în mod spontan. Deoarece regiunile microscopice de magnetizare spontană sînt orientate dezordonat rezultă că magnetizarea întregului corp este nulă. La introducerea unei asemenea substanțe feromagnetice într-un cîmp magnetic exterior magnetizarea tuturor regiunilor se orientează în sensul acestui cîmp mărindu-l foarte mult.

Cîmpul magnetic care rezultă la introducerea unui mediu magnetic într-un cîmp magnetic exterior se măsoară prin vectorul inducției magnetice B, vector tangent la liniile de forță magnetică. În cazul vidului, sub influența cîmpului magnetic exterior nu apar linii de forță suplimentare. Valoarea inducției magnetice în vid se reprezintă prin vectorul H, egal ca direcție și sens cu vectorul inducției magnetice din punctul respectiv.

Între inducția magnetică și intensitatea cîmpului magnetic există următoarea relație: $B = \mu H$, în care μ este o constantă care depinde de proprietățile mediului și de alegerea unităților de măsură pentru B și H; ea se numește permeabilitate magnetică.

La substanțele diamagnetice permeabilitatea este mai mică decît 1, rezultînd deci o inducție magnetică mai mică decît în vid. Permeabilitatea vidului este considerată egală cu 1, iar permeabilitatea corpurilor paramagnetice mai mare decît 1. Corpurile feromagnetice au o permeabilitate mult mai mare decît aceea a vidului, și anume de ordinul miilor.

Pentru toate corpurile afară de cele feromagnetice, permeabilitatea are o valoare aproape constantă, pe cînd la corpurile feromagnetice ea este funcție de intensitatea cîmpului exterior H, ceea ce constituie un criteriu important de diferențiere a substanțelor feromagnetice de celelalte substanțe magnetice.

Permeabilitatea substanțelor feromagnetice crește mai întîi mult odată cu creșterea cîmpului magnetizant exterior H, ajunge la un maxim, apoi scade, tinzînd către unitate (fig. 9).

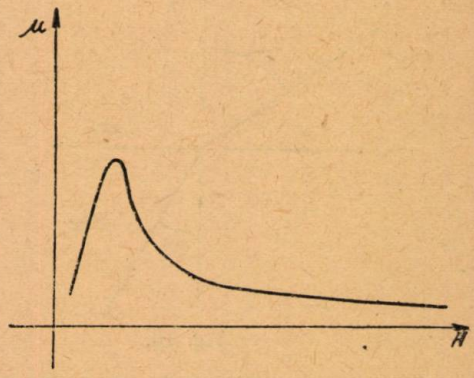


Fig. 9

Această variație a lui μ în funcție de H corespunde variației numărului de regiuni de magnetizare spontană orientate în sensul cîmpului magnetic exterior. Numărul regiunilor de magnetizare spontană fiind limitat într-un anumit corp, contribuția mediului respectiv la creșterea cîmpului magnetic rezultant scade în măsura în care scade numărul de regiuni rămase neorientate. Această contribuție este nulă pentru cazul cînd toate regiunile s-au orientat, permeabilitatea magnetică devenind egală cu unitatea.

Pentru a explica drumul străbătut de liniile de forță magnetică trebuie să mai facem două precizări în legătură cu aplicarea legilor lui Kirchhoff la un *circuit* magnetic și la refracția liniilor de forță magnetică.

Un circuit magnetic este reprezentat prin totalitatea mediilor magnetice prin care trece un flux magnetic. Fluxul magnetic reprezintă totalitatea liniilor de forță magnetică care trec printr-o suprafață dată. Inducția magnetică B

fiind egală cu numărul de linii de forță care trec printr-un cm² din suprafața considerată, legătura dintre flux și inducția magnetică se reprezintă prin relația $\Phi = BS$.

Noțiunea de flux magnetic este analogă cu noțiunea de intensitate a curentului din *electricitatea dinamică*. În mod asemănător putem aplica unui circuit magnetic legile lui Ohm și ale lui Kirchhoff. Dacă presupunem că o piesă străbătută de un flux magnetic Φ prezintă la un moment dat o incluzie care se comportă din punct de vedere magnetic ca un mediu dia- sau paramagnetic, în locul unde apare această incluzie fluxul de inducție magnetică se ramifică conform legilor lui Kirchhoff. Conform acestor legi, în fiecare loc unde fluxul se ramifică intensitatea fluxurilor care vin este egală cu suma fluxurilor are pleacă. De asemenea, mărimea fluxului printr-o ramificație este invers proporțională cu rezistența pe care acea ramificație o opune trecerii liniilor de forță magnetică.

În magnetism această rezistență poartă denumirea de reluctanță și este o mărime care depinde, ca și rezistența electrică, de lungimea drumului parcurs de flux, de secțiunea transversală a circuitului și de permeabilitatea mediului. Relația prin care se exprimă reluctanța unui circuit magnetic este analogă cu aceea care exprimă rezistența unui circuit electric $R_m = \frac{l}{\mu s}$. În tendința lor de a parcurge drumuri de reluctanță minimă la limita a două medii, liniile de inducție magnetică se refractă asemănător razelor de lumină, și anume, astfel încît raportul dintre tangentele trigonometrice ale unghiurilor de incidență și de refracție să fie egal cu raportul permeabilității respective.

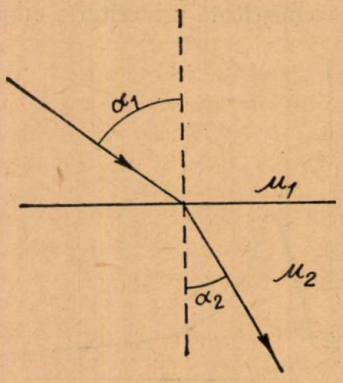


Fig. 10

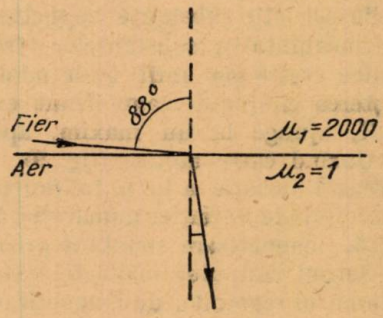


Fig. 11

Considerînd (fig. 10) o linie de forță magnetică care trece dintr-un mediu a cărui permeabilitate este μ_1 în alt mediu cu permeabilitatea $\mu_2 > \mu_1$ scriem

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Să calculăm unghiul de refracție al unor linii de inducție magnetică la suprafața de separație între fier ($\mu_1 = 2000$) și aer ($\mu_2 = 1$) pentru un unghi de incidență $\alpha_1 = 88°$ (fig. 11). Avem:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\operatorname{tg} 88°}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{2000}{1} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{2000}\operatorname{tg} 88 = 0{,}0143$$

$$\alpha_2 = 50 < 1°$$

Acest exemplu pune în evidenţă faptul că liniile de forţă magnetică ies dintr-o substanţă feromagnetică în aer întotdeauna aproape perpendicular pe suprafaţa de separaţie. Pe de altă parte, cînd liniile de forţă magnetică cad din aer pe o substanţă feromagnetică ele se refractă atît de tare încît în fier ele sînt paralele cu suprafaţa şi nici una în afară de linia care cade sub un unghi de incidenţă $i = 0$, nu traversează fierul.

Consideraţiile teoretice de mai sus explică dece se aglomerează pulberea de fier în regiunile cu defecte şi totodată ne permit să facem cîteva aprecieri asupra sensibilităţii metodei.

Dacă prin piesa de controlat (fig. 12) se induce un cîmp magnetic caracterizat printr-un număr oarecare de linii de forţă pe unitatea de suprafaţă, acest cîmp, traversînd un defect oarecare este micşorat foarte mult. Aplicînd prima lege a lui Kirchhoff în secţiunea S_1 şi apoi în secţiunea S_2, vedem că fluxul magnetic care se ramifică la întîlnirea unui defect este egal cu fluxul magnetic recombinat după trecerea acelui defect. Urmează că într-o secţiune cu defect, de exemplu S_3, fluxul este acelaşi ca într-o secţiune lipsită de defect, S_1 sau S_2. Deoarece în interiorul defectului inducţia scade, conser-varea fluxului se realizează prin creşterea inducţiei magnetice în metalul sănătos pe porţiunea în care se află defectul.

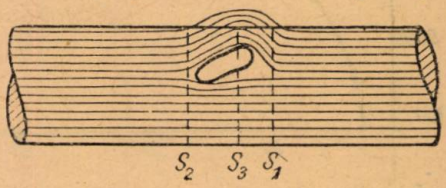


Fig. 12

În concluzie, liniile de forţă magnetică urmînd drumul de reluctanţă minimă se concentrează în regiunile dintre defect şi suprafaţa piesei. Acest fapt echivalează cu o creştere a intensităţii cîmpului în regiunile respective şi, conform diagramei din fig. 9, pentru o anumită valoare a acestei intensităţi, din cauza scăderii permeabilităţii, o parte din liniile de forţă ocolesc defectul trecînd prin aer şi oreientează pulberea de fier de pe suprafaţa piesei în lungul lor.

Dacă defectul este prea îndepărtat de suprafaţa metalului creşterea inducţiei magnetice în porţiunea dintre defect şi suprafaţă fiind prea mică, liniile de forţă nu ies din metal şi detectarea defectului respectiv nu este posibilă.

Sporirea liniilor de forţă magnetică este condiţionată şi de dimensiunile defectului care provoacă distorsiunea unui număr mai mare sau mai mic de linii de forţă.

Presupunem un defect perpendicular pe direcţia fluxului magnetic situat la o distanţă d de marginea piesei şi avînd dimensiunile notate în fig. 13. Să

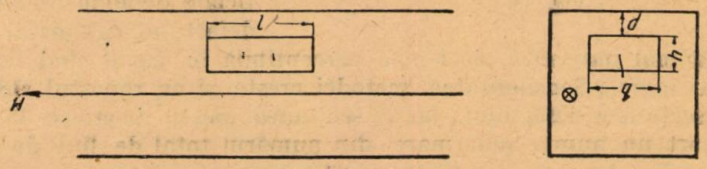


Fig. 13

examinăm cum variază sensibilitatea metodei în funcţie de raportul d/h. În diagramă (fig. 14) se vede că sensibilitatea creşte cu cîmpul magnetizant; dacă însă, acest raport depăşeşte o anumită valoare metoda nu mai este apli-

cabilă. Ea este sensibilă pentru d mic şi h mare cînd se obţine detectarea defectelor chiar la cîmpuri magnetice reduse.

Sensibilitatea metodei creşte şi cu grosimea defectului; dacă defectul este prea profund metoda nu dă rezultate. Aşa dar, metoda magnetică serveşte la studiul suprafeţelor cînd profunzimea defectului nu depăşeşte limita de 1—2 cm.

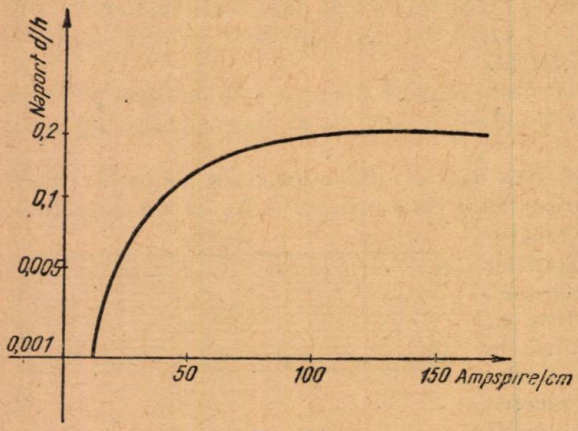


Fig. 14

Cînd defectele ajung pînă la suprafaţa piesei, sensibilitatea metodei creşte astfel încît se pot detecta defecte de 1 mμ lărgime. În fig. 7 b este reprezentat profilul unei piese tăiate în dreptul unui defect superficial, şi anume, o fisură transversală. În cuprinsul articolului am văzut că substanţele feromagnetice prezintă regiuni de magnetizare spontană care pot fi considerate magneţi elementari; sub influenţa cîmpului exterior ei se orientează în sensul acestui cîmp. Rezultă că la secţionarea unui asemenea material aflat într-un cîmp magnetic apar doi poli faţă în faţă, unul sud şi altul nord. Aşadar, pentru o piesă întreruptă din cauza unei incluziuni sau fisuri spectrul magnetic este identic cu cel obţinut la experienţa din fig. 6 b. O parte din liniile de forţă vor ocoli defectul trecînd prin metal, iar altă parte vor trece prin aer ieşind din polul nord pentru a intra în polul sud.

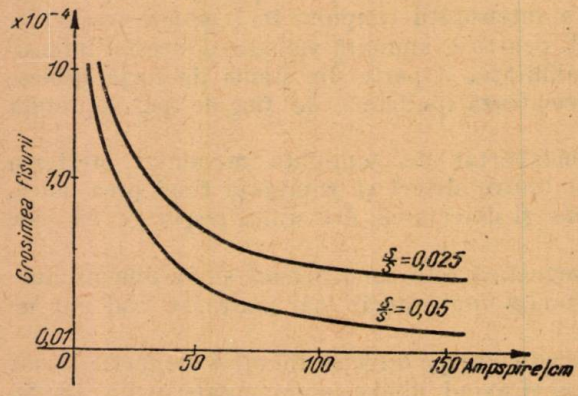


Fig. 15

Teoria referitoare la refracţia liniilor de forţă completează înţelegerea traiectoriei acestora Liniile de forţă ies şi respectiv intră în metal sub un unghi d-90° sau foarte apropiat de aceae stă valoare faţă de suprafaţa de separaţie, indiferent de înclinaţia liniilor de forţă care străbat metalul.

Evident sensibilitatea metodei în cazul defectelor superficiale depinde de lărgimea l a defectului, aglomerarea pulberii de fier fiind mai puternică, deci mai perceptibilă în cazul cînd fisura are o lărgime mai mare. Sensibilitatea metodei creşte şi cu raportul s/S în care s reprezintă secţiunea defectului, iar S secţiunea piesei, deoarece la creşterea acestui raport un număr mai mare din numărul total de linii de forţă trec prin aer. Cu cît este mai fină fisura cu atît mai puternic trebuie să fie cîmpul magnetic, pentru ca ea să fie detectată. Pentru aceeaşi lărgime a fisurii cîmpul magnetizant necesar este funcţie de suprafaţa pe care o ocupă fisura în raport cu secţiunea piesei (fig. 15).

La aplicarea acestei metode s-a ivit dificultatea că la trecerea prin piesă a unui cîmp magnetic longitudinal nu erau detectate decît defectele transversale; celelalte defecte orientate în toate direcţiile, rămîneau nedescoperite. S-a dovedit a fi suficientă însă, cercetarea pieselor în două direcţii perpendiculare, făcînd să treacă prin ele pe lîngă cîmpul magnetic longitudinal, un cîmp magnetic transversal cu ajutorul căruia se pun în evidenţă defectele longitudinale. Pentru inducerea în piesă a cîmpului magnetic transversal se trece prin piesă un curent de o intensitate de circa 2000 A.

În fig. 16 se vede schema de principiu a unui defectoscop magnetic. Montajul dublu permite obţinerea unui cîmp magnetic longitudinal sau transversal. Piesa este strînsă în *m* între cei doi *poli N* şi *S*, cîmpul magnetic longitudinal se obţine excitînd bobinele *B* şi *B'* cu ajutorul unui curent continuu. Pentru obţinerea cîmpului transversal se trece prin piesă un curent de intensitate mare, obţinut cu ajutorul unui transformator *T*. În *C* electromagnetul este întrerupt şi legătura este realizată prin intermediul unui material izolant foarte subţire, care opune o reluctanţă minimă trecerii fluxului magnetic.

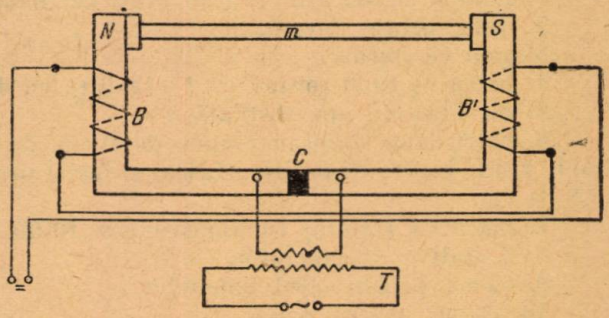


Fig. 16

Din expunerea principiilor care stau la baza defectoscopiei magnetice rezultă că această metodă nu este aplicată decît la materialele feromagnetice — fier, nichel, crom şi aliajele lor — în care poate fi indus un curent magnetic puternic. În aplicarea ei industrială, metoda prezintă o mare simplitate, este rapidă şi puţin costisitoare.

Dezavantajul ei principal constă în faptul că examenele sînt exclusiv vizuale; nu rămîne nici un indiciu care ar permite compararea ulterioară, a defectelor, cum este posibil de exemplu, la metoda radiografică.

Un alt dezavantaj este faptul că această metodă permite detectarea defectelor dispuse numai către suprafaţa piesei.

Cu toate aceste dezavantaje, metoda magnetică se aplică pe scară largă în industrie; datorită avantajelor expuse mai sus ea este aplicabilă la o serie întreagă de semifabricate şi piese finite. Prin această metodă se obţin indicii suficiente asupra calităţii materialelor ; numai piesele cu defecte superficiale frecvente, care în cele mai multe cazuri implică şi defecte de profunzime, se supun cercetărilor mai costisitoare şi mai dificile cu raze X sau cu ultrasunete.

CONSTRUCŢIA UNUI REFRACTOMETRU PENTRU LICHIDE

V. PAVLU
Conf. univ.

Materiale necesare

1. Lampă electrică de cca 40 Waţi cu filament liniar alimentat la priză,
2. dulie pentru lampă,
3. şnur cu stecher,
4. balon cu fund rotund de 1—1½ litri, cu dop,
5. un litru de apă distilată,
6. patru lame dreptunghiulare de sticlă, de grosime cît mai mică (preferabil lame pentru dispozitive Leica) şi feţele perfect paralele, cu dimensiunile 3,5—4 cm,
7. placă de traforaj cu dimensiunile 10·50 cm,
8. 3 stative de laborator,
9. clemă pentru gîtul balonului,
10. clemă pentru dulie,
11. foaie de hîrtie neagră de cca 40. 40 cm,
12. 10 g parafină,
13. monocromator (geam colorat cu galben de sodiu).

Principiul metodei

Cu ajutorul unei lentile biconvexe alcătuite dintr-un balon de sticlă umplut cu apă distilată, diafragmat pentru limitarea aberaţiei de sfericitate, se proiectează imaginea verticală liniară a filamentului incandescent pe un ecran, fasciculul fiind deviat de o prismă de lichid aşezată în poziţia deviaţiei minime. Cunoscîndu-se unghiul A al prismei şi deviaţia minimă a fasciculului, se calculează indicele relativ al lichidului în raport cu aerul, cu ajutorul relaţiei

$$n_r = \frac{\text{siu}\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}.$$

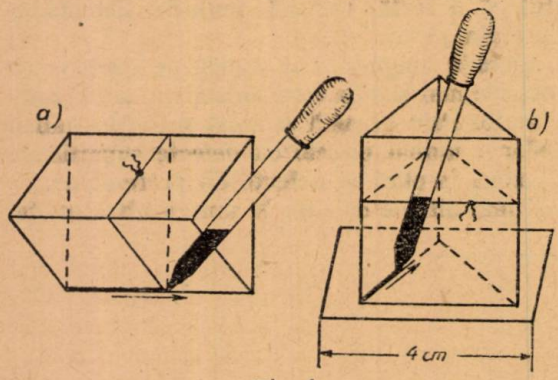


Fig. 1

Realizarea

Pentru confecţionarea vasului prismatic, care se umple cu lichidul de cercetat, se aşează cele trei lame dreptunghiulare de sticlă, foarte bine curăţite şi uscate, cu laturile de 4 cm alipite ca muchiile laterale ale unei prisme triunghiulare drepte şi se leagă cu o aţă (fig. 1 a).

Cu ajutorul unui picurător încălzit se lipesc părţile interioare ale celor trei unghiuri diedre cu parafină topită. Pentru ca lipiturile să fie perfecte se lucrează la temperatura de cca 20 — 25°C. Se aşează apoi vertical corpul alcătuit din cele trei feţe laterale ale prismei pe a patra placă de sticlă, avînd una din laturile de bază paralelă şi apropiată de latura de 4 cm, care va constitui baza prismei. Cu ajutorul picurătorului şi în aceleaşi condiţii se lipesc muchiile la bază, în interior, acoperind eventual cu parafină toată suprafaţa interioară a bazei. Se lipesc apoi şi în exterior muchiile bazei. Se desface legătura feţelor laterale. Se curăţă apoi feţele laterale la exterior şi în interior de urmele de parafină cu ajutorul unui beţişor înfăşurat cu vată umezită cu benzină.

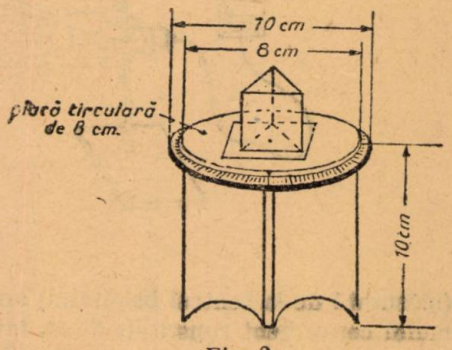


Fig. 2

Vasul prismatic se aşează pe o măsuţă rotundă cu trei picioare (fig. 2), confecţionată din placaj. Concentric cu faţa rotundă cu diametrul de 10 cm a mesuţei se află o altă placă rotundă din placaj, cu diametrul de 8 cm. Porţiunea în formă de coroană care rămîne vizibilă din faţa mesuţei se gradează cu ajutorul unui raportor, iar placa circulară cu diametrul de 8 cm se prevede cu un indice (*i*) şi se fixează concentric pe faţa mesuţei cu ajutorul unei ţinte, care să permită rotirea. În condiţiile descrise mai sus se poate determina indicele de refracţie numai al lichidelor în care parafina nu este solubilă. Pentru a fi perfect curate, feţele interioare ale prismei se spală cu apă distilată după fiecare determinare. Pentru lichidele în care parafina este solubilă lipiturile prismei se fac cu clei sau celuloid dizolvat în acetonă. În acest caz, pentru spălarea prismei se foloseşte un solvent volatil, miscibil, cu lichidul al cărui indice de refracţie s-a determinat, însă în care cleiul folosit nu este solubil. Se va evita ştergerea şi apăsarea feţelor prismei, pentru a nu le sparge sau deslipi în felul acesta.

Pentru fixarea lămpii electrice (*b*) şi a balonului (*l*) se folosesc stativele cu clema reglabilă. Pentru stabilitate mai mare se recomandă folosirea stativelor cu trei picioare. Dacă dispunem numai de stative cu plăci dreptunghiulare, lipim pe feţele inferioare ale plăcilor trei rondele de placaj cu diametrul de 1 cm, aşezate ca vîrfurile unui triunghi echilateral, cu centrul în mijlocul plăcilor.

Pe primul stativ se fixează orizontal, dulia, pentru ca filamentul lămpii să stea vertical. Filamentul lămpii va avea rolul fantei de la colimatorul unui spectroscop. Filamentul spiralat, fiind foarte luminos, va permite proiectarea lui la distanţă mai mare, chiar în condiţii de semiobscuritate, iar imperfecţiunea lentilei de sticlă va face ca imaginea spiralată a filamentului să se contopească într-o dungă verticală (fig. 3 a).

Balonul de sticlă (*l*) se fixează vertical cu ajutorul unei cleme (avînd braţele învelite în bucăţi de tub de cauciuc) de un stativ de asemenea cu trei picioare astfel încît centrul lui să fie la aceeaşi înălţime cu mijlocul filamentului vertical al lămpii (fig. 3 a). În dreptul lămpii se lipeşte de balon o foaie de hîrtie neagră avînd dimensiunile de cca 40. 40 cm şi o deschidere circulară cu diametrul de 3—4 cm, astfel încît centrul deschiderii circulare să fie aşezat pe linia definită de mijlocul filamentului şi centrul balonului. Această hîrtie

va avea rolul unei diafragme pentru înlăturarea parțială a aberației de sfericitate și totodată va împiedica trecerea luminii pe ecranul sau peretele pe care se proiectează spectrul. Balonul de sticlă se așază față de filament la o distanță

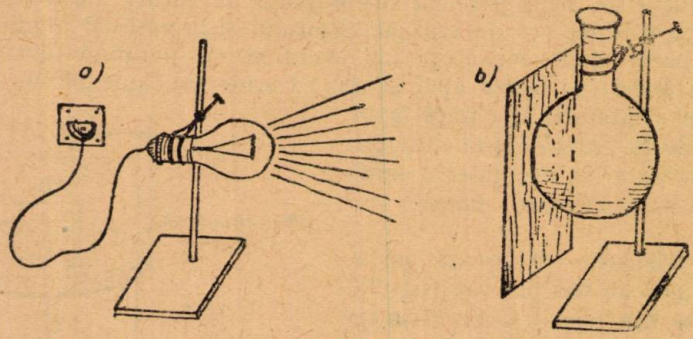


Fig. 3

(măsurată de la centrul balonului) aproximativ egală cu distanța focală a sistemului convergent constituit de el, înălțimea centrului balonului și a mijlocului filamentului fiind aproximativ de 12 cm. Aceasta se stabilește făcînd o primă încercare de proiectare a imaginii filamentului fără prismă (fig. 4), pe un ecran sau perete alb aflat la 3—4 m distanță, astfel încît axul optic al sistemului să fie perpendicular pe ecran, imaginea (I) trebuind să fie cît mai clară.

Se așază apoi și mesuța cu vasul prismatic umplut cu lichidul de cercetat la cca 20 cm de balon astfel încît indicele (i) și bisectoarea unghiului A din vîrful prismei să se afle într-un plan perpendicular pe axul principal al sistemului

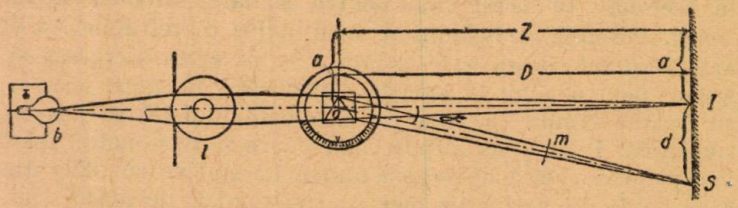


Fig. 4

și aceasta să întîlnească prima față a prismei în centrul ei. Se potrivește apoi cu ajutorul clemelor lampa și filamentul astfel încît partea inferioară a fasciculului să traverseze prisma de lichid și să dea spectrul (S), iar partea superioară să treacă fără deviere și să focalizeze pe ecran în (I).

Pentru ca axul optic al acestui sistem să fie perpendicular pe ecran, proiecția se face paralel cu un zid (Z) al camerii, ecranul fiind perpendicular pe el, astfel încît imaginea (I) să se formeze la o distanță (a) de zidul (Z) egală cu distanța la care se găsește mijlocul fețelor prismei față de același zid. În aceste condiții triunghiul OIS este dreptunghic în I.

Pentru determinarea indicelui de refracție se folosește minimul de deviație (D_m), adică poziția prismei pentru care unghiul de incidență este egal cu unghiul de emergență, iar bisectoarea unghiului A este și bisectoarea unghiului obtuz format de direcția razei incidente cu direcția razei emergente, respectiv bisectoarea unghiului A face cu poziția ei inițială un unghi egal cu $D_m/2$. Pentru

aceasta se roteşte discul circular care suportă prisma, în sensul acelor unui ceasornic, urmărindu-se deplasarea spectrului (S) către (I). Unghiul α scade, atinge valoarea minimă, apoi creşte. Oprim discul în momentul în care unghiul α are valoarea minimă. În acest moment indicele (i) va arăta pe gradaţie unghiul de rotaţie al prismei. Unghiul de deviaţie minimă este dublul acestui unghi. Acest unghi poate fi determinat mai exact, folosind relaţia

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{d}{D}$$

şi tabla de linii trigonometrice.

Pentru determinarea mai precisă a indicelui de refracţie se foloseşte un monocromator (lamă cu feţe paralele care lasă să treacă numai radiaţii de o anumită lungime de undă, — de exemplu radiaţia corespunzătoare galbenului de natriu); monocromatorul se aşează cu ajutorul unui al treilea stativ prevăzut cu clemă, între fasciculul deviat şi ecran.

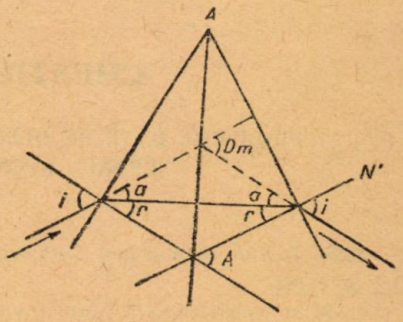


Fig. 5

Se însemnă pe ecran poziţia imaginii (I) şi a galbenului corespunzător spectrului (S), apoi se măsoară la lumină distanţele d şi D (D este distanţa de la imginea (I), măsurată pe axul principal, pînă la noua poziţie a bisectoarei unghiului A).

Fig. 5 reprezintă mersul razelor de lumină în poziţia minimului de deviaţie. Observăm că mersul razelor este simetric faţă de planul bisector al prismei corespunzător unghiului A. Avem:

$$\sin i = n \sin r \quad \text{sau} \quad n = \frac{\sin i}{\sin r},$$

însă:

$$r = \frac{A}{2} \quad \text{şi} \quad a = \frac{D_m}{2}, \quad \text{deci } i = \frac{A}{2} + \frac{D_m}{2},$$

de unde:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Unghiul $A/2$ are 30°, deoarece baza prismei este un triunghi echilateral. Folosind un filament liniar nespiralat, iar în locul balonului de sticlă cu apă distilată obiectivul unui aparat de proiecţie corectat şi luminos, şi lucrînd la întunerec, obţinem rezultate mult mai precise.

Determinarea indicelui de refraţie este un mijloc preţios de identificare a unei substanţe pure şi face parte din metodele fizice de analiză chimică, metode care se impun din ce în ce mai mult prin simplitatea, precizia şi rapiditatea lor. Dacă lichidul al cărui indice de refracţie se determină este un amestec

de două lichide pure miscibile care nu reacţionează din punct de vedere chimic, indicele de refracţie va avea totdeauna aceeaşi valoare pentru aceeaşi compoziţie procentuală, deci măsurînd indicele de refracţie stabilim concentraţia. În aceste condiţii, distanţa IS (fig. 4) poate fi gradată în procente referitoare la cele două lichide pure amestecate.

Ţinînd seama de faptul că pentru construcţia acestui refractometru sînt necesare numai materiale care procură uşor, rezultatele obţinute, deşi nu atît de precise ca cele ale refractometrului propriu zis, pot fi considerate mulţimitoare.

În afară de faptul că oferă posibilitatea determinării indicelui de refracţie relativ (în raport cu aerul) foarte apropiat de indicele absolut — aerul avînd indicele absolut practic 1, dispozitivul descris mai sus este o minunată lucrare practică la cursul de fizică pentru şcolile medii.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEME DATE DE OLIMPIADA MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ CENTRUL BUCUREŞTI, 20 FEBRUARIE 1955

Clasa VIII-a

1725. Într-un plan se dau două drepte D, D_1 şi un punct oarecare A, nesituat pe D sau D_1. Se cere:

1. Să se construiască secantele AMB şi ANC (M şi N pe D, iar B şi C pe D_1 astfel ca $MB = AN$ şi $NC = 2\,AN$.

2. Paralela dusă prin A la D_1 întîlneşte pe D în P. Să se arate că mediana vîrfului B a triunghiului ABC trece prin P.

1726. Se dă ecuaţia $x^2 + px + q = 0$. Se cere să se formeze ecuaţia care dă rădăcinile

$$X_1 = \frac{x_1}{x_2^2} \quad ; \quad X_2 = \frac{x_2}{x_1^2}$$

Să se arate că discriminantul (realizantul) ecuaţiei obţinute este divizibil cu discriminantul ecuaţiei date.

Clasa XI-a

1727. Fie $ABCDEF$ un exagon regulat şi P punctul de întîlnire al tangentelor duse la cercul său circumscris în punctele A şi C:

1. Să se demonstreze ca PF trece prin mijlocul laturii AB.

2. Să se arate că $PF = R\sqrt{7}$ unde R este raza cercului circumscris.

1728. *a)* Să se determine valoarea lui x ştiind ca $\log_4 \log_x 16 = 2$

b) Să rezolve sistemul de ecuaţii

$$x^2 + y^2 + 2x = 9$$
$$y(x + 1) = 3.$$

Clasa X-a

1729. Într-un paralelipiped dreptunghi se cunoaşte diagonala sa d, perimetrul bazei $2p$ şi aria sa totală $2t$. Se cere:

1. Să se calculeze volumul în cazul particular

$$d = 14; \quad 2p = 36; \quad 2t = 288$$

2. Să se calculeze dimensiunile în cazul general. Discuție.

3. În acest ultim caz să se calculeze unghiurile diagonalei cu fiecare din cele șase fețe ale paralelipipedului sub forma unei funcții inverse.

4. Să se demonstreze că cele patru diagonale ale paralelipipedului sînt concurente în punctul de întîlnire al celor trei axe ale sale.

5. Dacă paralelipipedul devine cub, să se afle volumul, diagonala și suprafața totală în funcție de semiperimetrul bazei.

Școli medii tehnice, anul I

1730. Să se rezolve sistemul de ecuații;

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{7}{48}$$

și să se verifice rezultatul.

1731. O bară mobilă AB, cu lungimea de 16 cm, poate să alunece de-alungul dreptei AB pe care este așezată. La distanța de 9 cm de dreapta AB și paralel cu ea se află bara fixă DC cu lungimea de 24 cm.

1. Fie O, punctul de intersecție al segmentelor AC și BD care unesc cruciș capetele celor două bare AB și DC. Se cere să se calculeze depărtările lui pînă la dreptele AB și DC și să se deducă locul geometric descris de el atunci cînd bara AB își execută alunecarea ei de-a lungul dreptei AB.

2. La ce depărtare de dreapta AB trebuie să așezăm un izvor luminos punctiform I, pentruca umbra barei mobile AB pe dreapta DC să coincidă cu bara fixă DC?

3. Fie M, mijlocul barei mobile AB și N mijlocul barei fixe DC. Să se arate că dacă izvorul luminos I, așezat în poziția de mai înainte, umbrele punctelor M și O coincid cu punctul N.

4. Să calculeze lungimea umbrei dată de bara mobilă AB pe o paralelă cu aceasta bară dusă prin punctul O, atunci bara AB este luminată de izvorul I de mai sus.

5. Să se calculeze care ar fi lungimea umbrei aceleiași bare AB pe o paralelă cu această bară dusă însă, prin punctul I, dacă de data aceasta izvorul luminos ar fi așezat pe punctul O.

Anul II

1732. Un observator se află așezat la șes în planul vertical determinat de vîrfurile a doi munți și de o aceiași parte a lor. Razele vizuale care pornesc din același punct al șesului și se duc la fiecare din cele două vîrfuri de munte, fac cu planul orizontal al șesului, unghiurile de respectiv 8°50′ și 16°10′.

După aceea observatorul se apropie de munți rămînînd necontenit în același plan vertical și tot în planul orizontal al șesului, pînă cînd cele două raze vizuale precedente se confundă într-una singură. În acest moment, raza vizuală unica face un unghi de 35° cu planul șesului, iar punctul ei de pornire se află depărtat cu 4350 m de punctul precedent de pornire.

1. Care este înălțimea ficcărui vîrf de munte față de plannl orizontal al șesului în care este situat observatorul? Calculul acestor înălțimi se va face cu o precizie de 0,05 m.

2. Care este distanța dintre vîrfurile celor doi munți calculată cu aceiași precizie?

Școli pedagogice, anul I

1733. În anul 1954, numărul oamenilor muncii din R.P.R. trimiși la odihnă a întrecut numărul celor trimiși în 1952 cu 160 000 și al celor trimiși în 1950 cu 334 000.

Să se afle cîți oameni ai muncii au fost trimiși la odihnă în 1954, știind că în 1952 numărul celor trimiși întrecea cu 8 000 dublul numărului celor plecați în 1950.

1734. Bazele unui trapez sînt $AB = a$ și $CD = b$. Să se afle distanța între punctele E, F care împart laturile neparalele AD, BC, ale trapezului într-un raport dat m.

$$\left(\frac{EA}{ED} = \frac{FB}{FC} = m\right)$$

Anul II

1735. În anul 1954 numărul tractoarelor care lucrau pe cîmpiile noastre reprezenta $\frac{25}{39}$ din totalul combinelor, tractoarelor și plugurilor de tractor. Numărul plugurilor de tractor reprezenta $\frac{13}{14}$ din suma numărului combinelor și al plugurilor de tractor și era cu 12 000 mai mare decît numărul combinelor; $\frac{1}{10}$ din numărul tractoarelor, $\frac{1}{100}$ din numărul plugurilor de tractor, $\frac{1}{5}$ din numărul combinelor adunate dau un număr care este întrecut de $\frac{2}{3}$ din numuărul G.A.S.-urilor, și întovărășirilor cu 90.

Să se afle cîte G.A.S.-uri și întovărășiri am avut în 1954.

1736. Într-un cerc cu raza R sînt înscrise trei cercuri egale tangente între ele. Să se afle raza lor.

Anul III

1737. Un triunghi echilateral ABC are latura de 12 cm. Pe baza BC ca diametru, se construește un cerc I care taie laturile AB și AC respectiv în M și N. Să se afle aria corpului obținut prin rotirea figurii formată de segmentul de dreapta BO, arcul de cerc BM și segmentul de dreapta MO, în jurul perpendicularei AO pe BC.

1738. Un magazin avea 80 de costume pentru copii, toate de aceiași calitate. Întîi s-au vîndut 0,3 din numărul celor cu prețul fixat, apoi restul, cu reducere de 8,25 lei la fiecare costum. Pentru toate cele 80 costume, magazinul a încasat 6138 lei. Să se afle:

1. care a fost costul unui costum înainte de reducere?
2. care a fost prețul unui costum după reducere?
3. de cît la sută a fost reducerea?

DIN PROBLEMELE DATE LA „OLIMPIADA DE FIZICĂ" ETAPA RAIONALĂ BUCUREȘTI, 27 FEBRUARIE 1955

Clasa VIII-a

1739. Un tren de 400 tone merge cu 80 km/h și trece printr-un strat de zăpadă. La ieșirea din strat trenul are numai 30 km/h.

a) Care este energia consumată la trecerea prin zăpadă știind că locomotiva a lucrat cu același consum de abur?

b) Știind că stratul este lung de 1 km, să se afle care este rezistența întîmpinată de tren.

Clasa IX-a

1740. O butelie conține la 20°C hidrogen la presiunea de 4 Atm. În timpul unui incendiu butelia explodează. Să se calculeze temperatura la care a explodat butelia știind că ea putea rezista pînă la presiunea de 12 Atm.

Clasa X-a

1741. 1. Cum trebuie legate trei becuri construite pentru rețeaua de 110 V la o rețea de 220 V, așa fel încît ele să ardă normal (adică tensiunea la bornele fiecărui bec să fie de 110 V). Unul din becuri are 100 W, iar celelalte două cîte 50 W fiecare.

2. Ce intensitate de curent circulă prin fiecare bec?

3. Care este rezistența echivalentă care le-ar înlocui pe toate trei?

Şcoli medii tehnice

Anul I

1742. Să se afle masa plumbului topit într-un cuptor de turnătorie, cu randamentul 20% dacă cuptorul consumă o tonă de cărbune cu puterea calorifică de 7000 kcal/kg. Temperatura iniţială a plumbului este de 10°C, căldura de topire = 5 kcal/kg, temperatura de topire = 327°C, căldura specifică = 0,03 kcal/kg grad.

1743. Să se determine secţiunea conductorului de aluminiu care aduce energia electrică la un motor care funcţionează la tensiunea de 120 V cu I = 20 A. Energia este transmisă de la un dinam cu tensiunea de 127 V printr-o linie lungă de 150 m; rezistivitatea aluminiului este de 0,03.

PROBLEME DATE LA OLIMPIADA MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ CENTRUL IAŞI — 20 FEBRUARIE 1955

CLASA VIII-a

1744. — În planul unui cerc de rază R se ia un punct A la distanţa d de centru. Prin A se duce o secantă, astfel că cercul determină pe secantă o coardă de lungime $2a$. Care sînt lungimile segmentelor secantei? Discuţie.

1745. — Pe latura BC a triunghiul ABC se ia un punct D iar triunghiurilor ABD şi ACD se circumscriu cercurile O_1 şi O_2. Să se demonstreze;

a. Punctele de intersecţie cu cercurile, ale diametrelor duse prîn A şi al doilea punct de intersecţie al cercurilor sînt colineare.

b. Raportul razelor celor două cercuri este constant.

c. Triunghiul ABC este asemenea triunghiului AO_1O_2.

d. Să se afle locul geometric al proiecţiei punctului A pe O_1O_2.

Clasa IX-a şi anul II Şcoli medii tehnice

1746. — Unui cerc de raza R_1 i se construieşte un cerc concentric de rază R_2 şi un cerc tangent exterior de rază R_3, astfel că R_1, R_2, R_3 să poată fi privite ca termeni ai unei progresii geometrice descrescătoare. Aria coroanei circulare este de 18π m², iar distanţa centrelor este de 12 m.

Fie O_1 şi O_2 cele două centre şi A punctul de contact al cercurilor. Se duce $AB \perp O_1O_2$.

1. Să se afe cele trei raze; *b*) să se determine AB astfel ca unghiul $O_1BO_2 = 45°$; *c*) la fel pentru unghiul $O_1BO_2 = n°$.

Clasa X-a

1747. — În vîrful B al unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC se ridică perpendiculară pe planul triunghiului. Se consideră pe ea punctul M depărtat cu 9 cm de plan şi cu 15 cm de ipotenuza triunghiului. Ştiind că perimetrul triunghiului este de 60 cm, să se afle laturile lui.

1748. — Să se verifice identitatea

$$E = \frac{\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a).\operatorname{tg} x.\operatorname{tg}(x+a)} = \frac{\cos 2a + 3\cos 2x + 2}{\cos 2a - \cos 2x}$$

şi să se determine valoarea lui a pentru care expresia este independentă de x.

Anul I — Şcoli pedagogice

1749. — 1) Se dă unghiul drept $x0y$. O dreaptă d taie laturile $0x$ şi $0y$ în A şi B respectiv. Se construiesc în afara unghiului, patratele $OACD$ şi $OBEF$. Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a laturilor CD şi EF opuse laturilor OA şi OB cînd d se deplasează paralel cu sine însuşi.

2. Să se arate că p fiind prim, p^2-1 este divizibilă prin 24.

Anul II — Şcoli pedagogice

1750. — Cineva a plecat de acasă cu o sumă de bani. Pe drum cheltuieşte atîţia lei cîţi de 5 lei sînt în suma cu care plecase. La uzină primeşte un premiu care împreună cu banii ce-i mai avea fac atîtea sute cîţi de 25 lei sînt în banii ce-i avea în buzunar. Depune la CEC 300 lei şi se întoarce acasă cu dublul sumei cu care plecase la început.

1. Cu ce sumă plecase? b) Cît a fost premiul? Se cere soluţia aritmetică.

1751. — Să se demonstreze că raza cercului exînscris tangent la ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu suma razelor celorlalte două cercuri exînscrise, plus raza cercului înscris.

Anul III — Şcoli pedagogice

1752. — În vîrful B al unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC se ridică perpendiculara pe planul triunghiului. Se consideră pe ea punctul M depărtat cu 9 cm de plan şi cu 15 cm de ipotenuza triunghiului. Ştiind că perimetrul triunghiului este de 60 cm să se afle laturile lui.

1753. — Să se arate că dacă un număr este suma a două patrate, dublul sau şi patratul său sînt deasemenea sume de două patrate.

Anul I — Şcoli medii tehnice

1754. — Pe laturile a, b, c ale unui triunghi ABC se construiesc 3 dreptunghiuri asemenea.

Să se afle înălţimile acestor dreptunghiuri dacă aria dreptunghiului construit pe latura a ca bază întrece cu k^2 suma ariilor celorlalte 2 dreptunghiuri. Discuţia soluţiilor.

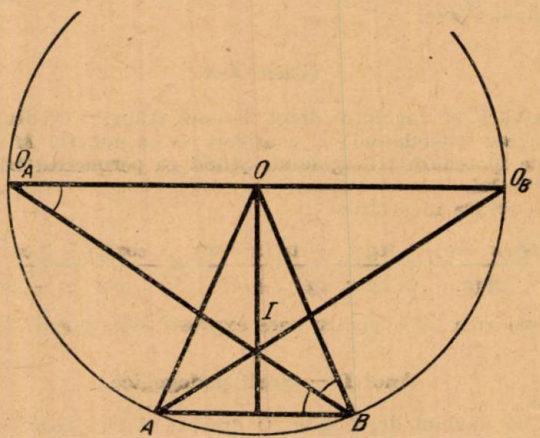
PROBLEME REZOLVATE

Problema E: 534

Se consideră un triunghi isoscel OAB $(OA=OB)$ în care latura OA rămîne fixă. Să se afle locurile geometrice ale centrelor cercurilor exînscrise în unghiurile A şi B.

Florin Constantinescu

Soluţie. Fie O_A, O_B cele două cercuri exînscrise unghiurilor A şi B. Avem $\sphericalangle ABO_A =$



$= \sphericalangle O_ABO$, însă, $\sphericalangle ABO_B = \sphericalangle OO_AB$, deci triunghiul OO_AB este isoscel iar $OO_A = OB = OA$. Locul lui O_A este cercul O de raza $OA=OB$. Analog, $OO_B = OA=OB$, iar locul lui O_B este tot cercul O de raza $OA=OB$ (O_A şi O_B sînt diametral opuse în cercul O).

Problema 1263

Să se rezolve ecuația $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ *și apoi, folosind rezultatele, să se deducă egalitățile:*

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Desvoltăm membrii ecuației și avem,

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

sau

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

de unde,

$$\cos x(1-\sqrt{2})=\sin x(\sqrt{3}-\sqrt{2}),$$

deci,

$$\operatorname{tg} x=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=(1-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \qquad (1)$$

Pe baza relației $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ ecuația devine

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+x\right) \text{ de unde}$$

$$\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+x \text{ deci } x=-\frac{7\pi}{24}$$

Înlocuind această valoare a lui x în relația (1) avem

$\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{24}\right)=(1-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ care se mai scrie $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Pe baza relației $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ putem scrie

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{24}\right)=-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{24}\right)=-\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{24}$$

deci

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}=-\operatorname{cotg} x=-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$$

Mai avem succesiv,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{24}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}-1}{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}+3-\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$$

$$=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

Însfîrşit, mai avem,

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{24}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}}{1-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}}=\frac{1+(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{1-(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

de unde rezultă că

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$ şi egalităţile au fost astfel stabilite.

Problema 1348

Arătaţi că dacă numerele x, y verifică relaţia $x+y\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^n$ unde n este un număr întreg pozitiv sau negativ, verifică şi relaţia $x^2-5y^2=1$. Deasemenea, reciproca.

(Olimpiada Matematică, Moscova)

Soluţie. Avem

$$(9+h\sqrt{5})^n=(2+\sqrt{5})^{2n}=x+y\sqrt{5}$$

$$x+y\sqrt{5}=2^{2n}+C_{2n}^1\,2^{n-1}(\sqrt{5})^1+\ldots+(\sqrt{5})^{2n}$$

de unde

$$x=2^{2n}+C_{2n}^2\,2^{2n-2}.5^1+\ldots+C_{2n}^{2n-2}\,2^2.5^{n-1}+5^n;$$

$$y=C_{2n}^1\,2^{2n-1}+C_{2n}^3\,2^{2n-3}.5+\ldots+C_{2n}^{2n-3}\,2^3.5^{n-2}+C_{2n}^{2n-1}\,2^1.5^{n-1}$$

iar

$$x-y\sqrt{5}=2^{2n}-C_{2n}^1\,2^{2n-1}(\sqrt{5})^1+\ldots-C_{2n}^{2n-1}\,2^1.5^{n-1}+(\sqrt{5})^{2n}$$

Adică:

$$x-y\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^{2n}$$

şi

$$(x+y\sqrt{5})=(2+\sqrt{5})^{2n}$$

Rezultă

$$x^2-5y^2=(4-5)^{2n}=1.$$

Reciproc, mai întîi avem

$$2\pm\sqrt{5}=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

deci,

$$(2+\sqrt{5})^{2n}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})^{6n};\ \text{deci,}\ x^2-5y^2=1,$$

se mai scrie:

$$(x+\sqrt{5}y)(x-\sqrt{5}y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{6n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{6n}$$

şi deci,

$$x+\sqrt{5}y=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{6n}=(9+4\sqrt{5})^n$$

$$x-\sqrt{5}y=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{6n}=(9-4\sqrt{5})^n$$

Mai avem,

$$(9+4\sqrt{5})^n=\frac{1}{(9-4\sqrt{5})^n}=\frac{(9-4\sqrt{5})^{-n}}{(9^2-16.5)^{-n}}=(9-4\sqrt{5})^{-n}.$$

Cazul cînd n este negativ se reduce la cazul cînd n este pozitiv.

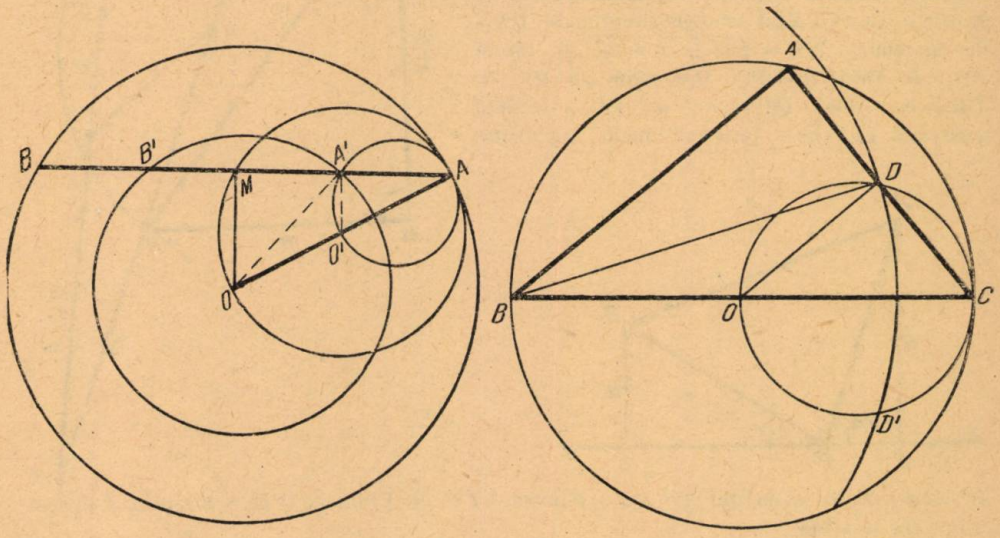
Problema 1351

Să se construiască grafic un triunghi dreptunghic la care cunoaștem ipotenuza și mediana dusă dintr-un unghi ascuțit. Ca aplicație să se ducă o secantă la două cercuri concentrice date, astfel ca cercul mare să fie tăiat după o coardă dublă coardei din cercul mic.

* * *

Soluție. Fie O mijlocul lui BC; avem $OD \parallel AB$, deci $\sphericalangle ODC = 90°$. Urmează construcția.

Fiind dată ipotenuza BC construim acest segment și apoi descriem cercul O de diametru BC. Construim și cercul de diametru OC. Cu centrul în B și cu raza BD egală cu mediana descriem un arc de cerc ce taie cercul de diametru OC în D și D'. Dreapta CD



întîlnește cercul O de diametru BC în A, iar dreapta CD' taie cercul O în A'. Triunghiurile ABC și $A'BC$ sînt triunghiurile căutate.

— În cazul aplicației, fie A un punct pe cercul mare. Considerăm problema rezolvată. Atunci $AB = 2A'B'$ sau $AM = 2A'M$ sau încă, $AA' = A'M$ deci OA' este mediana în triunghiul dreptunghic OMA căci $OM \perp AB$. Deci cunoscînd mediana OA' (raza cercului mic) și ipotenuza OA (raza cercului mare), triunghiul OMA se poate deci construi lesne, apoi se prelungește cateta AM pînă taie cercul mic în B' iar cel mare în B. Secanta AB este secanta căutată.

Problema 1364

Fie o dreaptă xy și două puncte A și B. Să se găsească un punct P pe dreapta xy astfel ca unghiul APx să fie dublul unghiului BPy.

* * *

Soluție dată de **I. I. Cristea,** *Constanța.* Presupunem problema rezolvată. Fie C și D proiecțiile lui B și A pe xy; iar P astfel ca $\sphericalangle APD = 2 \sphericalangle BPC = 2\alpha$, avem $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ (1) și cum $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(APD) = \frac{AD}{DP}$; $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(BPC) = \frac{BC}{PC}$ punînd $AD = a$,

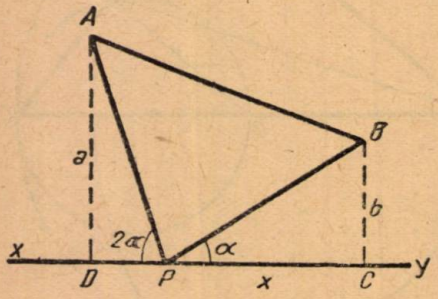
$BC = b$ iar $CD = m$, cunoscute, iar pe $PC = x$ ca necunoscută, din (1) obținem $\frac{a}{m-x} = \frac{2bx}{x^2-b^2}$; $(a+2b)x^2 - 2bmx - ab^2 = 0$ de unde

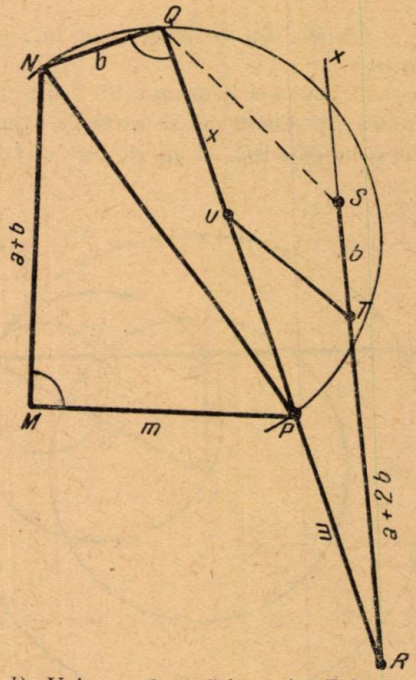
$$x = \frac{bm \pm \sqrt{b^2m^2 + ab^2(a+2b)}}{a+2b} > 0$$

și convine numai

$$x = \frac{b}{a+2b}\left(m + \sqrt{m^2 + (a+b)^2 - b^2}\right).$$

Pentru a construi pe x construim întîi radicalul R dat de $R^2 = m^2 + (a+b)^2 - b^2$, astfel m și $(a+b)$ sînt catetele unui triunghi dreptunghi MNP iar R este o catetă a altui triunghi dreptunghic QPN de ipotenuză $NP = \sqrt{m^2 + (a+b)^2}$ și cateta $NQ = b$. Deci $R = PQ$. Prelungim pe QP cu $PR = m$. Avem $QP = R + m$. Pe o secantă arbitrară ce trece prin R luăm segmentul

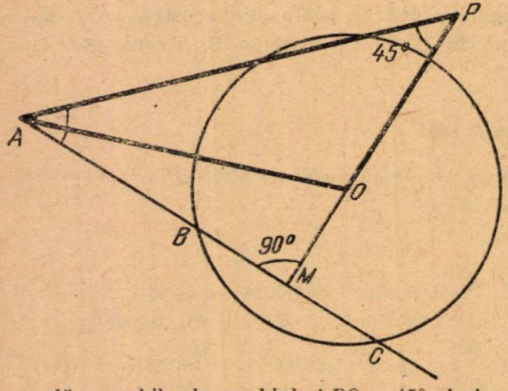




$RS = a + 2b$ și segmentul $RT = a + b$ (avem $ST = b$). Unim pe Q cu S iar prin T ducem $TU \,||\, QS$ și avem:

$$\frac{RQ}{QU} = \frac{RS}{ST}; \quad \frac{R+m}{QU} = \frac{a+2b}{b}; \quad QU = \frac{b(R+m)}{a+2b} = x$$

deci segmentul $PC = x$ ce ne-am propus să-l căutăm este egal cu QU. Luînd pe CD segmentul $PC = QU = x$ obținem poziția punctului P.



Problema 1367

Se dă un cerc și un punct fix A. Dreapta mobilă dusă prin A taie cercul în B și C. Pe mijlocul M al coardei BC se duce perpendiculară MP egală cu MA. Care este locul geometric al lui P?

* * *

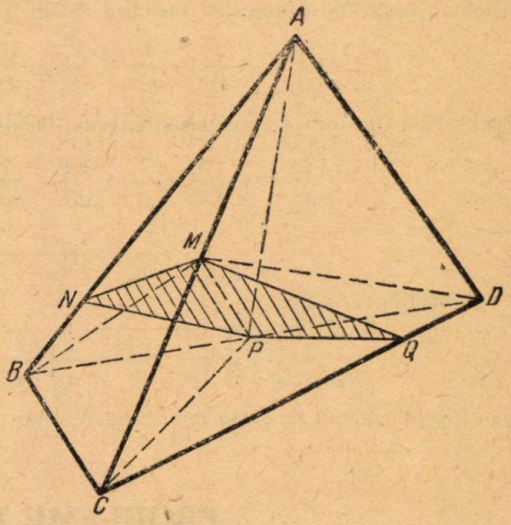
Soluție. Evident triunghiul dreptunghic AMP fiind isoscel unghiul $APM = 45°$ și cum MP trece prin 0 centrul cercului dat rezultă că locul lui P este format din două arce de cerc descrise pe AO drept coardă, capabile de unghiul $APO = 45°$ și simetrice față de AO.

Problema 1368

Să se demonstreze că orice plan care trece prin mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru oarecare îl împart în două părți echivalente.

* * *

Soluție. Fie M și P mijloacele muchiilor opuse AC și BD în tetraedrul $ABCD$. Un plan oarecare dus prin MP taie muchiile AB, CD în N și Q. Trasăm planul ce trece prin AC și P și deasemenea planul ce treceprin BD și M.



Planul ACP împarte tetraedrul în două părți echivalente $ABCP \equiv ADCP$ (1), iar planul BDM tot în două părți echivalente $BAOM \equiv BDCM$ (2). Însă ținînd seama de planul $MNPQ$ (1) și (2) devin

$$AMNP + BMNP + CBMP = \quad (1')$$
$$= CMPQ + DMPQ + ADMP$$
$$BMNP + AMNP + ADMP = \quad (2')$$
$$= DMPQ + CMPQ + CBMP.$$

Adunînd și scăzînd (1') și (2') obținem

$$AMNP + BMNP = CMPQ + DMPQ;$$
$$CBMP = ADMP$$

și cum $AMNP = CMPQ$; $BMNP = DMPQ$, rezultă că

$$AMNP + ADMP + DMPQ = CMPQ + BCMP + ADMP$$

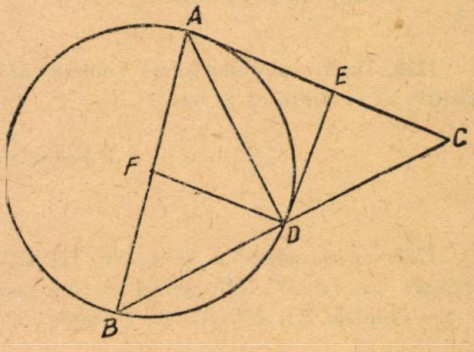
sau

$$ADMNPQ = BCMNPQ.$$

Problema 1377

În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ fie D piciorul înălțimii din A pe BC. Să se demonstreze că perpendiculara din D pe latura AC este tangentă în D la cercul ABD.

(Dată la admiterea în Institutul Petrol și Gaze, București)



Soluție. Fie F mijlocul lui AB. Deoarece $\sphericalangle ADB$ este drept, F este centrul cercului ABD. Înnă cum $FA = FB$ și $DB = DC$ rezultă că $FD \parallel AC$, adică $FD \perp DE$. Deci, DE este tangentă la cercul ABD.

Problema 1384

Să se rezolve sistemul:

$$\frac{xyz}{y+z} = a;\ \frac{xyz}{z+x} = b;\ \frac{xyz}{x+y} = c$$

unde $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$

(Dată la admiterea în Institutul de Petrol și Gaze)

Soluție. În ipoteza de mai sus sistemul se mai poate scrie:

$$\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{a}\ ;\quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{b}\ ;$$

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{c}$$

Adunînd ecuațiile membru cu membru, avem

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Scăzînd pe rînd din această ecuație, ecuațiile sistemului, avem:

$$\frac{1}{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\ ;\quad \frac{1}{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right);$$

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right) \tag{1}$$

Prin înmulțire avem:

$$\frac{1}{xyz}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)} \tag{2}$$

Soluțiile sistemului se obțin împărțind pe rînd (1) la (2)

PROBLEME PROPUSE

1755. Fie O_1 și O_3 două cercuri ce trec prin laturile AC și BC ale unui triunghi ABC și care taie dreapta BC în M și N. Dreptele NA și MA taie cercurile O_1 și O_2 în N' și M'.

Se cere locul geometric al intersecției dreptelor $M'B$, $N'C$ cînd triunghiul ABC rămîne fix iar cercurile O_1 și O_2 variază.

A. Waldmann, student, Timișoara

1756. Dacă a și b sînt două numere oarecare $(a > b > 0)$ și n un număr întreg și pozitiv, să se arate că avem

$$(n+1)\sqrt[n]{ab} \leqslant \frac{a\sqrt[n]{a}-b\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}\ .$$

Savin V. Ionescu, student, București

1757. Se consideră un tetraedru $ABCD$ și un punct I pe sfera circumscrisă lui. Dacă dreptele IA, IB, IC, ID înțeapă un plan oarecare în patru puncte A_1, B_1, C_1, D_1 conciclice, atunci dreptele IA, IB, IC, ID înțeapă orice alt plan tot în patru puncte conciclice.

Cristea I. Ion, elev, Constanța

1758. Să se construiască un cerc (o) astfel ca din intersecția lui cu laturile unui triunghi echilateral dat să se obțină trei coarde egale cu l_3, l_4 și l_6.

Gh. Bazacov, Turnu-Severin

1759. O sarcină de + 1600 U.E.S. e s crează în vid, un cîmp electric. Cu ce este egală intensitatea cîmpului format la o distanță de 20 cm de sarcina electrică?

* * *

1760. *a)* Un vagonet de 500 kg este mișcat din repaos uniform accelerat cu ajutorul unei forțe de 10 kgf. Să se calculeze viteza și spațiul parcurs de vagonet în timp de 1 minut? Lucrul mecanic efectuat.

b) Să se calculeze grafic și analitic, forța necesară pentru a echilibra un corp de greutate 100 kg pe un plan înclinat cu 30° față de orizontală.

* * *

1761. Un tren parcurge drumul între două stații A și B în 30 minute. El merge cu o mișcare uniform accelerată 4 minute, iar după aceea merge cu o mișcare uniformă, 24 de minute. Apoi își încetinește viteza și se oprește în stație după ce a parcurs 800 m cu o mișcare uniform întîrziată.

După 5 minute de la plecarea primului tren pleacă din B către A un alt tren, care după 5 minute de la începutul mișcării capătă o viteză constantă egală cu a primului tren.

a) Să se calculeze viteza trenurilor;

b) Să se calculeze spațiul de la A la B;

c) Să se afle la ce distanță de la stația A s-au întîlnit trenurile și după cît timp de la plecarea trenului al doilea?

Const. Draica, elev, București

1762. Se dă ecuația $x^2 - px + q - 1 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că ecuația $py^2 - 2qy + p = 0$, are o rădăcină.

$$y_1 = \frac{\sqrt{(1 + x_1)(1 + x_3)} - \sqrt{(1 - x_1)(1 - x_2)}}{\sqrt{(1 - x_1)(1 - x_2)} + \sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)}}.$$

Apoi să se exprime tot în funcție de x_1 și x_2 a doua rădăcină y_2.

C. Ionescu-Țiu

1763. Să se rezolve ecuația:

$$\arccos x + \arcsin \frac{1 + \sqrt{3}}{2} x = \frac{2\pi}{3}.$$

G. Galațki, elev, Tîrgoviște

1764. Un eudiometru cu mercur de secțiune uniformă pe toată lungimea sa, este plasat într-o cuvă cu mercur. Eudiometrul conține gaz amoniac pe o lungime de 10 cm. Mercurul se ridică în tub cu 25 cm deasupra suprafeței libere din cuvetă. Se trec prin eudiometru o serie de scîntei electrice pînă ce amoniacul este descompus complet.

Să se calculeze lungimea x ocupată de gazele provenite din descompunerea amoniacului, dacă presiunea atmosferică la care s-a lucrat este de 75 cm coloană Hg, iar nivelul mercurului din cuvă se presupune invariabil.

C. Necșoiu, inginer

1765. Dintr-un punct oarecare depe cercul înscris într-un hexagon regulat, cele trei diagonale mari ale hexagonului se văd sub unghiurile x, y și z. Să se stabilească relația:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z = 72.$$

Florin Torjescu, student, București

1766. În cercul dat O se duce diametrul fix BC, iar un punct variabil A de pe cerc se unește cu extremitatea acestui diametru. Fie D și E jumătățile segmentelor AB și AC. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului echilateral în care DE este una din laturile lui.

Stelian G. Măreulescu, Orașul Stalin

1767. Un motor asincron trifazic cu rotorul în scurt circuit cu o pereche de poli pe fază, absoarbe o putere de 3652,36 W și un curent de 12 A de la o rețea cu tensiunea 220 V, cu 50 perioade pe secundă. La puterea nominală de 6 C.P. motorul se rotește cu 2950 rotații pe minut. Se cere: *a)* factorul de putere ($\cos\varphi$), *b)* puterea aparentă, *c)* puterea devatată, *d)* viteza cîmpului magnetic învîrtitor din stator, *e)* alunecarea, *f)* intensitatea și tensiunea pe fază în stator dacă înfășurarea este legată în stea.

I. A. Opriș, elev, Cîmpulung Muscel

1768. Se dă triunghiul ABC și se consideră punctul N pe latura AC. Paralela dusă din N la BC întîlnește pe AB în punctul E; iar paralela dusă tot din N la mediana AQ întîlnește pe BC în F. Dreapta EF intersectează AQ în punctul R. Să se demonstreze relația:

$$\frac{AR}{RQ} - 2\frac{AN}{NC} = 1.$$

Lucian Mănescu, profesor, R. Vîlcea

1769. Fie S un punct variabil pe cercul circumscris patrulaterului inscriptibil $MNPQ$. Dreptele lui Simson ale punctului S în raport cu triunghiurile care au ca vîrfuri punctele M, N, P, Q formează patrulaterul complet $ABCDEF$. Să se arate că S este punctul lui Miquel al acestui patrulater.

Mihail I. Popescu, student, București

1770. Notăm cu x, y și z laturile triunghiului cu vîrfurile în punctele de tangență ale laturilor unui triunghi ABC cu cercul sau înscris. Triunghiul ABC fiind ascuțit unghi, să se stabilească relația

$$\frac{a+b+c}{R} = \frac{xyz}{r^3}$$

unde R și r sînt respectiv razele cercului circumscris și înscris triunghiului ABC.

Ștefan Zakarias, elev. Sft. Gheorghe

1771. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$y_1 = \sqrt{1+\cos 2x} + \sqrt{1-\cos 2x}$$

$$y_2 = \sqrt{1+\cos 2x} - \sqrt{1-\cos 2x}$$

$$y_3 = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{și} \quad y_4 = y_1 y_2 \text{ în intervalul } \leqslant 0 \leqslant x \leqslant 360°.$$

C. Ionescu-Țiu

1772. Trei cercuri de raze r_1, r_2, r_3 au centrele pe o dreaptă, sînt tangente exterior unei drepte t, în punctele A_1, A_2, A_3, iar cercul mijlociu este tangent celorlalte două. Să se arate că cercurile de raze $r_1 + r_2$, $r_3 + r_2$ tangente dreptei t în A_1, A_3 sînt tangente și între ele.

N. Mihăileanu

1773. Să se rezolve ecuația:

$$2\sec 2x\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x) + \sec 3x = \sec 2x\,(2\sec x + \sec 3x).$$

Kiss Elemer, Tg. Mureș

1774. Un tren compus din 30 vagoane de 10 tone fiecare și o locomotivă de 60 tone pornește din repaos. Forța de tracțiune dezvoltată de locomotivă este de 18.000 newtoni. Presupunînd ca mișcarea trenului se face fără frecare, să se afle:

a) Accelerația mișcării știind că 1 newton = 100.000 dyne.

b) Timpul necesar pentru ca trenul să atingă viteza de 54 km/oră.

c) Drumul parcurs de tren în acest timp.

(Clasa VIII-a. «Olimpiada de fizică», Iași, 1955

1775. O bilă de metal a cărei căldură specifică este $c = 0{,}1$ cal/g. grd, se introduce în flacăra unui bec de gaz. După ce bila a luat temperatura flacării ea este introdusă într-un calorimetru care conține o cantitate de apă a cărei masă este de 2,4 ori mai mare ca cea a bilei. Temperatura inițială a apei fiind $t_0 = 20°C$, iar cea finală $t_1 = 50°C$, să se afle temperatura flacării (se neglijează căldura absorbită de calorimetru).

(Clasa IX-a, « Olimpiada de fizică », Iași, 1955

1776. Se consideră un circuit format din două rezistențe $R_1 = 30$ ohmi și $R_2 = 20$ ohmi montate în paralel, alimentat de o baterie de forță electromotoare $E = 90$ volți și rezistență interioară $R_1 = 6$ ohmi. Să se afle:

1. Rezistența R a grupării constituită de R_1 și R_2.
2. Rezistența R_t a întregului circuit.
3. Intensitatea curentului în circuitul principal.
4. Diferența de potențial la capetele rezistențelor R_1 și R_2.
5. Cantitatea de căldură dezvoltată de rezistența R_1 într-o oră.
6. Presupunînd ca R_2 reprezintă rezistența unui voltametru cu azotat de argint, să se afle cantitatea de argint depus la catod în același timp. Echivalentul electrochimic al argintului $K = 1{,}118$ mg/coulomb.

(Clasa X-a, « Olimpiada de fizică », Iași, 1955)

1777. Să se calculeze sumele:

$$\sum_{k=1}^{3n} (-1)^k \sin (3k-1)\, a \quad \text{și}$$

$$\sum_{k=1}^{3n} (-1)^k \cos (3k-1)\, a$$

C. Ionescu-Țiu

1778. Un fluviu se varsă în mare prin 3 brațe. În punctul A se despart 2 din brațe: brațul AE, lungimea 216 km, brațul ABC, lungime 117 km. În punctul B se desparte brațul al treilea, $BD = 36$ km, $BC = 77$ km.

Viteza curentului este de 2 km/oră pe porțiunea AB; de 1 km/oră pe brațele AE, BC, BD; și în amonte de A, 3 km/oră.

Trei nave intră simultan pe cele 3 brațe astfel: nava n_1 cu viteza de 12 km/oră intră pe brațul CB;

— nava n_2 intră pe brațul DB și nava n_3 intră pe brațul EA. Se cere: *a)* Ce viteză trebuie să aibă navele n_2 și n_3 ca cele 3 nave să ajungă simultan la un port P, situat în amonte de A, la distanța de 63 km.

b) Distanța dintre nave în momentul cînd navele n_1, n_2 n_3 trec prin punctul A.

C. V. Costăchescu, Galați

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE *)
PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: **669.** Un număr de 3 cifre este format din 3 numere consecutive; cifra zecilor este dublul diferenței dintre cifra unităților și cifra sutelor; iar dacă răsturnăm numărul dat și din acesta scădem primul număr obținem 198. Să se afle numărul dat.

Marius Zaharescu, student, București

---

[1]) V: 672, 674, VI: 669, 676, 678, VII: 670, 671, 673, 675, 677.

E: **670.** Să se arate că:

$$\left(\frac{yz}{x}-x+y+z\right)\left(\frac{zx}{y}+x-y+z\right)+$$
$$+\left(\frac{zx}{y}+x-y+z\right)\left(\frac{xy}{z}+x+y-z\right)+$$
$$+\left(\frac{xy}{z}+x+y-z\right)\left(\frac{yz}{x}-x+y+z\right)=4\,(xy+yx+zx)$$

Cristea I. Ioan, elev, Constanța

E: **671.** Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^3+y^3=2x^2-y^2+yx=(x+y)^2$$

Ioanin I. Brezeanu, student, București

E: **672.** Suma a două numere este 100. Împărțind numărul cel mare la cel mic obținem cîtul 4 și restul 10. Să se afle cele două numere.

Marius Zaharescu, student București,

E: **673.** Un trapez dreptunghic în A, are $AB = 2\ DC$ unde AB și DC sînt respectiv baza mare și baza mică. Notînd cu M proiecția lui A pe BC, să se arate egalitatea segmentelor MD și AD.

Petrică I. Zamfira, studentă, București

674. Distanța dintre două gări este de 96 km. Un tren parcurge această distanță în 40 minute mai repede decît un alt tren. Viteza primului tren este cu 12 km/h mai mare decît viteza celui de-al doilea. Să se determine vitezele celor două trenuri.

* * *

E: **675.** Să se stabilească identitatea

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x+a)\ (x+b)\ (x+c)}=\frac{a^3-ab-c}{(a-b)\ (a-c)\ (x+a)}+$$
$$\frac{ab^2-b^2+c}{(b-c)\ (b-a)\ (x+b)}+\frac{ac^2-bc+c}{(c-a)\ (c-b)\ (x+c)}.$$

* * *

E: **676.** Să se dovedească identitatea

$$\frac{a^2}{(a-b)\ (a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)\ (b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)\ (c-b)}=1.$$

V. Isfodor, student București

E: **677.** Să se stabilească cifrele omise din împărțirea:

$$\begin{array}{r|l}
\text{xxxxxx} & \text{xxx} \\
\text{xxx5} & \overline{\text{xx8}} \\
\hline
\text{xxxx} & \\
\text{9xx} & \\
\hline
\text{xxx} & \\
\text{xxx} & \\
\hline
\end{array}$$

care au fost înlocuite prin x.

V. Nikitin (Tambov)
(Matematica v. școle)

678. O brigadă lucrînd 6 ore zilnic, prelucrează 320 m³ lemne în 12 zile, o altă brigadă are de 3 ori atîția muncitori, însă prima are muncitori cu experiență mai mare; raportul productivității muncitorilor din cele două brigăzi este 8/5. În cîte zile produce brigada a doua 400 m³ de lemne dacă lucrează 8 ore zilnic?

CONSFĂTUIREA DIN BUCUREŞTI CU CITITORII G.M.F.—B

În zilele de 2 şi 3 mai 1955 s-a ţinut în Capitală etapa pe ţară a Olimpiadei de Matematică şi de Fizică. La această Olimpiadă au participat elevi din învăţămîntul mediu de pe tot cuprinsul ţării. În acest an numărul participanţilor a fost de 298 elevi, faţă de 144 elevi care au participat la etapa pe ţară în anul trecut, iar faţă de concursuri similare ţinute în regimul burghezo-moşieresc, numărul participanţilor este de zece ori mai mare.

Creşterea continuă a numărului de participanţi la Olimpiada de Matematică şi Fizică demonstrează că an de an studiul matematicii şi fizicii se răspîndeşte tot mai larg în rîndurile tineretului nostru din şcolile medii, demonstrează că tot mai mulţi sînt tinerii care înţeleg importanţa matematicii şi fizicii în societatea nouă pe care o construim. Această creştere mai demonstrează de asemenea, preocuparea deosebită a profesorilor de matematică şi de fizică de a insufla elevilor dorinţa pentru însuşirea acestor discipline şi de a-i atrage la studiul lor în număr din ce în ce mai mare. Activîndu-i în cadrul cercurilor de matematică şi de fizică elevii au rezolvat tot mai multe probleme publicate în Gazetă; această muncă le-a dezvoltat gîndirea matematică, le-a adîncit cunoştinţele de matematică şi de fizică primite în şcoală.

După terminarea concursului a urmat premierea elevilor care s-au distins şi cu această ocazie a avut loc şi o consfătuire a Comitetului de Redacţie al Gazetei Matematice şi Fizice, seria B, cu cititorii ei — participanţii la Olimpiadă şi profesorii conducători.

Redactorul responsabil al revistei tov. conf. univ. O. Sacter a arătat cititorilor, rolul pe care îl are. G.M.F.-B în ridicarea nivelului ştiinţific al elevilor şi în pregătirea lor mai temeinică pentru studii superioare. Totodată d-sa a informat pe cititorii revistei asupra modului de lucru al redacţiei şi asupra greutăţilor şi lipsurilor întîmpinate în această muncă.

Pentru a îmbunătăţi materialul publicat în Gazetă şi pentru a cunoaşte părerile, propunerile şi sugestiile cititorilor, Comitetul de redacţie i-a invitat pe participanţi să-şi spună cuvîntul în această problemă.

Elevul *Vasilică Const.* din clasa VIII-a (Tecuci) a arătat că articolele publicate în Gazetă depăşesc nivelul de cunoştinţe al elevilor din clasa VIII-a; el şi-a exprimat părerea că ar fi bine ca revista să conţină şi material corespunzător acestei clase.

Eleva *Ciortei Anca* din clasa IX, (Ploieşti) a semnalat faptul că la Ploieşti se trimit prea puţine exemplare de revistă, ceea ce determină o continuă goană pentru procurarea acestora. Eleva Ciortei Anca a solicitat totodată, publicarea unor probleme de fizică pentru clasa IX-a.

Elevul *Negoescu Emil* din clasa X-a (Tecuci) a arătat că materialul publicat în Gazetă este de un real folos elevilor clasei a X-a; el a remarcat deosebita însemnătate pe care o prezintă pentru elevii ultimei clase a şcolilor medii, publicarea chestiunilor care au fost propuse la examenele de admitere în institute şi facultăţi. Elevul Negoescu E. a subliniat faptul că unele articole sînt prezentate la un nivel prea înalt (Raportul anarmonic) şi a semnalat unele greşeli de tipar, deci necesitatea eratei la unele numere.

Elevul *Bigan Stan* din clasa X-a (Giurgiu) şi-a exprimat dorinţa să se publice în Gazetă soluţiile tuturor problemelor propuse şi în legătură cu aceasta, a arătat necesitatea unei expuneri mai amănunţite a soluţiilor, deoarece în forma în care au apărut pînă acum ele nu pot fi întotdeauna urmărite şi înţelese pe deplin.

Elevul *Şerb Gabriel* din clasa X-a, (Piteşti) după a ce subliniat rolul pozitiv al Gazetei în ce priveşte ridicarea nivelului de cunoştinţe în matematică şi în fizică, şi-a exprimat părerea că este insuficient numărul actual de pagini al revistei, propunînd mărirea lui; aceasta ar însemna în primul rînd, publicarea amănunţită a soluţiilor problemelor propuse.

Elevul *Cristea I. Ion* din clasa X-a (Constanţa) a propus de asemenea mărirea numărului de pagini ale revistei şi a subliniat satisfacţia cu care elevii consideră iniţiativa redacţiei de a publica rubrica « Caleidoscop şi rubrica « Note »; el a criticat totodată, întîrzierile în apariţia

numerelor revistei și în primirea abonamentelor. Elevul Cristea I. Ion susține propunerea făcută de antevorbitori cu privire la publicarea soluțiilor tuturor problemelor propuse.

Tovarășul profesor *Buzuloiu* (Cluj) a propus pentru stimularea a cît mai mulți elevi la rezolvarea problemelor, să se revină la numărul de cinci probleme rezolvate pentru a se publica numele rezolvitorului.

Tovarășul profesor *Gribincea* (Brad) a arătat că problemele de fizică trebuie astfel alese și întocmite încît să se adreseze rațiunii elevului, iar nu să constituie o simplă aplicare a formulelor învățate. D-sa a propus că în punctajul stabilit pentru întrecerea dintre cercurile de matematică să nu se țină seamă de numărul de abonamente, iar la evidențierea elevilor din școlile medii să nu se ia în considerare rezolvarea problemelor propuse pentru clasele V—VII. În ce privește numărul minim de probleme rezolvate de elevi, tov. profesor Gribincea este de părere să nu se revină la cinci probleme, ci să rămînă tot zece.

În numele Comitetului de Redacție a luat cuvîntul tov. conf. O. Sacter; d-sa a explicat dece revista nu poate publica materiale alese anume pentru diferite clase, precum și soluțiile detailate ale tuturor problemelor. Gazeta va continua să publice unele din problemele propuse la examene de admitere în facultăți. În ce privește numărul minim de probleme rezolvate el nu poate fi redus la cinci; în acest sens, practica și-a spus cuvîntul deoarece s-a constatat că numărul rezolvitorilor a crescut, de asemenea nivelul cunoștințelor lor, de cînd numărul de probleme rezolvate a fost stabilit la zece.

S-a explicat apoi, imposibilitatea modificării punctajului în întrecerea organizată încă acum cîteva luni și a subliniat faptul că la evidențieri se ia în considerație și numărul de probleme rezolvate privind clasele V—VII, deoarece ele au fost puse tuturor rezolvitorilor. În afară de aceasta, între problemele pentru clasele V—VII se pot găsi probleme interesante care să necesite un efort de gîndire chiar pentru elevii din clasele mai mari.

În ce privește mărirea numărului de pagini și întîrzierile în sosirea abonamentelor, redacția va căuta să rezolve pozitiv aceste chestiuni.

În încheiere secretariatul de redacție a mulțumit participanților pentru contribuția lor la îmbunătățirea muncii de viitor a redacției, prin critica asupra lipsurilor și prin propunerile făcute.

Profesorii de matematică și de fizică au fost solicitați să colaboreze la revistă atît prin articole cît și prin propuneri de probleme, să țină o cît mai strînsă legătură cu Comitetul de Redacție, pentru că numai astfel se va putea îmbunătăți continuu calitatea materialului publicat.

Olimpiada Matematică și Fizică 1955 s-a încheiat cu o masă tovărășească a celor peste 400 participanți elevi și profesori și a Comitetului de conducere al Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(Soluții bune primite pînă la 30 martie 1955)
(urmare)

CERNAVODĂ. (Constanța). Clasa VIII-a. Lojnița Constantin (1377, 460, E: 558, 559, 563, 568, 574, 587, 588), Polizu Constantin (1377, 383, 460, E: 558, 559, 560, 563, 568, 571, 574, 580, 586, 588); clasa IX-a. Birda Tiberiu (1372, 375, 377, 378, 383, E: 551, 558, 559, 560, 568), Tănase Vasile (1375, 377, 378, 381, 383, 402, 403, 404, 436, E: 551, 557, 558, 559, 560); clasa X-a. Bujoreanu Lucian (1372, 377, 378, 381, 383, 402, 403, 404, 436).

CHITILA. *Școala mixtă de 7 ani nr. 185.* Clasa VII-a. Chisaru V. Ioan (1377, E: 535, 536, 537, 538, 540, 544, 546, 547, 554, 555, 556, 558).

CLUJ. Clasa X-a. Ungureanu Octavian (1436, 472, 474, 479, 481, 482, 485, 486, 493, 522, 526, 528, 532, E: 563, 568, 571, 575); *Şcoala medie electrotehnică*, anul II. Butnaru Damian (1430, 434, 442, 443, 449, 472, 474, 475, 477, 481, 485, 486, 493, 494, E: 577, 578, 579); *Şcoala specială de doi ani*, anul II. Aldea Florea (1376, 379, 436, 437, 443, 460, 472, 476, 483), Hoţea Nicolae (1442, 449, 472, 474, 475, 476, 483, 486, E: 586, 588), Chelemen Mihai (1374, 376, 379, 385, 404, 413, 416, 436, 449, 465, E: 571, 574), Paun Constantin (1415, 442, 449, 472, 474, 475, 476, 483, 484, 486, 494, 495, 496, 497, E: 586, 587, 588), Pîrîu Ştefan (1376, 379, 385, 408, 411, 416, 437, 472, 475, 483, 486, 493, 495), Pistol Nicolae (1415, 442, 449, 472, 474, 475, 476, 483, 484, 486, 494, 495, 496, 497, E: 586, 587, 588), Rusu Alexandru (1372, 374, 385, 404, 411, 413, 416, 436, 449, 465, E: 574, 586), Ţucu Petre (1372, 375, 385, 404, 411, 416, 436, 449, 465, E: 575), *student, Mureşan Tr. Augustin* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 415, 416, 422, 423, 426, 439, 442, 449, 464, P).

CONSTANŢA. *Şcoala medie «Mircea cel Bătrîn»*. Clasa VIII-a. Anghel Constantin (1474, 476, 493, 494, E: 550, 558, 560, 561, 563, 564, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 583, 584, 586, 587, 588, 589); clasa X-a *Cristea I. Ion* (1376—1398, 1401—1429, 1431—1434, 1436—1443, 1449, 453—1456, 1458—1461, 1463—1468, P), *Iordache I. Dan* (1389, 390, 392, 394, 395, 396, 400—428, 430, 432, 433, 434, 436—443, P); *Şcoala de 7 ani*, clasa VII-a. Butnaru Gabriela (E: 558, 559, 563, 564, 565, 566, 571, 573, 574, 576), Dumitriu Georgeta (E: 563, 566, 568, 573, 574, 575, 576, 578, 579, 584, 586), Picita Gionson (E: 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 587); *Şcoala tehnică medie de hidrotehnica*, anul III, *Stepan Ionel* (1384, 409, 410, 469, 470, 472, 474, 475, 476, 480, 483, 486, 493, 499, 501, 502, 513, 515, 516, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 534, E: 592, 596, 597, 608); anul IV. Vaideanu Sica (1372, 374, 377, 378, 380, 383, 403, 404, 405, 412, 432, 449, E: 551, 552, 553, 554, 559, 561, 562, 563, 568, 571, 574, 575, 577, 578); *Şcoala medie tehnică de construcţii civile*, anul II, Stoica Silvestru (1472, 474, 475, 481, 493, 494, 495, 498, 526, 528, E: 597, 600, 601, 608), Marinescu Nicolae (1472, 475, 481, 493, 494, 495, 498, 509, 516, 526, 528, E: 601, 603, 608); anul III. Cristache I. Teodor (1373, 374, 375, 376, 377, 378, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 392, 396, 402, 403, 404, 416, 436, 459).

CORABIA. Clasa IX-a. Delu Stefan (1409, 411, 416, 431, 433, 449, 458, 460, 465, 467, 474, 475, 482, 485, 486, 493, 494, 496, E: 571, 576, 577, 578, 579, 583, 586, 587, 588), Florescu Mihai (1416, 436, 449, 458, 475, 499, 525, 526, 532, E: 578); clasa X-a. *Popa G. Stancu* (1408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 419, 423, 426, 424, 441, 442, 443, 449, 454, 456, 458, 465, 467, 468, 471, 472, 474, 476, 477, 478, 479, 480, 482, 483, 486, 499).

CRAIOVA. *Şcoala medie nr. 1, băieţi*. Clasa IX-a. Voinea I. Alexandru (1409, 417, 413, 442, 472, 475, 482, 483, 485, 486); clasa X-a. Mihalache Gheorghe (1371, 372, 373, 377, 378, 410, 411, 418, 419, 424, 432, 434, 436, 437, 441, 442, 449, 465, 468, E: 563, 569, 570, 571, 574, 575, 578, 582, 586, 588), Petrescu Mircea (1412, 416, 436, 440, 449, 472, 482, 456, E: 563, 567, 571, 588). *Şcoala medie de băieţi nr. 2*. Clasa IX-a. Laban Mircea (1375, 426, 438, 442, 449, 457, 458, 460, 465, 474, 475, 484, 486, 493, 494, 496), Climov Victor (1416, 439, E: 563, 564, 567, 568, 569, 571, 572, 574, E: 564, P), Dondoe Ştefan (1372, 375, 416, 434, 436, 438, 439, 482, 493), Voinea C. Dorin (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 380, 382, 383, 384, 392, 403, 404, E: 558, 559, 560, 561, 562); clasa X-a. Clim Lorin (1373, 389, 392, 395, 403, E: 551, 558, 559, 560, 561), Lica I. Ilie (1373, 375, 379, 382, 411, 423, 442, 452, 453, 472, 475, 480, 483, 486), Ghenea Constantin (1416, 436, 442, 465, 472, 474, 475, 478, 486, 516, 522, 523, 527, 528, 529, 532, E: 554, 555, 558, 561, 563, 568, 569, 571, 574, 575, 586, 601, 608), Mihăilă Ion (1409, 416, 418, 436, 442, 449, 465, 472, 473, 474, 475, 478, 480, 486, 513, 522, 526, 529, 532, 534, E: 555, 592, 605), Raciula I. Stelian (1444, 471, 472, 474, 475, 476, 478, 480, 481, 482, 483, 485, 486, E: 583), Ştefan Ştefan (1472, 474, 475, 476, 477, 481, 482, 483, 485, 486), Sîrbu Gabriel (1412, 416, 449, 472, 473, 474, 475, 483, E: 580, 586, 587, 588), *Şcoala medie electrotehnica*, anul II. Glogo-

janu Elisa (1372, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 402), Paraschiva M. Ion (1374, 375, 377, 380, 383, 418, 436, 449, E: 558, 559, 560, 561, 568, 563, 574), Voicu I. Traian (1472, 474, 475, 482, 493, 499, 518, 522, 528, 532, P), anul III. *Bărbuică Nicolae* (1373, 384, 388, 389, 390, 393, 395, 396, 397, 401, 405, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 415, 416, 418, 419, 421, 423, 425, 426, 434, 436, 437, 438, 440, 441, 442, 443, 444, 449, 453, 455, 456, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 467, 468, P), *Pitucea Eugen* (1385, 395, 411, 413, 416, 431, 432, 433, 442, 449, 453, 467, 472, 474, 475, 476, 478, 480, 481, 482, 483, 499, 513, 516, 518, 520, 522, 526, 528, 531, 532, 533, 534, 536, E: 544, 545, 546, 550, 555, 559, 563, 571, 572, 584, 586), *Dinu Gh. Gheorghe* (1376, 384, 396, 423, 426, 427, 432, 433, 434, 436, 437, 438, 440, 441, 442, 443, 444, 449, 453, 454, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 467, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 491, 493, 494, 498, 499). *Şcoala medie tehnică de drumuri şi poduri.* Anul II. *Răducanu V. Gheorghe* (1378, 391, 392, 407, 410, 413, 416, 449, 459, 460, 465, 472, 474, 475, 476, 479, 481, 486, 493, 494, 495, E: 558, 559, 560, 561, 562, 564, 566, 573, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 584, 586, 587, 588). *Şcoala medie tehnică c.f.r.* Dicu D. Maria (1408, 416, 436, 442, 458, 472, 474, 475, 480, 481, 482, 483, 493, 496), Radu C. Nicolae (1408, 413, 436, 437, 442, 468, 469, 472, 474, 475, 481, 482, 483, 485, 493).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa IX-a. Badar Marilena (1478, 493, 494, 520, 526, 528, 529, 532, E: 586, 587, 588, 592, 597, 608), Ene St. Aurel (1389, 392, 397, 406, 408, 413, E: 558, 559, 561, 563), Contineac Mihai (1372, 374, 375, 376, 416, 436, 449, 465, E: 559, 563), Neagor Laurenţiu (1406, 431, 446, 449, 464, E: 559, 560, 561, 563, 568, 570, 574, 575, 576, 578, 579, 580, 583, 586, 587, 588); clasa X-a. *Dumitrescu I. Aurel* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 392, 395, 396, 403—412, 416, 421, 423, 424, 426, 432, 436, 442, 443, 449, 453, 456, 457, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 472, 514, P), *Preda Adrian* (1372—386, 392, 395, 396, 403—412, 416, 421, 423 424, 426, 432, 436, 442, 443, 449, 452, 456, 457, 459—468, 472, 480, 504), Marinescu Victoria (1372, 373, 375, 377, 403, 404, 449, 472, 474, 482, 485, E: 558, 559, 561), *Meissner Juliu* (1372, 373, 375—385, 395, 403, 404, 409, 411, 416, 421, 426, 436, 442, 449, 465, 467), Pletea Vasile (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 385, 396, 406, 409, 416, 432, 449, 459, 460, 462, 465).

DARABANI (Botoşani). Absolvent. Tudose Constantin (1404. 409, 416, 418, 419, 432, 436, 440, 472, 482, 483, 493, 494, 495, E: 558, 559, 561); clasa IX-a Simion Gheorghe (1449, 460, E: 516, 523, 525, 529, 540, 576, 580, 584, 586, 587, 588, 594, 603).

DEJ *(Cluj).* Clasa VIII-a. Dragan Tudor (1441, 460, 461, E: 508, 554, 561, 564, 568, 571, 572, 574, 580), Pettina Liviu (E: 554, 555, 559, 561, 568, 571, 574, 575, 580, 586); clasa IX-a. Costin Margareta (1378, 414, 436, 437, E: 505, 546, 563, 564, 555, 558, 564, 568, 571, 574), Pesteşan Rozalia (1376, 436, E: 563, 564, 568, 574, 586, 587, 588), Mangu Ileana (1464, 472, E: 558, 559, 567, 571, 572, 584, 586, 588), Natu Aneta (1378, 463, E. 547, 561, 568, 573, 574, 584, 587, 588), Oniga Maria (1378, 436, 437, E: 526, 546, 555, 563, 565, 568, 578, 574, 584, 588, Slăpceanu Angela (E: 561, 563, 567, 568, 571, 572, 574, 587, 592, 603), Silaghi Silvia (1378, 436, E: 563, 565, 568, 574, 584, 486, 588), Streang Valeria. (1378, 436, E: 526, 546, 563, 565, 568, 571, 574, 584, 586, 588); clasa X-a. Vermean Gh. Gheorghe (1382, 406, 416, 436, 441, 461, 462, 472, E: 565, 578, 579), Penea Octavian (1375, 382, 406, 407, E: 558, 563, 564, 567, 568, 571, 572, 574).

DEVA. Clasa X-a. Huţin C. Traian (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 383, 384, 385, 386, 395, 403, 404, 405, 416, 419, 424, 436, P).

DOROHOI. Clasa X-a. Jarcăşanu M. (1472, 474, 475, 481, 482, 483, 486, 494, E: 586, 587, 588).

DRĂGĂŞANI. (Vîlcea). *Şcoala medie tehnică agricolă Voiceşti.* Anul III. Stelea Florea (1460, 493, E: 567, 569, 572, 576, 578, 584, 586, 587).

FĂGĂRAŞI. Clasa X-a. Frîncu Nicolae (1374, 375, 377, 378, 380, 383, 390, 410, 442, 449, 460).

FOCŞANI. Clasa VIII-a. Buşe M. Constantin (1449, 467, 480, 486, 493, 513, 518, 524, 529, E: 563, 567, 582, 584, 587, 588, 592, 597, 600, 601, 602, 603, 606, 608), Bîrhala Alexandru (1437, E: 563, 564, 565, 566, 567, 568, 571, 572, 573, 574, 575, 578, 579, 580), Lupşa Dan (1432, 436, 441, 448, 460, 462, 464, 493, 505, E: 567, 571, 575, 576, 577, 578, 581, 582, 585, 586, 587, 588), Munteanu Panaite (1375, 416, 464, 469, E: 558, 560, 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 584, 586, 587, 588); clasa IX-a. Florea I. Alexandru (1449, 460, 475, 486, E: 563, 568, 571, 574, 575, 576, 577 586, 587, 588, 592, 597, 608)., *Bercovici Izu* (1416, 418, 419, 432, 436, 439, 446, 449, 451, 453, 464, 467, 474, 475, 478, 480, 483, 484, 486, 493, 494, 495, 513, 518, 520, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 540, E: 567, 572, 582, 587, 592, 600, 601, 602, 603, 606). Bîscă P. Marcel (1431, 432, 433, 474, 493, E: 567, 572, 578, 582, 586, 591, 600, 601, 606), Donescu Gheorghe, (1372, 375, 378, 382, 285, 412, 418, 449, 460, E: 558, 568, 572, 578), Ţigănuş Mircea (1474, 475, 478, 480, 481, 482, 485, 486, 493, 494, 495); clasa X-a. Mihăilescu Ioana (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 383, 403), Teodorescu Laurenţiu (1374, 375, 377, 378, 379, 380, 409, 413, 416, 436, 441, 442, 449, 460, 465), *Ţîru Emil* (1443, 456, 469, 472, 477, 476, 478, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 494, 485, 498, 499, 509, 513, 515, 516, 524, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 538, 540, 554, 545, 558, E: 592, 593, 596, 591, 598, 601, 602, 603, 607, 608, 609, P). Şcoala profesională de industrie a lemnului din *Gugeşti*. Anul II. Panait Mircea (E: 563, 568, 569, 571, 574, 581, 582, 586, 587, 588). Şcoala de 7 ani, clasa VII-a. Brînduşoiu Ioan (E: 552, 553, 555, 561, 563, 568, 571, 575, 574, 576, 578, 580, 583, 587), Brînduşoiu Creaţa (E: 552, 555, 561, 563, 566, 569, 573, 574, 586, 588), Dinulescu Horia (E: 560, 561, 562, 563, 566, 568, 569, 571, 573, 574, 576, 578, 580, 583, 586, 587), Sera Vasile (E: 560, 568, 569, 574, 581, 583, 587, 588, 589, 590).

GALAŢI. Anul III. Mecanică. Ariton I. Vasile (1346, 347, 351, 353, 362, 365, 367, 375, 376, E: 546). *Facultatea geodezie, student, Buruiană Gheorghe* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 392, 401, 403, 409, 416, 423, 436, 441, 442, 453, 457, 459, P). Şcoala medie de 10 ani, clasa IX-a. *Grosu G. Florin* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 408—416, 418, 419, 421, 423, 424, 426, 427, 431, 432, 433, 434, 436, 437, 439, 440, 442, 443, 449, 451, 453, 454, 456, 458, 460, 461, 463—468), Tudorache Alexandrina (1372, 374, 378, 383, 392, 396, 403, 416, E: 559, 588); clasa X-a. Buşilă G. Gheorghe (1373, 416, 434, 436, 440, 441, 472, 474, 475, 478, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 493, 494, E: 568, 571, 574, 575, 578), *Ciurdea Eugen* (1373, 374, 376, 377, 379, 380, 383, 386, 403, 407, 413, 416, 434, 436, 440, 441, 442, 443, 449, 462, 468, 472, 474, 475, 476, 478, 480, 481, 482, 483, 485, 488, 493, 494, 495, 499, E: 558, 560, 562, 563, 566, 568, 569, 574, 575, 576, 579, 584, 586, 587, 588), Apetroaiei Mihai (1372, 374, 375, 377, 384, 385, 407, 409, 414, 413, 416, 434, 436, 441, 442, 449, 472, 474, E: 558, 560, 563, 567, 568, 569, 574, 575, 576, 578, 584, 586, 587, 588), Cătană Viorica (1372, 374, 375, 378, 381, 382, 392, 403, 416, 436), Cîrlig Elena (1372, 373, 374, 376, 379, 380, 381, 382, 409, 410, 412, 440), Chiculiţa Mihai (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 390, 403, 407), Costin Sebastian (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 385, 386, 467), Dragan Elena (1372, 373, 374, 376, 377, 382, 383, 385, 384, 392, 403, 472, 473, 475, 484), Cioceanu Marta (1373, 376, 379, 381, 382, 440, 441, 442, 443, 449, 472), Dobrogeanu Mihai (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 380, 382, 383, 409, 410, 413, 414, 416, 434, 436, 441, 442, E: 558, 559), Drăgănescu Marin (1372, 374, 375, 376, 377, 379, 383, 385, 390, 392), Gaşpar Dumitru (1372, 374, 375, 377, 378, 381, 383, 385, 392, 403, E: 563, 574, 585, 586, 587, 588, 592, 608), Juibu V. Apostolache (1372, 374, 375, 378, 380, 381, 385, 412, 434, 472, 483), Mastac Mircea (1374, 381, 389, 403, 409, 410, 411, 423, 434, 441, 449, 461, 465), Popovici Al. Dan (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 388), Herşcovici Ernest (1373, 375, 380, 382, 412, 423, 434, 436, 449), Partenie Marcela

(1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381—386, 401, E: 558, 559), *Pivniceru Rada* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 389, 390, 403, 406, 407, 412, 423, 426, 434, 436, 441, 442, 443, 449, 468, P), Roditti Ion (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 379, 380, 381, 382, 383, 403, 410, 449, 458), Mingiuc Constantin (1372, 373, 374, 375, 377, 380, 381, 383, 409, 410, E: 569, 575, 578, 576, 587, 588), Stegărescu P. Viorel (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 385, 386, 389, 390, 403, 406, 407, 412, 423, 426, 434, 436, 441, 442, 443, 449, 468, 475), Şerban Constantin (1410, 431, 432, 434, 441, 449, E: 563, 565, 566), Tache Gh. Ştefan (1372, 375, 378, 381, 383, 409, 410, 416, 436, 440, 442, 449, E: 559, 563, 566, 571, 574, 575, 578, 579).

GĂLĂŢENI (Vida, Bucureşti). Şcoala de 7 ani, Sf. Gheorghe. Clasa VI-a. *Ionescu Elena* (1449, 459, 460, 461, E: 550, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588).

GHEORGHEINI. Clasa IX-a. Mîndru Traian (1472, 474, 482, 493, 494, E: 563, 569, 571, 572, 574, 578, 586, 587, 588); clasa X-a. Gogoncea N.Victor (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 382, 383, 405, 410, 412, 475, E: 559, 563, 568), Rozemberg Silvia (1373, 375, 378, 379, 382, 449, 456, 472, 493, 498), Sărăţeanu Alexandru (1372, 378, 382, 383, 436, E: 563, 575, 576, 571, 574).

GIURGIU. Clasa VII-a. Minu I. Marian (E: 544, 551, 559, 563, 569, 574, 575, 576, 578); clasa VIII-a. Bădilă I. Mihai (1449, 460, 474, 494, 497, E: 575, 578, 586, 587, 588), Ianculescu Ovidiu (1449, 460, 474, 493, 494, E: 563, 571, 574, 575, 576, 580, 586, 587, 588), Mustăţea Florea (1434, 460, 493, 494, E: 563, 569, 571, 574, 575, 579, 580, 586), Marinescu Cornel (1449, 493, 494, 536, E: 569, 574, 580, 586, 587, 588, 592, 600, 602, 603, 608), Panaitopol V. Laurenţiu (1372, 383, 434, 436, 449, 483, E: 558, 559, 560, 561, 563, 567, 569, 571, 572, 574, 577, 578, 580, 587, 588), Şerbănescu C. Florin (1449, 474, 493, 494, E: 563, 574, 586, 592, 594, 597, 600, 601, 602, 608); clasa IX-a. Ciobanu Marin (1419, 449, 460, E: 563, 568, 571, 574, 575, 576, 577, 586, 587, 592), Stăncescu St. Nelu (1389, 402, 430, 431, 433, 449, 460, 475, 481, 486, 493, 494, 495, 509, 523, 526, 527, 530, 535, 543, E: 554, 576, 577, 578, 583, 584, 586, 587, 588, 592, 594, 597, 603, 608), Stegaru E. Vasile (1430, 436, 460, 546, E: 563, 564, 574, 582, 583, 584, 586, 588, 597, 598); clasa X-a. Mateescu Doina (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 383, 386, 401, 403, 416, 436, 440), *Bigan V. Stan* (1425, 427, 428, 437, 440, 444, 449, 455, 456, 457, 459, 460, 461, 462, 468, 472, 473, 474, 475, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 492, P), Malciu I. Octavian (1372, 375, 376, 379, 390, 403, 434, 449, E: 550, 558, 559, 560, 563, 564, 568, 569, 571, 574, 575, 576, 578, 584, 587), *Mişcol M. Mircea* (1414, 444, 470, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 483, 485, 493, 495, 496, 498, 501, 508, 513, 515, 517, 520, 523, 524, 526, 527, 528, 532, 534, 536, 537, 540, 542, 544, 549, 554, 555, P), Preda R. Ştefan (1413, 416, 436, 459, 472, 475, 483, 486, 516, 526, 532, E: 558, 559, 563, 578),

HÎRLAU (Iaşi). Clasa VIII-a. *Ţibuleac Florin* (1372, 377, 378, 383, 386, 390, 397, 403, 431, 432, 433, 434, 443, 449, 459, 460, 461, E: 550, 551, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 565, 567, 568, 569, 570, 571, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590).

HUNEDOARA. Absolvent şcoala tehnică. Nicolăescu Victor (1372, 373, 376, 377, 378, 379, 381, 385, 411, 416, 436, 440, 472, 473, 474, 482, 483, 486).

HUŞI. Clasa X-a. Luscalu Romeo (1413, 416, 423, 432, 436, 442, 449, 451, 452, 453, 467, 472, 474, 475, 477, 482, 483, 513, 526, 532, 555, E: 563, 564, 567, 568, 570, 571, 572, 574); clasa X-a. Dolteanu Temistocle (1472, 473, 475, 483, 513, 516, 521, 522, 526, 532, 555, E: 608).

IAŞI. Clasa VI-a. Marinescu Alexandru (E: 554, 561, 563, 568, 574, 575, 581, 586, 587, 588); clasa VIII-a. Cuşman Ilie (1449, 474, 486, 493, 494, 504, 524, E: 553, 558, 559, 560, 578, 579, 580, 585, 586, 587, 592, 597, 598, 599, 600, 602, 607, 608), Chişleag Florin (1372, 377, 396, 403, 418, 423, 424, E: 552, 553, 563, 567, 568, 573, 574, 575), Balif Andrei

(1389, 403, 404, 434, E: 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562 563, 564, 565, 566, 567, 569, 570, 571, 573, 574, 575), Feldman Milu (1396, 460, E: 558, 559, 560. 581, 585, 587, 588), Sor Libu (1396, 460, E: 558, 559, 560, 578, 580, 581, 585, 587, 588), tractorist *com. Negreşti*, Stegaru Gr. Laurian (1406, 407, 457, 459, 460, 461, 462, E: 553, 560, 561, 576, 577, 578, 579, 586, 587, 588); clasa IX-a. Corduneanu Adrian (1385, 418, 419, 424, 434, 449, 456, 460, 465, 468), Rubin Sorel (1412, 442, 526, 540, 548, E: 567, 578, 586, 592, 601, 602); clasa X-a. Căruceru Neta (1472, 473, 474, 475, 481, 482, 483, 486, 493), Chibici Octav (1373, 375, 376, 379, 377, 380, 389, 403, 407, E: 558, 559), Herşovici Bruno (1372, 374, 377, 379, 403, 407, E: 563, 564, 565, 566), Iţicovici Moise (1442, 449, 462, 472. 475, 481, 482, 483, 486, 493, 498, 499), Ioil Iulian (1372, 377, 378, 407, 442, 475, 482, 483, 474, 486, 493, 496, 551)., Mittelman Iosif (1373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 389, 382, 383, 384, 385, 388, 389, 392, 395, 396, 407), Munteanu Dan (1372, 373, 374, 375, 376, 377. 378, 379, 380, 382, 383, 385, 386, 390, 403, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412), Panaitescu Gh. (1472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 481, 483, 484, 485, 489, 486, 491, 493, 494, 498, 499, 506), Valache Alexandru (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 385, 403), Raport Paul (1387, 1414, 416, 441, 465, 474, 475, 481, 482, 483, 486, 493, 513, 515, 516, 522, 524, 526, 528, 532, P), Rapp Iacob (1449, 472, 475, 481, 482, 483, 486, 493, E: 563, 584), Azril Beno (1476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485), Stauber Aron (1436, 472, 473, 474, 475, 476, 479, 482, 483, 485, 486, 493, 499), *absolvent. Segal Zigu* (1372, 375, 376, 378, 379, 381, 383, 416, 436, 442, 453, 472, 473, 474, 477, 478, 479, 480, 482, 516, 522, 526, 527, 528, 531, 532, 536, E: 558, 559, 560, 561, 562, 563, 571, 574, 587, 588, 600, 606, 608); clasa X-a. Herşcu Natan (1410, 416, 436, 442, 449, 459, 462, 472, 473, 474, 475, 479, 481), *Hogaş Constantin* (1453, 460, 464, 465, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 497, 498, 499, 504, 506, 508, 511, 513, 517, 520, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532. 533, 534), Svarţ Lazăr (1472, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 482, 483, 486, 499). Şcoala Pedagogică de învăţători, anul I. Mertic Elena (E: 558, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575, 580, 581, 582, 584, 588, 589, 597, 60); anul II. Crăcană I. Petrea (1418, 423, 424, 439, 449, 464, 467, 471, 472, 473, 474, 479, 481, 482, 484, 485, 491, 493, 495, E: 563, 565, 567, 568, 569, 571, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 582, 586, 587, 588), Cozmei Nicolae (1493, 494, 495, E: 563, 568, 571, 574, 578, 580, 586, 588, 594, 608), Capitanu V. (1493, 494, 529, E: 563, 566, 568, 571, 573, 574, 577, 579, 580, 586, 588, 592, 606, 607, 608), Apavăloaie M. (E: 560, 562, 563, 565, 566, 568, 569, 571, 574, 575, 577, 586, 599, 601, 608), Cebere Dumitru (E: 560, 562, 563, 565, 566, 569, 574, 575, 577, 586, 587, 601), Dobrea C. (E: 563, 565, 566, 568, 569, 571, 574, 575, 586, 587, 588, 599, 601, 608, 609), Burlacu Petru (1449, E: 563, 566, 568, 571, 573, 574, 575, 580, 586, 587, 588), Pescaru Neculai (E: 563, 565, 568, 569, 571, 574, 575, 586, 587, 588); anul III. Burlacu I. Ioan (E: 560, 562, 563, 565, 566, 568, 569, 571, 574, 575, 577, 586, 587, 599, 601, 608, 609); anul IV. Gafencu Gh. (1493, 494, 529, E: 578, 580, 584, 586, 587, 592, 602, 606, 607, 608), Grăjdeanu Petru (1449, 451, E: 554, 558, 576, 580, 581, 583, 586, 587, 588, P).

LUGOJ. Clasa X-a. Nemeş Alexandru (1513, 515, 516, 524, 526, 527, 528, E: 592, 597, 600, 602, 607), Lupu Petru (1449, 465, 472, 473, 474, 475, 476, 479, 481, 483, 485, 486, 489), Popescu Dan (1409, 412, 413, 414, 415, 416, 419, 423, 424, 434, 441, 442, 443, 449, 453, 454, 456, 460, 464, 465, 467).

MARGINEA (Rădăuţi). Absolvent. Halip Dumitru (1372, 373, 374, 375, 376, 379, 380, 382, 383, 385, 392, 404, 406, 408, 409, 411, 416, 421, 423, 426, 436, 449, 464, 465).

MEDIAŞ (Reg. Stalin). Absolvent. Ciocîrlie Gh. Gh. (1416, 436, 442, 449, 453, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 481, 482, 486, 493, 494, 495, 497, 498).

MIZIL (Ploieşti). Absolvent. *Parepa C. Grigore* (1418, 419, 429, 454, 464, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 518, 520, 521, 524, 533, 534, 535, 536, 540, 542, 543, 544, 551, 554, 555, 556, 558, P).

MOINEŞTI (Bacău). Clasa IX-a. Perlman Maier (1412, 416, 532, 436, 454, E: 558, 559, 560, 563, 566, 567, 568, 569, 571, 573, 572, 574, 578, 581, 587).

MOŢĂŢĂI (Craiova). Clasa VI-a. Rudeanu I. Romulus (E: 563, 564, 566, 569, 571, 573, 574, 587, 592, 600, 602).

OCNA MUREŞ (Arad). Clasa IX-a. Mîrza Mircea (1434, 436, 474, 475, 486, 491, 493, 517, 518, 522, 524, 526, 527, 528, 532).

ORADEA. Şcoala elementară *Sînandrei*. Clasa VI-a. Leghezeu Andrei Ana (E: 563, 566, 568, 571, 574, 487, 603, 604, 608), Gal Iuliana (E: 551, 554, 560, 563, 568, 569, 574, 575, 586, 587); Şcoala medie tehnică de construcţii, anul IV. Găbrian Cornelia (1372, 377, 378, 379, 380, 382, 472, 475, 476, 482, 485, 442, 474, 481, 486, 498); clasa IX-a. Oprea N. Ion (1449, 458, 460, E: 576, 577, 580, 582, 584, 486, 487); clasa X-a. *Breban Mircea* (1373, 376, 379, 382, 409, 415, 424, 427, 440, 441, 442, 448, 458, 465, 468, 469, 472, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 489, 490, 492, 494, 495, 496, 498, 499, 503, 509 513, 515, 516, 517, 518, 520, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 534, 540, 545, 553) *Ghelebeu Traian* (1373, 376, 379, 382, 406, 407, 409, 410, 413, 415, 416, 436, 537, 442, 443, 449, 457, 458, 459, 460, 464, 465, 472, 474, 475, 478, 480, 481, 482, 483, 486, 489, 493, 494, 498, 499, 513, 515, 516, 521, 522, 524, 526, 529, 532, 555), Ciupa Liana (1408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 436, 437, 438, 439, 440), *Guiaşu Silviu* (1408, 409, 414, 415, 418, 419, 421, 423, 424, 425, 426, 431, 432, 433, 434, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 443, 449, 453, 454, 458, 459, 460, 461, 465, 467, 468, 470, 472, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 490, 491, 493, 494, 495, 497, 498, 499, P, N), *Porţeanu Mircea* (1409, 410, 413, 416, 436, 437, 441, 442, 458, 461, 462, 465, 472, 474, 475, 483, 485, 498, 513, 515, 520, 522, 524, 526, 530, 531, 532, 534, 537, E: 552, 558, 559, 563, 568, 574, 577, 578, 586, 592, 596, 597, 600, 602, 606, 608), *Rus A. Ioan* (1398, 413, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 437 439, 442, 443, 449, 451, 453, 457, 458, 459, 461, 464, 465, 468, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 488, 489, 493, 494, 495, 498, 499, 503, 508, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 534, 536, E: 585, P), Şincai Radu (1408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 432, 437, 439, 441, 442, 449, 453, 458, 460, 461, 465, P), Ursu Augustin (E: 552, 558, 560, 563, 564, 570, 574, 578, 584, 586, 587, 588).

(Lista rezolvitorilor care au trimis probleme rezolvate în luna martie 1955, din localităţile care încep cu iniţialele O—Z, va apare în continuare în nr. ce urmează.

— La exerciţiile şi problemele propuse pentru şcoala de 7 ani se primesc rezolvări numai dela elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, sau de là elevi din anul I a şcolilor medii tehnice sau ai şcolilor pedagogice de învăţători.

— Rezolvările de probleme bine făcute vor fi anunţate la rubrica rezolvitorilor numai de la rezolvitorii care trimit un număr de minimum 10 probleme bine rezolvate din cele propuse în ultimele trei numere apărute; soluţiile trebuind să fie scrise îngrijit, cu cerneală şi fiecare pe cîte o foaie aparte, de mărimea unui caiet obişnuit.

— Abonamente la G.M.F.—B se mai fac pentru numerele 7, 8, 9, 10, 11, 12/1955 cu preţul de lei 5,00, la Oficiile poştale sau prin factorii poştali.

— Tovarăşii abonaţi sînt rugaţi să ne comunice, care rubrici din cuprinsul « Gazetei Matematice şi Fizice » seria B, îi interesează mai mult.

— Corespondenţii care au primit prin poştă, cărţile acordate ca premii la G.M.F.—Bi anunţate în numărul 3 din martie 1955, sînt rugaţi să ne confirme primirea; iar cei ce nu au primit încă aceste premii să ne comunice adresa exactă unde să se facă expedierea lor.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multe probleme pe aceiași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— *Se primesc soluții numai* la problemele și exercițiile din ultimile *patru* numere apărute.

— Rezolvitorii pot trimite *într-un singur plic*, francat după greutate, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă «Redactarea soluțiilor».

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1955, se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1955.*

— *Pentru anul 1955, G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX- a și a X-a sau de către studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic decît zece, sau necorect redactate.

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *În redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții au fost scrise îngrijit și sînt bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante sub formă de note.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a «Olimpiadei matematice și fizice»*, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a presei București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat să *facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Cititorii și colaboratori revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care doresc să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15-18, miercuri între orele 10-13 și simbătă între orele 15-18 la sediul redacției din strada Academiei 14, București — Telefon 4.46.58

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Șiruri recurente* de **A. I. Markușevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducției matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităților* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii și logaritmi* de **A. I. Markușevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi de* **A O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice și alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime și minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **. S. Șklovski** (lei 6,85)
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu** (lei 6,55).

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POȘTALE SAU PRIN FACTORII POȘTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRIRDERI ȘI INSTITUȚII. TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 5, PENTRU ȘASE NUMERE.

C. 762. Întreprinderea Poligrafică Nr. 4. — București

Prețul **Lei 1** exemplarul

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

RILAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

„Trăiască 23 august, măreaţa sărbătoare a eliberării Patriei noastre de către Glorioasa Armată Sovietică".

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VI — August 1955

8

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 8 — august 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Gheorghe Ţiţeica de N. Mihăileanu*	341
2.	*Funcţia lui Euler de O. Sacter*	344
3.	*Radioastronomia de Călin Popovici*	351
4.	*Asupra unor sume trigonometrice de C. Ionescu-Ţiu*	356
5.	*O problemă de la olimpiada matematică 1955 de A. Şaichin*	360
6.	*Caleidoscop fizic*	363
7.	*Probleme rezolvate (1380; 1381; 1385; 1386; 1388; 1391; 1392; 1394; 1397; 1421; E 558; E 568; E 571; E 574; E 586; E 609*	366
8.	*Probleme propuse (1779—1803)*	374
9.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 679—E: 692)*	377
10.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	379

ANUL VI 8 AUGUST 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VI * Nr. 8 August 1955

LA A 60-A ANIVERSARE DE LA APARIŢIA PRIMULUI NUMĂR AL « GAZETEI MATEMATICE »

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GHEORGHE ŢIŢEICA

N. MIHĂILEANU
profesor la Institutul Pedagogic, Timişoara

ŢIŢEICA este primul matematician romîn care publică un mare număr de lucrări ştiinţifice, iar valoarea acestor lucrări, recunoscută în toată lumea constituie o cinste ce se răsfrînge asupra ţării noastre. Nu putem prezenta într-o revistă cu caracter elementar, o expunere despre suprafeţele Ţiţeica, despre curbele Ţiţeica, despre metodele noi folosite de Ţiţeica şi despre importanţa tratatelor scrise de el.

Ţiţeica a fost un savant renumit şi un autor preţuit. El a fost de asemeni un profesor excelent, un animator neobosit, un om conştiincios şi de caracter. Este adevărat că aceste însuşiri pot fi recunoscute multor cărturari. Insă Ţiţeica le-a întrunit în asemenea măsură, încît el poate fi considerat drept tipul omului de ştiinţă. Ţiţeica a trăit nu de mult în mijlocul nostru iar cei ce am avut fericirea de a fi fost direct înrîuriţi de el sîntem datori să transmitem tinerei generaţii, dragostea, respectul şi admiraţia pe care le purtăm neuitatului nostru maestru.

★

Gheorghe Ţiţeica s-a născut la Turnu-Severin, la 4 octombrie-1873. Tatăl său a fost fochist pe vapoarele dunărene şi a murit de timpuriu. Pentru meritele sale şi prin dorinţa puternică de a studia, manifestată încă din primii ani de şcoală, tînărul Ţiţeica reuşeşte să obţină o bursă; amintim că pe atunci bursele şcolare se obţineau foarte greu. El a urmat liceul din Craiova, unde s-a distins la toate obiectele.

Cu mintea sa larg cuprinzătoare, el se manifestă în toate activităţile culturale, îndemnîndu-şi colegii să colaboreze la « Revista Şcoalei ». La această publicaţie,

elevul Țițeica redactează rubrica matematică. In timpul scurt cît a durat revista, el publică douăzeci de probleme, la care primește soluții pe care tot el le redactează. Din punct de vedere al istoricului revistelor matematice, după revista « Recreații Științifice » din Iași, care a apărut între anii 1883—1889, aceasta este a doua publicație românească cuprinzînd chestiuni de matematici.

Totodată Țițeica colaborează la revistă prin studii literare și filosofice. Aceste preocupări le-a avut Țițeica în tot cursul vieții sale fiind totodată și un iubitor de muzică.

După ce a absolvit liceul, Țițeica vine în București. El obține prin concurs o bursă și poate să urmeze astfel matematicile. La universitate are profesori pe Spiru Haret, pe David Emanuel, pe Constantin Gogu. În 1895 Țițeica își ia licența și este numit profesor la seminarul Nifon. Curînd însă, el a fost numit în învățămîntul superior. Pregătirea temeinică și puterea sa de muncă îi confereau acest drept. Pe atunci nu se putea obține o calificare pentru învățămîntul superior, decît într-un centru universitar din occident. Țițeica isbutește să plece la Paris, din economiile făcute cu greu din salariul său.

După un concurs, la care cu mare greutate era admis un străin, Țițeica rămîne să studieze la cea mai vestită universitate din lume, de atunci; el își reface în primul an licența, fiind clasificat primul. In tot timpul cît a stat la Paris, a studiat neîncetat, împărțindu-se aproape exclusiv între cursuri și biblioteci; el socotea o datorie a sa să se întoarcă în țară cît mai repede, ceea ce a și făcut în anul 1899, imediat după susținerea tezei.

G. Țițeica este al cincilea romîn doctor în matematici al Universității din Paris, după Spiru Haret, David Emanuel, Const. Gogu și N. Coculescu.

Inaintea lui Țițeica și alți romîni publicaseră lucrări remarcabile în periodicele din occident; întorși în țară însă ei n-au mai continuat aceste lucrări, sub cuvînt că la noi nu sînt condiții prielnice pentru aceasta; de obicei doctoratul era sfîrșitul preocupărilor științifice, un titlu necesar pentru ocuparea unei funcții superioare. Țițeica a rupt această tradiție, continuîndu-și lucrările în țară și ajungînd unul dintre cei mai mari geometri ai lumii. La congresele internaționale de matematici — Toronto (Canada) în 1924, Zurich (1928), Oslo (1936) — Țițeica era ales mereu președinte al secției de geometrie. El a fost invitat la universitățile din Roma, Bruxelles și de cîteva ori la Paris, să țină cursuri. Cărțile sale se bucură de o deosebită prețuire și au avut o mare circulație. In tratatele de specialitate, nu numai că sînt înscrise rezultatele date de Țițeica, (de ex. în Finikov), dar autorii considerau o cinste ca anumite capitole să fie redactate în întregime de Țițeica (de ex. Fubini-Cech).

Întors în țară, Țițeica este numit în 1900, la Universitatea din București, ca profesor la catedra de geometrie, la care a funcționat aproape 40 de ani, trecînd prin toate gradele: suplinitor, agregat, definitiv, deși obiceiul era ca numirea să se facă direct cu titlul definitiv cu puțină stăruință; dar Țițeica a vrut să arate prin exemplul său personal că legea trebuie respectată. Incepînd din 1928 Țițeica a funcționat și la Politehnica din București, ca profesor de analiză.

A decedat la 5 februarie 1939, în vîrstă de 65 ani, în plină activitate.

★

Lecțiile lui Țițeica erau de o desăvîrșită artă a pedagogiei. La începutul fiecărei ore de curs el recapitula ideile principale ale lecției anterioare; lecția predată era completă și se încheia cu o privire generală; expunerea era logică, clară, precisă, în stil foarte îngrijit fără să se folosească de nicio notiță, rezultatele importante erau subliniate prin variația intonației; toate calculele se sprijineau pe o puternică

intuiție geometrică. El își ținea totdeauna cursul la nivelul de înțelegere al studenților și punea atîta suflet în predare, atîta caldă convingere în tot ceea ce expunea încît lecția lui te cucerea de la început, te determina să-l urmărești cu viu interes pînă la sfîrșit și să pleci de la curs cu lecția învățată.

In anul întîi Țițeica preda geometria analitică al cărui curs îl reînoia în fiecare an, privindu-l de fiecare dată sub alt aspect. In anul trei, la cursul de geometrie superioară, el preda de fiecare dată, cîte un capitol nou de geometrie diferențială, făcînd accesibile problemele cele mai delicate, prin puterea sa de expunere. Acest curs era frecventat și de absolvenți, de profesori din învățămîntul secundar, de ingineri, încît sala « Spiru Haret » era totdeauna plină.

Dragostea lui Țițeica pentru învățămînt se reflectă și din activitatea lui la Gazeta Matematică; împreună cu I. Ionescu, A. Ioachimescu și V. Cristescu, el ia parte la munca redacțională încă de la înființarea « Gazetei » din 1895. Intors de la Paris, el reia această colaborare. In afară de faptul că publică note, probleme, recenzii, culegeri de probleme, Țițeica era un permanent raportor al Gazetei. El asista regulat la concursurile anuale și era o cinste pentru elevii asupra cărora se oprea atenția lui. Cînd făcea caracterizările premianților, el sublinia nu numai calitățile, dar în aceiași măsură și lipsurile, ca un judecător sever și drept și de aceea atît de stimat.

Țițeica urmărea dezvoltarea și răspîndirea științelor sub toate formele. Impreună cu G. Longinescu fondează revista Natura, unde publică un mare număr de note de popularizare; în plus, conduce aproape întreaga muncă redacțională și administrativă.

Ca fondator al Societății Amicii Științelor Matematice, publică în 1895 un buletin.

Din 1913, urmînd lui Spiru Haret, este membru al Academiei iar din 1929, secretar general. In cadrul activității sale la Academie el inițiază o serie de monografii științifice.

Țițeica avea o ținută modestă; era de statură mijlocie, blond, cu fruntea pronunțată, privirea senină.

Mai presus de orice, admirăm la Țițeica exemplul vețiI sale.

Țițeica era deosebit de pretențios față de el însuși; nu întîrzia niciodată la curs sau la examene; își respecta integral cuvîntul dat. Dotat cu o minte clară și o intuiție puternică, Țițeica este un exemplu de ceea ce poate aduce munca disciplinată, prin eforturile permanent depuse, în ridicarea continuă a nivelului muncii creatoare. Țițeica își pregătea minuțios toate lecțiile pe care le redacta ordonat în caiete sistematizate; lucrările sale științifice le studia sub toate aspectele înainte de a le publica. Toată viața lui Țițeica este un exemplu de corectitudine și moralitate.

Pentru autoritatea pe care i-o dădea pregătirea științifică, puterea de muncă și judecata sa dreaptă, i-au fost încredințate mai multe posturi de răspundere: decan al facultății de științe, președinte al Societății de Științe, vice președinte al Societății Politehnice, membru, apoi Președinte al Consiliului Permanent pe atunci cel mai înalt for al Ministerului Instrucțiunii Publice.

Țițeica judeca cu asprime superficialitatea și incorectitudinea; încuraja numai sforțările meritorii; nu pierdea nici o ocazie de a mustra pe cei ce nu aveau simțul datoriei și al ordinei; de aceea este uriaș rolul său de educator, atît la catedră cît și la Gazeta Matematică. Studentul care ștergea tabla lăsînd unele resturi de litere; lăsa capul în jos să reconstituie din memorie rîndurile din curs; ori nu scria ordonat; cît și candidatul la concursul « Gazetei », care absenta nemotivat, etc., primeau observații pe care nu le mai uitau.

Era covîrșitoare impresia pe care o lăsau cuvîntările morale ținute de Țițeica la masa comună, care încheia concursurile anuale ale Gazetei Matematice. In cuvinte care trădau marea lui dragoste pentru tineret, pentru tot ce este frumos și înălțător, el scotea în evidență puterea educativă a matematicilor și critica cu severitate lipsurile constatate la concurs. Tot el dădea semnul încheierii reuniunii, la 12 fără un sfert.

★

Rolul lui Țițeica în dezvoltarea geometriei în țara noastră este considerabil. Opera lui a găsit numeroși continuatori, ei înșiși matematicieni vestiți. Este suficient să amintim pe marii profesori dispăruți: N. Abramescu și Al. Pantazi.

Stilul de expunere al lui Țițeica a rămas drept model ideal; încît cînd vezi un profesor ori un autor expunînd clar, metodic și elegant cea mai frumoasă mențiune cu care îl poți distinge este să recunoști: acesta este un elev al lui Țițeica.

FUNCȚIA LUI EULER

O. SACTER

1. Un rol însemnat în teoria numerelor îl are funcția numerică $\varphi(N)$ care înseamnă numărul numerelor prime cu N și mai mici ca el. Această expresie este cunoscută sub numele de funcția lui Euler sau indicatorul lui N.

Pentru a da posibilitate cititorilor să folosească în diferite împrejurări această funcție, vom demonstra cîteva teoreme care conduc la stabilirea formulei de calcul a lui $\varphi(N)$.

Reamintim cititorului că două numere a și b sînt prime între ele dacă nu au nici un divizor comun $d \neq 1$. Astfel de numere sînt 13 și 17; 18 și 15; etc. Și acum să trecem la demonstrarea teoremelor la care ne-am referit mai sus.

2. Dacă dividem fiecare număr din șirul

$$c;\quad c+b;\quad c+2b;\ \ldots\ c+(a-1)\,b \tag{1}$$

prin a, care este prim cu b, obținem drept resturi într-o anumită ordine, numerele:

$$0;\quad 1;\quad 2;\ \ldots\ (a-1) \tag{2}$$

Într-adevăr, două numere oarecari din șirul (1) divizate prin a nu pot da același rest. Presupunînd că numerele diferite $c + mb$ și $c + nb$ împărțite prin a ar da același rest r, am avea,

$$c + mb = Ma + r \quad \text{și} \quad c + nb = M'a + r$$

și prin urmare, $(c + mb) - (c + nb) = (Ma + r) - (M'a + r)$ sau $(m - n)b = (M - M')\,a$ ceea ce implică divizibilitatea produsului $(m - n)\,b$ prin a, fapt imposibil pentru că b este prim cu a, iar $m - n$ fiind mai mic decît a nu poate fi nici el divizibil prin a. Așa dar, cele a numere din șirul (1) divizate prin a dau resturi diferite care fiind mai mici decît a vor fi numerele 0; 1; 2; 3... ... $(a - 1)$ luate într-o anumită ordine.

3. În șirul (1) există tot atîtea numere prime cu a ca și în șirul (2).

Într-adevăr, numărul oarecare $c + mb$ și restul său r_m obținut din împărțirea sa prin a sînt amîndouă prime sau neprime, pentru că avem

$$c + mb = Ia + r_m$$

Dacă $c + mb$ este neprim cu a, există atunci un divizor d care împarte exact şi diferenţa $c + mb - Ia = r$, adică r_m este neprim cu $c + mb$.

În cazul cînd $c + mb$ este prim cu a, nu e posibil ca în acelaşi timp r să fie neprim cu a. Ar însemna în acest caz, că divizorul comun numerelor a şi r_m să fie divizor şi pentru suma $Ia + r_m = c + mb$ ceea ce contrazice presupunerea că $c + mb$ este prim cu a.

4. Ca o consecinţă a celor spuse pînă aci, rezultă de asemenea — *în cazul cînd a şi b sînt prime între ele* — că în şirul

$$c;\quad c + a;\quad c + 2a;\ \ldots;\ c + (b - 1)\,a \tag{3}$$

sînt tot atîtea numere prime cu b cîte sînt şi în şirul

$$0;\quad 1;\quad 2;\ \ldots;\ b - 1 \tag{4}$$

5. Ţinînd seama de cele arătate mai sus rezultă că, *şirurile* (1) *şi* (2) *au fiecare cîte* $\varphi(a)$ *numere prime cu a, iar şirurile* (3) *şi* (4) *au fiecare* cîte $\varphi(b)$ *numere prime cu b.*

Funcţia numerică $\varphi(N)$ a lui Euler, se bucură de următoarea proprietate importantă:

T e o r e m ă. *Dacă numerele a şi b sînt prime între ele, avem,*

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

Pentru a demonstra această relaţie să aşezăm primele ab numere în următorul tablou:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & c & \ldots & a \\
a+1 & a+2 & a+3 & \ldots & a+c & \ldots & 2a \\
2a+1 & 2a+2 & 2a+3 & \ldots & 2a+c & \ldots & 3a \\
\vdots & & & & & & \\
(b-1)\,a+1 & (b-1)\,a+2 & (b-1)\,a+3 & \ldots & (b-1)\,a+c & \ldots & ba
\end{array} \tag{5}$$

Ţinînd seama de cele spuse sub **2**, rezultă că fiecare rînd conţine tot atîtea numere prime cu a ca şi rîndul întîi, adică $\varphi(a)$, iar numere prime cu a care dau acelaşi rest prin diviziunea cu a sînt aşezate toate pe o aceiaşi coloană. Numerele dintr-o coloană oarecare

$$c;\quad c + a;\quad c + 2a;\ \ldots;\ c + (b - 1)\,a$$

conţin tot atîtea numere prime cu b ca şi oricare altă coloană; iar după cele spuse sub **4** numărul lor este $\varphi(b)$.

Deoarece pe fiecare coloană există cîte $\varphi(b)$ numere prime cu b, iar acelea care dau acelaşi rest prin a şi sînt prime cu a sînt aşezate pe aceiaşi coloană, rezultă că numărul total al numerelor prime cu a şi b, adică prime cu ab este egal cu $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Aşa dar,

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

Aplicînd acest rezultat la un produs de trei numere prime între ele două cîte două: a, b, c, avem:

$$\varphi(abc) = \varphi[(ab) \cdot c] = \varphi(ab) \cdot \varphi(c) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(c)$$

şi mai departe deducem din aproape în aproape,

$$\varphi(a \cdot b \cdot c \ \ldots\ l) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(c) \ \ldots\ \varphi(l)$$

unde am considerat a, b, c, $\ldots$, l numere prime între ele două cîte două.

6. Teorema demonstrată ne permite să stabilim formula pe baza căreia se poate calcula $\varphi(N)$ unde $N = a^{\alpha}b^{\beta} \ldots l^{\lambda}$ se află descompus în factorii săi primi $a, b, c, \ldots, l$.

Să presupunem mai întîi, cazul cînd $N = a^{\alpha}$ şi să calculăm în acest caz $\varphi(N)$. Numerele neprime cu N sînt evident, următoarele:

$$a;\ 2a;\ 3a;4a;\ \ldots;\frac{N}{a}a \tag{6}$$

al căror număr este $\frac{N}{a}$. Numărul numerelor prime cu N va fi format din toate numerele mai mici ca N necuprinse în şirul (6). Acesta e:

$$\varphi(N) = N - \frac{N}{a} = N\left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

Acest rezultat, ca şi cel stabilit sub **4**, ne permite să calculăm $\varphi(N)$ în cazul general cînd $N = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$.

Deoarece numerele $a,b,c, \ldots, l$ sînt prime între ele două cîte două pentru că numerele $a, b, c, \ldots, l$ sînt prime absolute, rezultă că:

$$\varphi(N) = \varphi(a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}) = \varphi(a^{\alpha}) \cdot \varphi(b^{\beta}) \cdot \varphi(c^{\gamma}) \ldots \varphi(l^{\lambda})$$

şi prin urmare,

$$\varphi(N) = a^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot b^{\beta}\left(1 - \frac{1}{b}\right) \cdot c^{\gamma}\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots l^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

sau în sfîrşit,

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{l}\right) =$$

$$= a^{\alpha-1}b^{\beta-1} \ldots l^{\lambda-1}a - 1)(b-1) \ldots (l-1). \tag{7}$$

De exemplu,

$$\varphi(132) = \varphi(2^2 \cdot 3 \cdot 11) = 2^1 \cdot 3^0;\ 11^0)(2-1)\ (23-1)\ 11-1) = 40$$

7. O b s e r v a r e. Dacă N este un număr impar el este prim cu 2 şi în acest caz avem prin aplicarea teoremei de sub **5** următoarea relaţie:

$$\varphi(2N) = \varphi(2) \cdot \varphi(N) = \varphi(N) \text{ pentrucă } \varphi(2) = 1.$$

Dacă înlocuim N cu 1 relaţia stabilită devine,

$$\varphi(2) = \varphi(1)$$

Deşi formula (7) ne dă $\varphi(1) = 0$, ţinînd seama de faptul că formula generală $\varphi(2N) = \varphi(N)$ în cazul N impar ne dă $\varphi(2) = \varphi(1)$; vom lua pentru $N = 1$, $\varphi(1) = 1$.

8. Să demonstrăm următoarea teoremă a lui Euler.

Dacă a şi N sînt numere prime între ele, expresia $a^{\varphi(N)} - 1$ *este divizibilă prin N.*

Să considerăm cele $\varphi(N)$ numere prime cu N şi mai mici ca N:

$$\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \delta \ldots \eta \ldots \lambda \ldots \omega \tag{8}$$

Să le înmulțim pe fiecare cu a; obținem șirul:

$$a\alpha;\ a\beta;\ a\gamma \ldots a\eta \ldots a\lambda \ldots a\omega \qquad (9)$$

Numerele acestea divizate prin N, dau resturi diferite și prime cu N. Într-adevăr, două numere oarecari din șirul (9) nu pot da aceleași resturi atunci cînd le împărțim prin N, căci altfel am avea, de pildă,

$$a\eta = IN + r \quad \text{și} \quad a\lambda = I'N + r$$

sau

$$a(\eta - \lambda) = (I - I')N$$

ceea ce implică faptul ca N să dividă $a(\eta - \lambda)$, lucru imposibil pentru că N este prim cu a, iar $\eta - \lambda$ nu poate fi divizibil prin N, deoarece ambele numere η și λ sînt mai mici ca N și diferite între ele.

Să arătăm că resturile împărțirii prin N ale numerelor din șirul (9) sînt numere prime cu N. Folosim egalitatea $a\eta = IN + r$.

Dacă numerele N și r n-ar fi prime între ele, ar exista un divizor comun $d \neq 1$ care ar divide și $IN + r = a\eta$. Ar rezulta de aci că $a\eta$ se divide cu d ceea ce nu este posibil decît dacă η se divide cu d, pentru că a este prim cu N prin ipoteză, iar două numere prime între ele nu pot avea un divizor comun $d \neq 1$. În cazul cînd η s-ar divide cu d ar însemna că N și η nu sînt prime între ele, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că resturile împărțirii numerelor șirului (9) prin N sînt numere prime cu N; ele sînt prin urmare, tot numerele șirului (8) luate într-o anumită ordine.

Din cele arătate pînă aci, deducem că produsul numerelor șirului (9) divizat prin N, dă același rest ca și produsul numerelor șirului (8). De unde tragem concluzia că diferența: $a\alpha . a\beta . a\gamma \ldots a\omega - \alpha . \beta . \gamma \ldots \omega$ este divizibilă prin N sau $\alpha\beta \ldots \omega[a^{\varphi(N)} - 1]$ se împarte exact prin N. Cum $\alpha\beta\gamma \ldots \omega$ este prim cu N, rezultă că $a^{\varphi(N)} - 1$ este divizibilă prin N.

Consecință imediată a acestui rezultat este *teorema lui Fermat*. Dacă p este un număr prim absolut iar, a un număr prim cu acesta, atunci $a^{p-1} - 1 = \mathfrak{M} p$. Într-adevăr, avem pentru $N = p$, $a^{\varphi(N)} - 1 = a^{p-1} - 1$ și prin urmare $a^{p-1} - 1 = \mathfrak{M} p$

9. Teoremele lui Euler și Fermat sînt folosite pentru demonstrarea altor teoreme din teoria numerelor. Tot odată ele se întrebuințează pentru rezolvarea unor probleme privind divizibilitatea unor expresii numerice prin altele. Să calculăm, de exemplu, restul împărțirii numărului 7^{353} prin 13. Avem $\varphi(13) = 12$ și prin urmare $7^{12} - 1 = \mathfrak{M}\, 13$. Ținîndu-se seama că $353 = 29 \cdot 12 + 5$ și că $7 = \mathfrak{M}\, 13 - 6$ rezultă

$$7^{353} = (7^{12})^{29} \cdot 7^5 = (\mathfrak{M}\, 13 + 1)^{29} \cdot (\mathfrak{M}\, 13 - 6)^5$$

sau $7^{353} = \mathfrak{M}\, 13 - 6^5$ însă $6^5 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6$ deci $6^5 =$

$(\mathfrak{M}\, 13 - 3)\ (\mathfrak{M}\, 13 - 3)\ (\mathfrak{M}\, 13 + 6) = \mathfrak{M}\, 13 + 54 = \mathfrak{M}\, 13 + 2.$

Deducem

$$7^{353} = \mathfrak{M}\, 13 - 2 = \mathfrak{M}\, 13 + 11.$$

Așadar, restul împărțirii lui 7^{352} prin 13 este 11 ceea ce înseamnă că expresia numerică $7^{353} - 11$ este divizibilă prin 13.

10. Funcția lui Euler $\varphi(N)$ intervine la rezolvarea unor probleme puse de geometrie. Dacă împărțim un cerc în n părți egale și unim punctele de diviziune prin coarde care subîntind cîte k arce, se pune întrebarea ce număr

de poligoane regulate de n laturi se obţin. Pentru a răspunde la aceasta să notăm cu l numărul laturilor unui astfel de poligon. Se consideră poligonul format, dacă prin unirea punctelor de diviziune pornite dintr-un vîrf A ajungem cu extremitatea ultimei laturi tot în A. În acest caz este evident că produsul lk trebuie să fie cel mai mic multiplu posibil al lui n, adică trebuie să avem $lk = an$ sau $l = \frac{an}{k}$. Dacă avem $(n, k) = 1$ *) atunci numărul k divide pe a pentru că n şi k sînt prime între ele şi cum a trebuie să fie cît mai mic posibil rezultă că $a = k$ şi deci $l = n$. Aşa dar, în cazul cînd n şi k sînt prime între ele se obţine un poligon de n laturi după ce înconjurăm cercul de k ori.

Să presupunem acum că $(n, k) = d$, în acest caz avem $n = dn'$; $k = dk'$ şi prin urmare

$$l = \frac{adn'}{dk'} = \frac{an'}{k'}.$$

Numerele k' şi n' fiind prime, iar a cît mai mic posibil, rezultă $a = k'$ şi deci $l = n' = \frac{n}{d}$.

Ajungem la concluzia că dacă n şi k au un cel mai mare divizor comun $d \neq 1$ numărul laturilor poligonului obţinut prin coarde care subîntind cîte k arce este mai mic decît n şi anume: $l = \frac{n}{d}$.

Din cele spuse mai sus rezultă că obţinem poligoane regulate de n laturi numai dacă n şi k sînt prime între ele. Numărul acestor poligoane depinde de cîte numere k prime cu n avem. Ori, se ştie că acest număr este $\varphi(n)$.

Dintre poligoanele obţinute, două cîte două sînt simetrice faţă de diametrul care trece prin A; prin urmare, dacă ţinem seamă de aceasta rezultă că numărul poligoanelor regulate de n laturi distincte între ele este $\frac{1}{2}\varphi(n)$.

11. Întîlnim funcţia lui Euler în studiul ecuaţiilor binome $x^n - 1 = 0$. O rădăcină a unei astfel de ecuaţii se numeşte de ordinul n a unităţii. Printre rădăcinile ecuaţiei $x^n - 1 = 0$ se află unele care nu sînt şi rădăcini de ordin mai mic decît n, pe acestea le numim primitive. Fie r una din ele; şirul de numere:

$$1, r, r^2, \ldots r^{n-1}$$

constituie n numere distincte. Într-adevăr, dacă am avea $r^k = r^l$ $(k < l \leqslant n-1)$, atunci ar trebui să avem $r^{l-k} = 1$ ceea ce ar însemna ca r să verifice ecuaţia binomă $x^{l-k} - 1 = 0$ de grad mai mic decît n. Aceasta contrazice ipoteza că r este o rădăcină primitivă de ordinul n şi prin urmare $r^k \neq r^l$.

Fiecare din numerele şirului de mai sus verifică ecuaţia $x^n - 1 = 0$ pentru că $r^n = 1$ şi ca atare ele fiind n numere distincte constituie cele n rădăcini ale ecuaţiei.

Existenţa rădăcinilor primitive reiese din însăşi formula acestor rădăcini. Se ştie că: $r = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ unde $k = 0; 1; 2; \ldots; n-1$. Rădă-

*) Prin $(a,b)=d$ se înţelege că cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b este d.

cina $r_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ este primitivă pentru că r_1 ridicat la orice putere k $(0 < k < n)$ nu este 1. Într-adevăr, avem pe baza formulei lui Moivre:

$$r^k = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \neq 1.$$

Din cele spuse reiese existența a cel puțin unei rădăcini primitive a ecuației. Aceasta însă, nu este în general, singura rădăcină. Să cercetăm care dintre cele n rădăcini ale ecuației $x^n - 1 = 0$ sînt primitive.

Precum s-a arătat mai sus, dacă r este una din rădăcinile primitive și a cărei existență a fost dovedită; toate rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$ sînt cuprinse în șirul: $1; r; r^2; \ldots r^{n-1}$.

Să vedem care din aceste rădăcini de forma r^k $(k \leqslant n - 1)$ este primitivă.

Să presupunem $(n; k) = d \neq 1$ atunci $n = dn'$ și $k = dk'$. Avem:

$$(r^k)^{n'} = (r^{dk'})^{n'} = (r^{dn'})^{k'} = (r^n)^{n'} = 1$$

deci r^k verifică ecuația $x^{n'} - 1 = 0$ prin urmare nu e primitivă pentru că $n' = \frac{n}{d} < n$.

Dacă $d = 1$, adică n și k sînt prime între ele, atunci situația este alta, rădăcina r^k este primitivă. Într-adevăr, să presupunem că r^k nu este primitivă, atunci există un număr m $(1 \leqslant m < n)$ astfel ca:

$$(r^k)^m = 1 \qquad \text{sau} \qquad r^{km} = 1$$

și pentru că r este primitivă de ordinul n rezultă că exponentul km trebuie să fie un multiplu al lui n, dar cum avem $m < n$ înseamnă că n și k nu sînt prime între ele ceea ce contrazice ipoteza, deci r^k este o rădăcină primitivă. Numărul rădăcinilor primitive ale unei ecuații $x^n - 1 = 0$ rezultă din cele arătate mai sus că este $\varphi(n)$.

12. Teoremele lui Euler și Fermat au aplicații și în explicarea unor proprietăți ale fracțiilor ordinare. În rîndurile care urmează vom releva cu ajutorul acestor teoreme unele proprietăți puțin cunoscute cititorilor noștri.

Din cele expuse pînă aici rezultă că dacă numărul a este prim cu N există întotdeauna un exponent x astfel ca $a^x - 1$ să fie divizibilă prin N. Numărul x poate fi $\varphi(N)$ în cazul cînd N este oarecare și $p - 1$ dacă numărul p este prim absolut. Această observație ne explică unele proprietăți ale fracțiilor ordinare.

O fracție ireductibilă $\frac{a}{N}$ al cărei numitor este prim cu 10 și al cărei numărător este unul din resturile împărțirii unei puteri a lui 10 prin N se transformă într-o fracție zecimală periodică simplă a cărei perioadă se obține din acea a fracției $\frac{1}{N}$ printr-o permutare circulară a cifrelor perioadei acesteia din urmă

Fie m cel mai mic exponent astfel ca $10^m - 1 = \mathfrak{M} N$. Înmulțind $10^m - 1$ cu 10^c se obține o expresie care este de asemenea divizibilă prin N; adică

$$10^{c+m} - 10^c = \mathfrak{M} N.$$

Aceasta dovedește că 10^{c+m} și 10^c divizate prin N dau același rest.

Cînd transformăm $\frac{1}{N}$ în fracție zecimală resturile parțiale sînt de fapt resturi prin N a numerelor $10; 10^2; 10^3; 10^4; \ldots$

Dacă m este cel mai mic exponent astfel că $10^m - 1 = \mathfrak{M}N$ atunci 10^{m+1}; 10^{m+2}; $10^{m+3}\ldots$ vor da aceleași resturi ca și $10; 10^2; 10^3\ldots$ ceea ce înseamnă că după m resturi parțiale vom obține aceleași numere zecimale la cît, adică fracția zecimală este periodică simplă.

Avînd în vedere că numărătorul fracției $\frac{a}{N}$ este restul împărțirii unei a lui 10 prin N, avem: $10^c = qN + a$ de unde rezultă

$$\frac{a}{N} = \frac{10^c}{N} - q = 10^c \cdot \frac{1}{N} - q.$$

Dacă

$$\frac{1}{N} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_m a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \ldots$$

vom avea

$$\frac{a}{N} = 10^c \cdot \frac{1}{N} - q = a_1 a_2 a_3 \ldots a_c - q, a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 \ldots a_c a_{c+1} a_{c+2} \ldots$$

de unde se vede că perioada lui $\frac{a}{N}$ are același număr de cifre ca și perioada fracției $\frac{1}{N}$ și ele se obțin printr-o permutare ciclică.

Fracția $\frac{a}{N}$ este subunitară, de aici rezultă că $q = a_1 a_2 a_3 \ldots a_c$ și deci $\frac{a}{N} = 0, a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_c a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_c$ dacă dividem $\frac{a}{N}$ prin $\frac{1}{N}$ avem:

$$\frac{a}{N} : \frac{1}{N} = 0, a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_c a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_c \ldots : 0, a_1 a_2 \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_m =$$

$$= \frac{a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_c}{999 \ldots 9} : \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{99 \ldots 9} = \frac{a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 \ldots a_c}{a_1 a_2 \ldots a_m} = a$$

ceea ce ne arată că perioada fracției $\frac{a}{N}$ se divide prin aceea a fracției $\frac{1}{N}$, cîtul lor fiind a. Obținem astfel următorul rezultat remarcabil:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_m} \cdot a = \overline{a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_c}.$$

Cu alte cuvinte, dacă înmulțim perioada fracției $\frac{1}{N}$ cu oricare din resturile unei puteri a lui 10 prin N se obțin numere cu aceleași cifre permutate

ciclic. Înmulțind perioada fracției $\frac{a}{N}$ cu N se obține produsul

$$999 \ldots 99 \cdot a \cdot$$

Într-adevăr,

$$\frac{a}{N} = 0, a_{c+1}\, a_{c+2} \ldots a_m\, a_1 \ldots a_c\, a_{c+1}\, a_{c+2} \ldots a_m \ldots a_c \ldots = \frac{a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_c}{999 \ldots 9}$$

de unde rezultă

$$\overline{a_{c+1}\, a_{c+2} \ldots a_m\, a_1\, a_2 \ldots a_c} \cdot N = 999 \ldots 9 \cdot a.$$

De aici rezultă că produsul dintre perioada fracției $\frac{1}{N}$ prin N este un număr format din atîtea cifre 9 cîte are perioada fracției $\frac{1}{N}$.

RADIO ASTRONOMIA

Prof. dr. CĂLIN POPOVICI

PÎNĂ nu de mult se știa că toate cunoștințele noastre despre astre le avem din studiul razelor luminoase care vin de la ele. S-a descoperit însă de curînd că astrele trimit și unde radioelectrice. Acum vre-o douăzeci de ani, un inginer radiofonist cercetînd cazurile diferitelor zgomote parazitare care se aud la aparatele de radio, a constatat că unele sgomote captate pe lungimea de undă de 15 m revin cu aceeași intensitate după o durată egală cu durata rotației Pămîntului, adică după 23 h 56 m.

Regularitatea revenirii dovedește că este vorba de « zgomote cosmice »; ele provin de la undele radioelectrice trimise de astrele cerești care după 32 h56 m, adică după ce Pămîntul a făcut o rotație, reiau același loc pe bolta cerească. Mai mult, descoperitorul « zgomotelor cosmice » a arătat că ele sînt mai intense în dreptul Căii Laptelui, mai ales în direcția constelației Săgetătorului, spre care se află centrul sistemului nostru stelar, Galaxia sau Calea Laptelui.

În urma acestei descoperiri s-a presupus că și Soarele emite astfel de unde, care produc un « zgomot solar » mai ales atunci cînd pe el se petrec anumite erupții, numite erupții cromosferice, sau cînd pe el sînt pete mari. Această presupunere a fost confirmată în anul 1942, cînd au fost recepționate întîmplător, unde venind din Soare, cu aparate radar îndreptate spre Soare, pe care se aflau pete mari agitate (active). În ultimul timp au fost perfecționate mult aparatele și metodele de radiolocație care folosesc unde scurte radioelectrice trimise spre anumite obiective pe suprafața cărora ele sînt reflectate pentru a fi apoi, din nou recepționate. Cunoscînd direcția în care au fost trimise undele și timpul necesar pentru întoarcerea lor, se poate preciza locul în spațiu, direcția și distanța la care se află obietul atins de ele.

În anul 1946 folosindu-se acest procedeu al « radioecoului », s-a stabilit pentru prima oară legătura cu un corp ceresc, cu Luna. Semnalul radio trimis spre Lună s-a întors în 2,56 s. Această experiență a fost făcută în U.R.S.S.

de cunoscutul fizician Papalexi. Cunoscîndu-se viteza de propagare a undelor se poate deduce distanţa pînă la Lună. Prin perfecţionarea acestor metode, astronomii speră să poată măsura cu o precizie de 4 000 ori mai mare decît pînă acum, distanţa pînă la Soare şi planete şi să se poată studia chiar relieful lor.

Dezvoltarea mare a radioastronomiei a început la sfîrşitul războiului trecut. Astronomii, nu numai că au utilizat tehnica şi aparatele radar pentru scopuri ştiinţifice paşnice, dar le-au perfecţionat şi în vederea unor aplicaţii astronomice speciale. Folosind metodele de radiolocaţie şi radioecoul ei au putut studia meteorii (stelele căzătoare), aurorele polare şi atmosfera înaltă electrizată (ionosfera). Într-adevăr, şi gazele încărcate electric, ionizate, reflectă undele radioelectrice şi pot da naştere la radioecouri. Astfel de gaze se găsesc în dîrele lăsate de stelele căzătoare şi în atmosfera înaltă unde au loc ilumînările numite aurore polare, precum şi în ionosferă.

Undele radioelectrice permit urmărirea meteorilor (stelelor căzătoare) pe timp noros şi chiar în timpul zilei. Astfel au fost descoperite roiurile de meteoriţi care întîlnesc Pămîntul ziua; astronomul ceh Bechvar a descoperit în 1945, un roi de meteori care întîlnesc Pămîntul, în ziua de 22 decembrie. Cu ajutorul tehnicii de radiolocaţie s-a putut determina şi viteza meteoriţilor, s-a stabilit că ea este mai mică decît viteza cu care ar veni astrele din afara sistemului solar. Deci meteoriţii fac parte din sistemul solar, în permanenţă, ca şi cometele din care provin roiurile de meteoriţi, fapt care în trecut nu era admis pentru toţi meteoriţii şi toate cometele. Studiind zborul meteoriţilor obţinem informaţii foarte preţioase asupra atmosferei înalte: temperatura ei, curenţii, etc. Toate acestea au importanţă practică foarte mare pentru zborul la mari înălţimi, cu rachetele, Multe date importante asupra atmosferei înalte se obţin şi prin studiul aurorelor polare, cît şi prin studiul ionosferei, prin procedee de radio astronomie. Ele au o deosebită valoare practică în problema comunicaţiilor la mari distanţe, prin unde scurte radio. Undele scurte radio pot fi receptate la mari depărtări, deşi s-ar părea că pot fi împiedicate de curbura Pămîntului, pentru că ele se reflectă ca pe un tavan, pe pătura înaltă a atmosferei încărcată electric, ionosfera. Ionosfera se datoreşte razelor solare care ionizează gazele din stmosfera înaltă. Starea ionosferei este influenţată mult de unele fenomene solare (erupţii cromosferice, pete etc) uneori ea poate fi atît de tulburată încît împiedică comunicaţiile prin radio la mari distanţe. Studiind fenomenele solare putem prevedea aceste tulburări cu destul de mare siguranţă, uşurînd astfel, comunicaţiile radio. Prin prezicerile şi recomandările lor, savanţii sovietici au prestat Patriei un mare ajutor în timpul războiului trecut, cînd comunicaţiile radio erau esenţiale în conducerea operaţiilor militare.

Radio astronomia s-a dezvoltat însă în special prin studiul undelor radioelectrice centimetrice şi metrice —pînă la cca 20 m — care vin de la astre şi trec prin atmosfera Pămîntului fără a fi absorbite. Razele ultraviolete scurte şi cele infraroşii lungi sînt absorbite de atmosferă, aceasta lăsînd să treacă numai o mică parte din toate razele luminoase de la ultraviolet pînă la infraroşu. Perdeaua care se lasă peste privirea noastră începînd cu razele infraroşii lungi este ridicată de undele radioelectrice scurte (centimetrice şi metrice), pentru care atmosfera Pămîntului devine din nou transparentă. Se poate spune că un nou orizont a fost deschis astronomilor. Au fost decoperite nu numai date noi despre astre, dar şi ceva mult mai important, o nouă cale de acces la astre, o nouă metodă de cercetare a cerului.

Astronomii au construit « radiotelescoape » uriaşe pentru captarea emisiunilor radio slabe ale astrelor. Ele sînt construite pe principiul antenelor. Cel

mai mare radiotelescop care va fi pus în funcțiune peste un an are diametrul de 76 m și este format dintr-o cupă parabolică, din fire metalice avînd în centru (focar) o antenă propriu zisă. Aparatul, cîntărind 600 t, se va putea îndrepta spre orice punct al cerului. Cu aparatele existente au fost descoperite pînă în prezent, vre-o 200 « radiosurse » — mici regiuni cerești izolate, emițînd unde radioelectrice. Încă acum 20 de ani a fost descoperită emisiunea radioelectrică a fondului continuu al cerului, mai intensă spre Calea Laptelui. În sfîrșit s-a studiat emisia radioelectrică a Soarelui la « calm » și aceea a Soarelui « agitat » de 10-100 ori mai intensă decît prima. Au fost obținute multe rezultate pozitive și au fost ridicate numeroase probleme în legătură cu explicarea teoretică a acestor emisiuni de radio unde, probleme în cea mai mare parte, rezolvate.

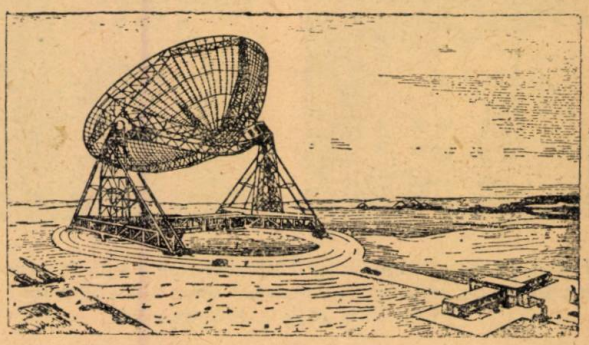


Fig. 1. Proiectul giganticului radiotelescop cu diametrul oglinzii de 76 m.

Soarele este o masă de gaze incandescente avînd la suprafață o temperatură de 6000°. Dacă se calculează ce radiație termică are un corp la această temperatură se află intensitatea acestei radiații pentru diferite lungimi de undă. Invers, din intensitatea radiației se poate deduce temperatura corespunzătoare. Făcînd aceste calcule pentru undele radioelectrice milimetrice ale Soarelui « calm » obținem o temperatură comparabilă cu aceea indicată mai sus. Este însă curios faptul că pe măsură ce considerăm undele mai lungi aflăm temperaturi mai mari: 10.000° la 1 cm, 25.000° la 10 cm, iar la 1,87 m aflăm 1.800.000° ! Acest lucru este greu de explicat, dar totuși există o posibilitate: radiațiile radioelectrice de diferite lungimi de undă care vin de la Soare iau naștere în regiuni diferite ale acestuia. Undele lungi ar proveni de la « coroana » solară, unde și pe alte căi a fost găsită o temperatură de milioane de grade. Coroana solară este cea mai înaltă și mai rară parte a atmosferei Soarelui. Ea se vede la eclipsele totale de soare, în jurul Soarelui acoperit de discul Lunii, ca un nimb argintiu, pînă departe de marginea Soarelui. La eclipsa totală de soare din anul 1947, astronomii sovietici au observat într-adevăr, că deși Soarele era complet acoperit, radiația sa radio pe unde metrice era redusă la jumătate, însă nu anulată. Coroana Soarelui se vedea bine în jurul lui: ea emitea radiația înregistrată. La alte eclipse observate mai tîrziu această constatare a fost verificată, în plus, s-a dovedit că Soarele arată un disc mult mai mare în razele radioelectrice metrice decît în razele vizuale, ceea ce confirmă faptul că razele radioelectrice sînt emise de regiunea care se află dincolo de marginea discului vizibil, adică de coroana solară. Temperatura de milioane de grade din coroana solară este o temperatură « electronică », datorită marii viteze a electronilor, care altminteri sînt foarte rari în această parte a atmosferei Soarelui. Lucrurile se complică mult la încercarea de a explica zgomotul solar « anormal » provocat de Soarele « agitat » care este mult mai puternic decît acela al Soarelui « calm ». Acest zgomot este receptat cel mai intens pe 5 m, iar emisiile sînt intermitente la intervale de cîteva secunde, separate prin intervale mai lungi — de cîteva minute — de calm. Undele sînt emise de regiuni limitate ale discului numite

regiuni active: pete, erupţii (cromosferice) etc. Dacă din intensitatea lor încercăm să calculăm temperatura gazului care se presupune că le-ar produce, obţinem cifre fantastice, miliarde sau chiar zeci de miliarde de grade ! Desigur că aceste cifre nu sînt reale: în regiunile solare agitate se petrec atunci, unele fenomene electrice nelămurite deplin, cu o putere colosală de radiaţie radioelectrică. Savanţii sovietici s-au ocupat cu explicarea radiaţiei « anormale » a Soarelui, aducînd contribuţii importante la soluţionarea acestei probleme.

Dificultatea găsirii explicaţiei unei radiaţii radioelectrice a Soarelui atît de intense se repetă mărită în cazul « radiosurselor » cereşti intense. Unele din acestea emit de zeci de milioane de miliarde ori mai mult decît Soarele « calm », emisii corespunzătoare unor temperaturi electronice de sute de milioane de miliarde de grade ! Numai datorită marii depărtări la care se află aceste astre, pe Pămînt ajunge o infimă parte din emisiile lor. Un prim pas în lămurirea acestui fenomen este identificarea acestor surse: ce sînt « radiosursele? » La început s-a crezut că este vorba de « radiostele », dar cele cîteva radiosurse identificate pînă acum (vreo zece) au arătat că au o mică întindere pe sfera cerească, nu sînt puncte cum arată stelele văzute cu cele mai mari telescoape. Cîteva din ele au fost identificate cu nebuloase extragalactice de dincolo de Calea Laptelui sisteme stelare asemănătoare cu al nostru, alcătuite din zeci de miliarde de stele.

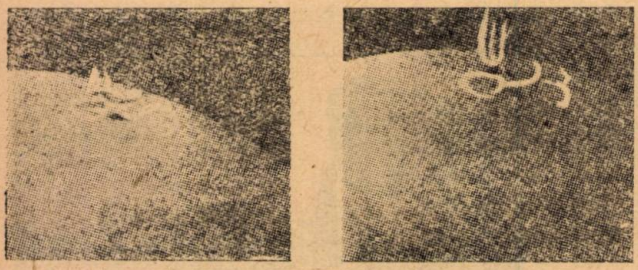


Fig. 2. Fotografia unei erupţii cromosferice şi a protuberanţei legată de ea, obţinută cu ajutorul unui filtru care lasă să treacă linia roşie a hidrogenului.

Cel mai apropiat sistem stelar — univers insulă, nebuloasa spirală din Andromeda se găseşte la o depărtare de la care luminii îi trebuie un milion şi jumătate de ani ca să ajungă la Pămînt. Este impresionant faptul că primim unde radioelectrice care au călătorit prin spaţiu milioane de ani înainte de a ajunge la noi. De la cea mai depărtată staţie de radio undele ne provin în mai putin de o zecime de secundă. Pe Pămînt ajung radiaţii radio şi de la alte sisteme stelare: de la Cîinii de vînătoare, de la Triunghiul etc. Aceasta însă nu ne apropie prea mult de explicaţie. Într-adevăr, din moment ce Calea Laptelui şi radiosursele din ea emit unde radioelectrice este normal ca şi alte sisteme stelare analoage să emită asemenea unde, astfel încît identificarea radiosurselor extragalactice este doar o verificare a faptului că sistemul nostru stelar se aseamănă cu altele. Există însă şi galaxii excepţionale cu o mult mai mare emisie de radio unde decît galaxia noastră, cum vom vedea mai departe.

Există însă şi radiosurse din sistemul nostru stelar care au fost identificate. Astfel, o radiosursă — a treia ca intensitate din cele cunoscute — se află în constelaţia Taurului. Ea a fost identificată cu o nebulozitate de formă filamentoasă, în expansiune, numită nebulozitatea Crab, care se extinde cu 1100 km pe secundă. Această nebulozitate este vestigiul unui cataclism ceresc, o stea care a explodat în anul 1054, aruncînd în spaţiu o parte din învelişurile ei şi strălucind scurt timp cu o strălucire mai mare de zeci de milioane de ori decît strălucirea ei iniţială. Ea se cheamă supranovă şi este menţionată în

cronicele chineze ca un astru temporar foarte strălucitor. Ea se află la o distanță de 5 000 ani lumină și a fost un răstimp de 500.000.000 ori mai strălucitoare decît Soarele. Au mai fost identificate și alte două radiosurse, mai slabe, resturile altor două supranove. Cea mai puternică radiosursă cunoscută din constelația Cassiopia a fost identificată recent, cu ajutorul celui mai mare telescop existent, avînd diametrul de 5 m, cu o mică nebulozitate filamentoasă, cu o viteză de expansiune de 1.500 km/s. Astronomii sovietici P. P. Parenago și Sclovski au identificat-o de curînd cu o fostă supranovă din anul 369, menționată în cronici bizantine și turcești.

În sfîrșit, a doua radiosursă ca intensitate, a fost identificată în constelația Lebăda de foarte scurt timp, cu un telescop de 5 m; ea este formată din norii nebulari luminoși a două sisteme extragalactice de stele în ciocnire, care se întrepătrund cu o viteză de 6000 km/s ! Deși se află la o depărtare foarte mare, fiind dincolo de limitele Galaxiei, ele constituie a doua radiosursă ca intensitate ! Ținînd seama de faptul că particule cu o energie atît de mare cum este aceea dedusă după intensitatea unor astfel de radiosurse nu se găsesc decît la razele cosmice, după părerea unora dintre astronomi radio undele sînt emise de electronii razelor cosmice în deplasare rapidă în spirală în cîmpul magnetic al unui gaz sau al unei stele. Razele cosmice ar putea lua naștere în cataclismul exploziei unei supranove, care eliberează cantități fantastice de energie. Savanții sovietici înclină spre stabilirea unei strînse legături între razele cosmice și undele radioelectrice emise de radiosursele puternice. După părerea lor, în timpul exploziei unei supranove iau naștere raze cosmice conținînd și un număr mare de electroni cu energii foarte mari. Aceștia mișcîndu-se în slabele cîmpuri magnetice ale nebulozității expluzate de supranovă dau naștere la unde radio.

Fig. 3. Nebuloasă spirală din constelația Câinii de Vînătoare

Să vedem ce este cu radiația radio continuă a fondului Căii Laptelui care se face difuz pe întinse regiuni cerești, pe un interval mare de lungimi de undă — despre care am vorbit la începutul articolului. Aceasta se datorește unor numeroase radiosurse individuale mai slabe sau mai depărtate, galactice sau extragalactice, uneori chiar nori de stele depărtați, a căror stele fiecare în parte emit radiounde, ca și Soarele nostru. Se credea mai de mult, că gazul risipit între stele produce această radiație difuză și întinsă pe un mare interval de lungimi de undă; acum se presupune că aportul gazului este foarte mic, dacă nu neglijabil. Cercetînd intensitatea acestei radiații radio de « fond » din Calea Laptelui, astronomii au găsit că ea este mai intensă în direcția constelației Săge-

tătorul, spre care se află centrul sistemului nostru stelar, la o distanță de 30.000 ani lumină. Anul acesta folosind unde de 75 cm astronomii au putut pătrunde pînă la punctul cu radiație radio mai mare, din calea Laptelui, localizînd nucleul ei cu o precizie de două zecimi de grad ceea ce nu se putea face pînă acum cu raze luminoase. Razele luminoase și chiar cele infraroșii, sînt foarte slăbite, de aproape 2000 ori de « praful » și « fumul » cosmic, forte abundent în această direcție, ceea ce nu permite fotografierea « nucleului ». Numai undele radio au putut străbate acest fum și ajunge pînă la centrul Galaxiei.

Astronomul sovietic I. S. Sklovski, specialist în radio astronomie, a prevăzut acum cinci ani că atomul de hidrogen neutru trebuie să emită o radiație radio pe 21 cm. Această radiație a fost efectiv descoperită în anul 1952. De atunci folosind această emisiune a hidrogenului neutru, astronomii au putut localiza în Calea Laptelui vreo 40 nori de hidrogen, determinînd chiar vitezele și distanțele. S-a observat că ei sînt așezați de-a lungul unor brațe spirale, dintre care pînă acum au fost indentificate trei: sînt brațele nebuloasei spirale care formează Galaxia noastră. Acestea sînt primele evidențe de observație asupra formei spirale a Căii Laptelui, lucru care în trecut era numai o ipoteză, prin analogie cu alte sisteme stelare. Unul din brațe trece prin vecinătatea Soarelui. Altul a putut fi urmărit pînă la 60.000 ani lumină distanță, cu ajutorul undelor radioelectrice neabsorbite de praful cosmic!

Radio astronomia, care s-a dezvoltat vertiginos în ultimii 10 ani, ne-a dat cunoștințe fundamentale despre Univers. Ea ne rezervă însă multe surprize în viitorul apropiat.

NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNOR SUME TRIGONOMETRICE

C. IONESCU-ȚIU

ALTĂ metodă de a stabili sume de sinusuri și de cosinusuri în afară de cele arătate într-o notă precedentă este folosirea unor relații algebrice între numere complexe și apoi separarea părților reale de cele imaginare.

1. Plecăm de la relația:

$$(1 + z + z^2 + \ldots + z^m)(1 - z) = 1 - z^{m+1}$$

Pentru $m = 2n$ relația se mai poate scrie

$$z^n(1 - z)\left[1 + \sum_{k=1}^{n}(z^k + z^{-k})\right] = 1 - z^{2n+1} \qquad (1)$$

Ținînd seama de formula lui Moivre:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

și notînd $z = \cos a + i \sin a$, avem $z^k + z^{-k} = 2 \cos ka$ și $z^k - z^{-k} = 2i \sin ka$. Relația (1) devine

$$(\cos na + i \sin na)(1 - \cos a - i \sin a)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos ka\right] =$$

$$= 1 - \cos(2n + 1)a - i \sin(2n + 1)a.$$

Separăm părțile reale de cele imaginare și avem:

$$(\cos na - \cos na \cos a + \sin na \sin a)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos ka\right) =$$

$$= 1 - \cos(2n+1)a$$

de unde

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2n+1)a}{\cos na - \cos(n+1)a}.$$

Transformăm expresiile $1 - \cos(2n+1)a$ și $\cos na - \cos(n+1)a$ în produse, relația precedentă devine:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}}, \tag{2}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{\cos \frac{n+1}{2} a \sin \frac{n}{2} a}{\sin \frac{a}{2}}. \tag{2'}$$

Ca exercițiu, egalînd părțile imaginare se obțin aceleași rezultate.

2. Dacă în relația (1) înlocuim pe z cu $-z$, obținem:

$$(-1)^n z^n (1+z)\left[(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}(z^k + z^{-k})\right] = 1 + z^{2n+1}.$$

Aplicînd și aici formula lui Moivre paranteza mare se mai poate scrie

$$A = (-1)^n + 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \cos ka,$$

și prin urmare

$$(-1)^n [\cos na + i \sin na + \cos(n+1)a + i \sin(n+1)a] A =$$

$$= 1 + \cos(2n+1)a + i \sin(2n+1)a.$$

Din egalarea părților imaginare, obținem:

$$(-1)^n \cdot 2 \sin \frac{2n+1}{2} a \cos \frac{a}{2} \cdot A = \sin(2n+1)a,$$

apoi,

$$\frac{(-1)^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \cos ka = \frac{(-1)^n \cos \frac{2n+1}{2} a}{2 \cos \frac{a}{2}}. \tag{3}$$

Pentru n par relaţia (3) devine

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cos ka = \frac{\cos \dfrac{4n+1}{2} a}{2 \cos \dfrac{a}{2}} \tag{4}$$

iar pentru $n = 2p - 1$, impar, relaţia (3) se mai scrie

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \cos ka = \frac{\cos \dfrac{4n-1}{2} a}{2 \cos \dfrac{a}{2}}.$$

3. În general, dacă înlocuim pe z cu z^t, atunci n trebuie înlocuit cu nt, iar a devine at.

Analog putem schimba pe z^t în z^{-t} ca în exemplele precedente. Aceste aplicaţii duc de asemenea la rezultate interesante; însă le lăsăm să fie făcute de cititori, iar rezultatele ce vor obţine le pot trimite ca probleme propuse.

Alte relaţii interesante se mai obţin dacă în rezultatele găsite înlocuim pe a cu una din valorile $\frac{\pi}{4} \pm a$; $\frac{\pi}{2} \pm a$; $\pi \pm a$, etc. La fel lăsăm ca indicaţie pentru aplicaţii ce pot fi făcute de către colaboratori; iar rezultatele mai deosebite pot fi trimise de asemenea, ca probleme de propus.

4. Fie relaţia:

$$(1 - z^2)\left(1 + \sum_{k+1}^{2n} z^{2k}\right) = 1 - z^{4n+2},$$

care se mai poate scrie

$$(1 - z^2)\, z^{2n}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} (z^{2k} + z^{-2k})\right] = 1 - z^{4n+2} \tag{5}$$

de unde obţinem

$$\cos 2na + i \sin 2na - \cos (2n+2)\, a - i \sin (2n+2)\, a = \frac{1 - \cos (4n+2)\, a - i \sin (4n+2)\, a}{2\left(\sum_{k=1}^{n} \cos 2ka + \frac{1}{2}\right)}.$$

Separăm părţile imaginare şi obţinem:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos 2ka = \frac{\sin (4n+2)\, a}{2 \cos (2n+1)\, a \sin a},$$

de unde

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2ka = \frac{\sin (2n+1)\, a}{2 \sin a}. \tag{6}$$

5. Plecăm de la relaţia

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} z^{2k} = \frac{1 - z^{4k}}{1 - z^2}$$

din care deducem

$$z^{2n-1}(1-z^2)\sum_{k=1}^{n}(z^{2k-1}+z^{-2k+1})=1-z^{4n}. \tag{7}$$

Cu aceleaşi înlocuiri $z=\cos a+i\sin a$, obţinem:

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)a=\frac{\sin 4na}{2\cos 2na\sin a},$$

de unde

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)a=\frac{\sin 2na}{\sin a}. \tag{8}$$

6. Pentru însumarea sinusurilor putem pleca de la relaţia algebrică

$$1-z^2+z^4-z^6+\ldots-z^{4n-2}=\frac{1-z^{4n}}{1+z} \tag{9}$$

de unde

$$z^{2n-1}(1+z^2)\sum_{k=1}^{n}[-(-1)^{n-k}(z^{2k-1}-z^{-2k+1})]=1-z^{4n}$$

Procedînd ca la punctul 2 şi folosind aceleaşi notaţii obţinem:

$$2Ai=2i\sum_{k=1}^{n}[-(-1)^{n-k}\sin(2k-1)a]=$$

$$=\frac{1-\cos 4na-i\sin 4na}{\cos(2n+1)a+\cos(2n-1)a+i\sin(2n+1)a+i\sin(2n-1)a}.$$

Egalînd între ele părţile imaginare, se obţine

$$A=\frac{-\sin 4na}{4\cos 2na\cos a}=-\frac{\sin 2na}{2\cos a},$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sin(2k-1)a=\frac{\sin 2na}{2\cos a}, \tag{10}$$

iar pentru n par, relaţia precedentă se mai scrie

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k}\sin(2k-1)a=\frac{\sin 4na}{2\cos a}. \tag{11}$$

Aceste metode de lucru pot fi folosite pentru obţinerea rezolvărilor unor probleme de însumări trigonometrice analoage care alcătuiesc unele probleme propuse.

O PROBLEMĂ DE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 1955

A. ŞAICHIN
conferenţiar universitar

LA etapa pe ţară a « Olimpiadei de Matematică » din anul acesta, a fost propusă la clasa IX-a problema 1659:

Două patrate ABCD şi ABEF au o latură AB comună, iar planele lor sînt perpendiculare. Se iau pe diagonalele AC şi BF respectiv, segmentele egale AM = BN (fig. 1).

a) *Să se arate că dreapta MN rămîne paralelă cu planul CDEF.*

b) *Care este locul geometric al mijlocului segmentului MN?*

c) *Să se arate că în poziţia în care lungimea segmentului MN este cea mai mică, segmentul MN este perpendicular pe BF şi AC şi că este paralel cu DE.*

d) *Să se calculeze lungimea segmentului MN în funcţie de latura a patratului ABCD în cazul precedent, adică lungimea cea mai mică a segmentului MN.*

La această problemă s-au primit soluţii ingenioase şi variate şi credem că pe cititorii G.M.F., seria B îi va interesa să afle aceste soluţii. Nu vom da toate detaliile soluţiilor. Să facem însă, cîteva observaţii preliminare.

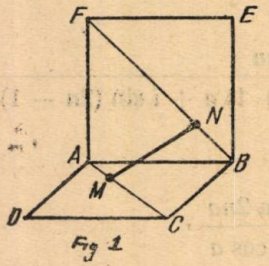


Fig 1

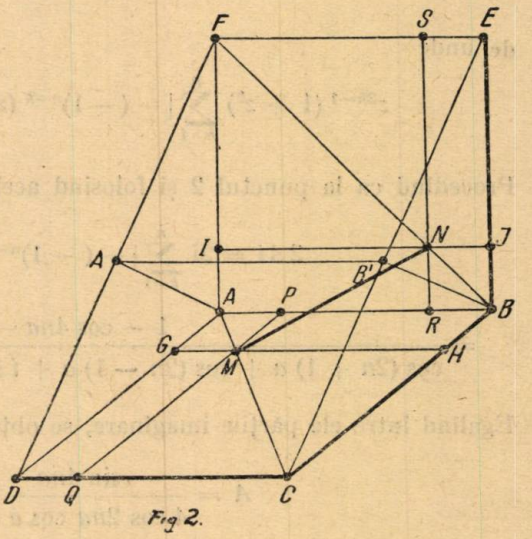


Fig 2.

Dacă prin punctele M şi N ducem paralele la laturile patratelor respective, obţinem punctele: G, H, I, J şi P, Q, R, S (fig. 2) şi avem egalităţile de segmente:

$$AP = DQ = AG = BH = RB = SE = AI = BJ \qquad (1)$$

şi

$$PB = QC = GD = HC = AR = FS = IF = JE \qquad (2)$$

De asemenea, dacă proiectăm dreapta AB pe planul $CDEF$, proiecţiile punctelor A şi B vor fi mijloacele A' şi B' ale segmentelor DF şi CE, respectiv, şi vom avea egalităţile:

$$AA' = BB' = A'D = A'F = B'C = B'E \qquad (3)$$

Tov. Voiculescu Sanda *de la S.m.*10, *Bucureşti*, arată că planul *IGHJ*, care conţine dreapta *MN*, este paralel cu planul *CDEF* (fig. 2). Într-adevăr, din egalităţile (1) rezultă $IG \parallel DF$, iar prin construcţie $IJ \parallel FE$.

Tov. Harnik Victor *de la S.m.*17, *Bucureşti*, notează cu T intersecţia dreptei MR cu CD (fig. 3). Din asemănarea triunghiurilor MRP, MQT rezultă $\frac{MP}{MQ} = \frac{MR}{MT}$ egalitatea care combinată cu $MP = MR$, $MQ = NS$ ne dă $\frac{NR}{NS} = \frac{MR}{MT}$ de unde rezultă că MN este paralelă cu ST şi deci şi cu planul $CDEF$.

Alţi participanţi au demonstrat că distanţele de la punctele M şi N la planul $CDEF$ sînt egale.

De exemplu, tov. Puius Tiberiu *de la S.m.*20, *Bucureşti*, proiectează întreaga figură pe un plan perpendicular pe muchia AB a diedrului. Notînd proiecţiile pe acest plan ale punctelor $A, B, C, D, \ldots$ cu $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$

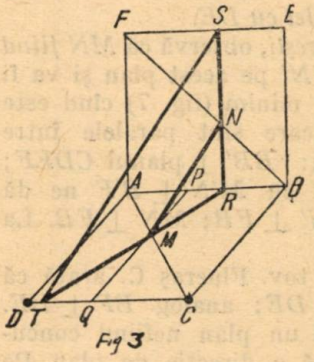


Fig 3

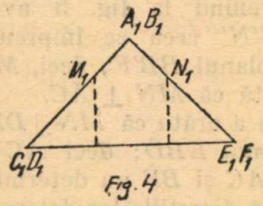


Fig 4

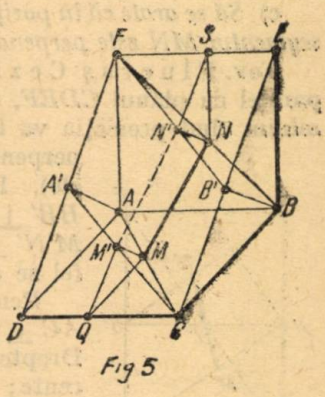


Fig 5

se obţine fig. 4. În această figură distanţele de la M şi N la planul $CDEF$ se proiectează în adevărata lor mărime, după liniile punctate.

Cum $A_1M_1 = AG$, $B_1N_1 = BK$ rezultă $A_1M_1 = B_1N_1$; ţinînd seama de aceasta, egalitatea liniilor punctate este lesne de arătat.

Tov. Chişleag Radu *de la S.m.*1 *din Iaşi* şi tov. Roitman Abram *de la S.m.*1 *din Constanţa*, au arătat egalitatea distanţelor folosind figura iniţială. Anume, notînd M', N' proiecţiile lui M şi N pe planul $CDEF$ (fig. 5), tov. Chişleag Radu arată egalitatea $MM' = NN'$ folosind triunghiurile CAA' şi FBB', egale între ele, şi triunghiurile CMM' şi FNN', asemenea cu primele şi egale între ele; iar tov. Roitman Abram foloseşte triunghiurile $MM'Q$ şi $NN'S$ dreptunghice în M' şi N', cu ipotenuzele MQ şi NS egale. Despre unghiurile din Q şi S tov. Roitman Abram arată că sînt unghiuri plane corespunzătoare diedrelor şi deci sînt de cîte 45°.

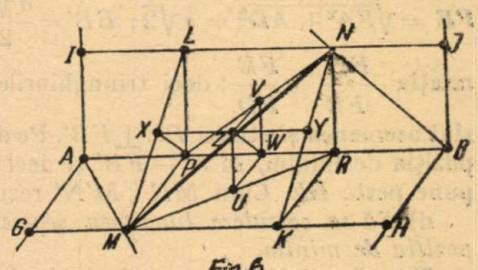


Fig 6

b) *Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN.*

Tov. Mătase Eugen *de la S.m.b. nr. 1 din O. Stalin*, notează cu Z mijlocul segmentului MN, cu U, V și W proiecțiile lui Z pe cele 2 plane și pe dreapta AB (fig. 6), cu L intersecția paralelei dusă prin P la AF, cu dreapta IJ, cu K punctul analog de pe GH, cu X și Y intersecțiile paralelei dusă prin Z la AB, cu dreptele LM și KN. Apoi, tov. Mătase Eugen arată că $LMKN$ este un dreptunghi, că $XZ = ZY$, de unde prin proiecție pe AB rezultă $PW = WR$ și deci $AW = WB'$; deci W este mijlocul lui AB.

După aceea, tov. Mătase Eugen arată că punctele W, U, V, Z sînt în același plan și că $WU = WV$, de unde rezultă că WZ este bisectoarea unghiului UWV. Concluzie: *locul geometric al mijlocului segmentului MN este bisectoarea unghiului plan construit în mijlocul laturii AB.*

O altă soluție este următoarea: proiectăm punctele A, B, M, N pe planul $CDEF$. Obținem fig. 7, pe care se arată că patrulaterul $A'M'B'N'$ este un paralelogram și deci mijlocul lui $M'N'$ și al lui $A'B'$ coincid; ori aceasta este tocmai proiecția Z' a lui Z. Concluzie: locul geometric este perpendiculara ridicată în centrul dreptunghiului $CDEF$ pe planul acestui dreptunghi.

c) *Să se arate că în poziția în care lungimea segmentului MN este cea mai mică, segmentul MN este perpendicular pe BF și AC și paralel cu DE.*

Tov. Flueraș Cezar *de la S.m.b.13 din București*, observă că *MN fiind* paralel cu planul $CDEF$, *este egal cu proiecția sa $M'N'$* pe acest plan și va fi minim cînd proiecția va fi minimă. Însă $M'N'$ este minim (fig. 7) cînd este perpendicular pe $A'C$ și $B'F$ (care sînt paralele între ele). Revenind la fig. 5 avem: $BB' \perp$ planul $CDEF$; $BB' \perp M'N'$ ceea ce împreună cu $M'N' \perp B'F$ ne dă $M'N' \perp$ planul $BB'F$; deci, $M'N' \perp FB$; $MN \perp FB$. La fel se arată că $MN \perp AC$.

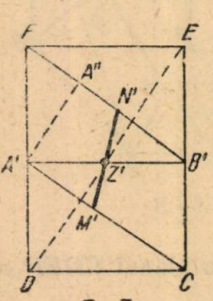


Fig 7

Pentru a arăta că $MN \parallel DE$, tov. Flueraș C. arată că $AC \perp$ planul EBD; deci $AC \perp DE$; analog $BF \perp DE$. Dreptele AC și BF nu determină un plan nefiind concurente; însă direcțiile lor determină o direcție de plan. Pe această direcție de plan sînt perpendiculare atît DE cît și MN (în poziția de minim), căci DE și MN sînt perpendiculare atît pe AC cît și pe BF. Rezultă că DE și MN sînt paralele între ele.

Paralelismul între DE și MN se mai poate arăta folosind fig. 7. Într-adevăr, să arătăm că $DE \perp FB'$. Dacă a este latura patratelor, avem: $FE = a$; $FE = \sqrt{FA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$; $EB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Se verifică relația $\frac{EB'}{FE} = \frac{FE}{FD}$; deci triunghiurile $B'EF$ și EFD sînt asemenea și atunci $DE \perp FB'$. Pe de altă parte, în poziția de minim, $M'N' - FB'$ și deci $M'N'$ se suprapune peste DE. Cum $MN \parallel M'N'$ rezultă $MN \parallel DE$.

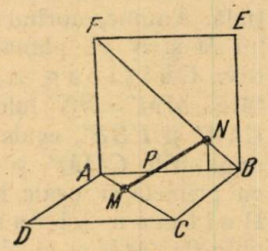


Fig 8.

d) *Să se calculeze lungimea segmentului MN în poziția de minim.*

Tov. Iosif Gheorghe *de la S.m.b.17 din București*, arată că devreme ce în poziția de minim $MN \perp AC$, rezultă $MR \perp AC$ (fig. 8). Triunghiul AMR este deci triunghi isoscel, de unde $AP = PR$ și cum $AP = RB$ rezultă $AP = PR = RB = \frac{a}{3}$.

Atunci,

$$MN^2 = NR^2 + RM^2 = NR^2 + RP^2 + MP^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3};$$

$$MN = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

O altă metodă constă în a observa (fig. 7) că MN minim este egal cu distanţa între dreptele paralele $A'C$ şi $B'F$, adică cu înălţimea AA'' a triunghiului dreptunghi $B'A'F$ în care avem catetele $A'B' = a$, $A'F = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Făcînd calculele se găseşte acelaşi rezultat.

În încheiere trebuie menţionat că soluţiile arătate a fi ale unor participanţi au fost unele din ele arătate şi de alţii. Au fost menţionaţi aci, numai acei participanţi în lucrările cărora soluţia respectivă a fost mai clar redactată.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Strecurătoarea de ceai, plutitoare.** Ştim că pentru a se scufunda este suficient ca un vapor să aibă o singură gaură. Putem face însă o experienţă prin care să arătăm că o strecurătoare de ceai, cu toate că are atîtea găuri, poate pluti; mai mult chiar, ea poate pluti purtînd şi o încărcătură metalică, deci o încărcătură grea. Faptul devine mai curios însă, că aceeaşi strecurătoare se scufundă dacă încărcătura este formată din puţină vată, deci cu o încărcătură uşoară. Dar să procedăm la efectuarea experienţei.

Luaţi o strecurătoare de ceai obişnuită (din reţea de sîrmă) o cufundaţi în stearină sau parafină topită, încă foarte fierbinte, şi o scuturaţi bine pentru ca să nu rămînă picături de stearină sau parafină pe strecurătoare şi pentru ca să nu rămînă astupate găurile acesteia.

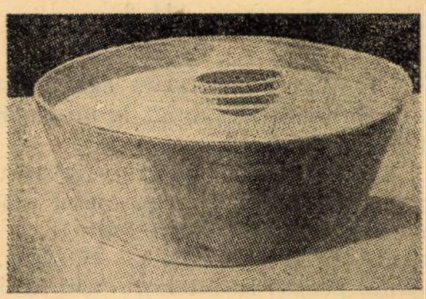


Fig. 1

Puneţi apoi strecurătoarea pe suprafaţa apei (apa dintr-un vas) şi adăugaţi o modedă de 3 bani sau de 1 ban. Strecurătoarea nu se va scufunda. Mai puneţi încă o monedă, apoi încă cîteva şi vă veţi convige că strecurătoarea va continua să plutească; ea se va cufunda însă după fiecare monedă adăugată, iar pînă la urmă numai marginea de metal va rămîne la suprafaţa apei.

Scoateţi încet monedele şi puneţi în strecurătoare o bucăţică de vată muiată în alcool şi stoarsă. Cu toate că această încărcătură este incomparabil mai uşoară decît monedele, strecurătoarea se va scufunda imediat, vata rămînînd să plutească pe apă.

Se pare că în acest caz se petrece un fenomen care contrazice legile naturii, căci un corp uşor, vata, determină ceva ce nu poate determina metalul; şi totuşi este cert că nu prin greutatea ei a acţionat bucăţica de vată, deoarece ea însăşi nu s-a scufundat, ci a rămas să plutească la suprafaţa apei!

Totul se explică uşor dacă ne amintim de faptul că am cufundat strecurătoarea în stearină sau parafină topită, ceea ce a mărit considerabil tensiunea superficială a apei; din cauza materiei grase în care am muiat strecurătoarea, între ochiurile acesteia se formează o membrană fină de apă, care este foarte elastică datorită tensiunii superficiale. Aceasta este atît de puternică încît rezistă şi la apăsarea mondelor puse în strecurătoare.

Vata muiată în alccol determină scufundarea strecurătorii, deoarece alcoolul este foarte avid de apă (are o mare tendinţă de a se amesteca cu apă). El va absorbi în sus apa, aşa încît tensiunea superficială a apei va fi deranjată, aceasta va pătrunde în strecurătoare determinînd scufundarea ei.

Tensiunea superficială a apei mai poate fi demonstrată şi prin o altă experienţă interesantă: experienţa cu acul magnetizat care pluteşte pe apă.

2. **Fîntîna arteziană.** O interesantă aplicaţie a presiunii scăzute obţinute prin încălzirea aerului, o prezintă următoarea experientă.

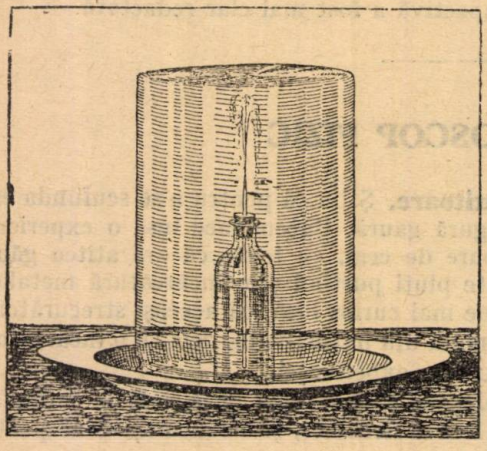


Fig. 2

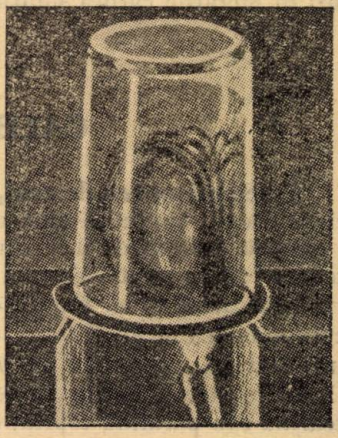


Fig. 3

Luaţi o sticlă farmaceutică obişnuită şi înfigeţi prin dopul ei un pai sau un tub de sticlă subţiat la un capăt, care însă trebuie să ajungă pînă aproape de fundul sticlei.

Umpleţi sticla pe trei sferturi cu apă şi o puneţi pe o farfurie, pe fundul căreia aţi aşternut în prealabil o sugativă sau o hîrtie de filtru udată. Luaţi apoi un borcan pe care-l ţineţi cu gura deasupra unei flacări pînă cînd se încălzeşte şi acoperiţi cu el sticla, apăsîndu-l bine cu gura lui pe sugativa udată, pentru ca interiorul său să fie perfect izolat. După puţin timp din capătul subţiat al tubului de sticlă care iese din dop începe să ţîşnească apa!

Fenomenul se explică foarte simplu: presiunea aerului din sticlă fiind mai mare decît aceea a aerului din borcan, împinge apa din sticlă în borcan.

3. **Cum se încălzeşte un lichid.** După cum ştim, căldura se transmite prin curenţi (convecţie), în lichide. O experienţă interesantă şi de efect ne poate demonstra acest lucru.

Luaţi o placă netedă de metal. Puneţi pe ea cîteva cristale de permanganat de potasiu udate cu o picătură de apă şi acoperiţi-le pe acestea cu un strat subţire de ceară. Marginile acestui strat trebuie să fie bine prinse de placă.

Turnaţi într-un pahar apă şi acoperiţi-l cu placa metalică astfel încît stratul de ceară cu cristalele sub el să fie întoarse înspre apă. Susţinînd paharul întoarceţi-l cu fundul în sus. Apropiaţi de locul pe care se află stratul de ceară o lumînare aprinsă. Încălzindu-se, stratul de ceară se va desprinde de placă şi un curent de apă caldă, de culoare violetă, va ţişni de sub el în sus. Veţi putea observa circulaţia curenţilor de apă colorată: curenţii calzi vor merge în sus, iar cei reci, fiind mai grei, în jos.

4. **Fîşia de hîrtie miraculoasă.** Dacă peste o lumînare aprinsă (fixată prin lipire pe o masă) se aşează o sticlă de lampă, se constată că aceasta încetează de a mai arde. Introduceţi însă în sticla de lampă înainte de a începe experienţa o fîşie de hîrtie destul de lungă ca să poată ajunge pînă la partea de jos a sticlei şi acoperiţi cu ea, adică cu sticlă, lumînarea aprinsă. Lumînarea va continua să ardă. Pe o parte a despărţiturii (a fîşiei) vor circula în sus produsele arderii, iar pe cealaltă parte va veni la lumînare aer proaspăt, care va întreţine arderea. Scoateţi din sticlă fîşia de hîrtie, lumînarea se va stinge, deoarece ne mai existînd despărţitura nu mai există nici curentul de alimentare a arderii. Această experienţă ne demonstrează că şi prin gaze, căldura se transmite prin curenţi.

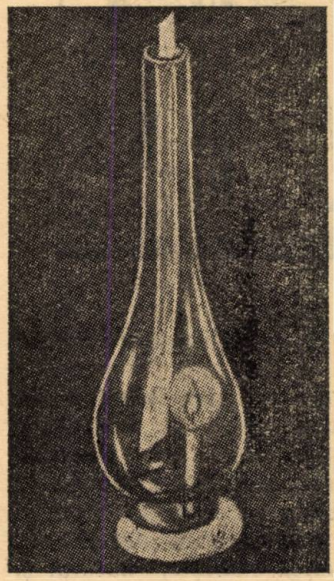


Fig. 4

5. **Fierberea apei într-o carte de joc.** Oricît s-ar părea de paradoxal, totuşi este posibil să fierbem apă într-o carte de joc. Experienţa se

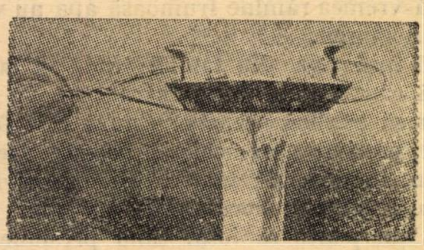


Fig. 5

poate face foarte simplu. Confecţionaţi o cutie dintr-o carte de joc îndoind marginile ei, sau chiar lipindu-le la colţuri, iar dintr-o sîrmă — un susţinător după cum se vede în figură.

Umpleţi cutioara cu apă şi o ţineţi cu ajutorul susţinătorului de sîrmă deasupra flacării unei lămpi de spirt sau bec de gaz. Apa se va încălzi treptat, va începe să se ridice băşicuţe de aer din interiorul ei şi în fine, ea va fierbe.

Cartea de joc nu se aprinde pentru că nu este îndeplinită condiţia absolut necesară pentru aceasta: ea nu se încălzeşte pînă la temperatura ei de aprindere. Conform legilor conductibilităţii termice căldura primită de carte de la flacără este transmisă mai departe apei şi consumaţă pentru a aduce pe aceasta pînă la fierbere. Cît timp cutioara conţine apă, aceasta va absorbi căldura şi cartea de joc nu poate ajunge la temperatura ei de aprindere, deci nu se aprinde.

6. **Lampa barometru.** Intrebuinţarea lămpii electrice drept barometru se pare un non sens! Şi totuşi acest lucru este posibil.

Luaţi o lampă electrică cu filamentul ars, o înfăşuraţi într-o pînză (pentru a nu vă răni eventual) şi ţinîndu-o aşa după cum se vede în figură o introduceţi în apă şi rupeţi cu un cleşte prelungirea de sticlă care se află la capătul de jos care iese prin pînză. Lampa se va umple imediat cu apă, deoarece în interiorul ei era vid şi apa este împinsă în ea de presiunea atmosferică. Scoateţi apoi lampa din apă o atîrnaţi de un fir şi barometrul e gata.

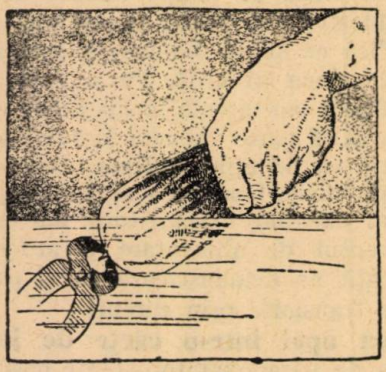


Fig. 6

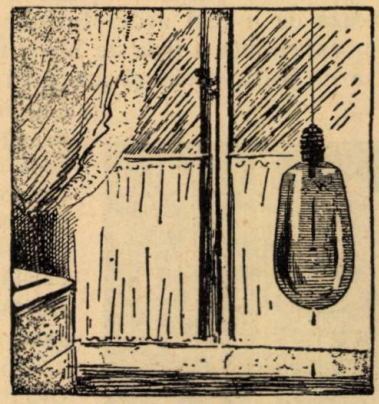


Fig. 7

Dacă vremea rămîne frumoasă apa nu va picura prin deschizătura formată la capătul lămpii.

Dacă însă apa din lampă tinde să iasă prin orificiu sau chiar picură, înseamnă că vremea se va întrăutăţi, va ploua curînd.

Cum să explică aceasta? Cauza este foarte simplă.

Cînd presiunea atmosferică creşte vremea rămîne sau devine frumoasă (cel puţin, în general; în condiţii atmosferice deosebite se poate întîmpla şi altfel) In acest caz, aerul presează mai puternic asupra orificiului lămpii, deci apa nu poate să iasă. Cînd presiunea atmosferică slăbeşte, natural şi asupra orificiului, aerul presează mai slab şi prin urmare, apa tinde să iasă prin el. Cu cît mai mult slăbeşte presiunea, cu atît mai mult apa tinde să iasă din lampă (se bombează prin orificiu în afară), iar la o scădere puternică a presiunii chiar picură; ori ştim că scăderea presiunii atmosferice înseamnă înrăutăţirea vremii. In felul acesta putem folosi o lampă electrică drept barometru.

V. A.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1380

Intr-un trunchi de con este înscrisă o sferă de raza r. Generatoarea conului este înclinată cu unghiul α faţă de planul bazei. Să se găsească aria laterală a trunchiului de con.

* * *

Soluţie. — Fie R_1 şi R_2 razele bazelor, iar G generatoarea trunchiului de con. Evident, în trunchi fiind înscrisă o sferă avem

$$G = R_1 + R_2$$

Totodată h fiind înălțimea sa,

$$G = h \operatorname{cosec} \alpha = 2r \operatorname{cosec} \alpha$$

căci $h = 2r$. Aria laterală deci, este

$$A = \pi G (R_1 + R_2) = \pi (R_1 + R_2)^2 = 4\pi r^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$A = \frac{G\pi r^2}{\sin^2 \alpha}$$

Problema 1381

Se dă sistemul

$$x^3 + x^2 y + xy^2 = a$$
$$x^2 y + xy^2 + y^3 = b$$

Se cere: a) să se calculeze expresiile rădăcinilor x *și* y b) *să se calculeze valoarea algebrică a expresiei*

$$E(x; y) = \frac{x\sqrt{y} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$$

și să se arate că este egală cu $E(a; b)$

* * *

Soluție. — Avem.

$x(x^2 + xy + y^2) = a$ și $y(x^2 + xy + y^2) = b$; de unde $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ Înlocuind pe rînd pe $x = \frac{ay}{b}$ și $y = \frac{bx}{a}$ și scoțînd factor comun, avem,

$$x = a\sqrt{\frac{1}{a^2 + ab + b^2}} \quad \text{și} \quad y = b\sqrt{\frac{1}{a^2 + ab + b^2}}.$$

Deci,

$$E(x; y) = \frac{\sqrt{x}(x + y) - \sqrt{y}(x + y)}{\sqrt{x}(x - y) - \sqrt{y}(x - y)} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Înlocuim și avem,

$$E(x; y) = \frac{a\sqrt{\frac{1}{a^2 + ab + b^2}} + b\sqrt{\frac{1}{a^2 + ab + b^2}}}{a\sqrt{\frac{1}{a^2 + ab + b^2}} - b\sqrt{\frac{1}{a^2 + ab + b^2}}}$$

dăm factor comun radicalul și avem $\frac{a + b}{a - b}$. Deci $E(x; y) = E(a; b)$.

Problema 1385

Să se dovedească identitatea:

$$\text{èos}^2\, 2a + \cos^2 (a - b) - 2 \cos (a - b) \cos (a + b) \cos 2a - \sin^2 (a + b)$$

(Dată la admiterea în Inst. Petrol și Gaze)

Soluție. Deoarece avem:

$$2 \cos (a - b) \cos (a + b) = \cos 2a + \cos 2b$$

identitatea se scrie:

$$\cos^2 2a + \cos^2 (a - b) - \cos^2 2a = \cos 2a \cos 2b = \frac{1 + \cos 2(a - b)}{2} = \cos 2a \cos 2b =$$

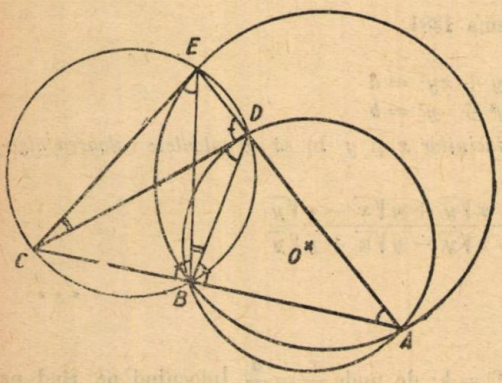
$$= \frac{1 - (\cos 2a \cos 2b - \sin 2a \sin 2b)}{2} = \frac{2\sin^2 (a + b)}{2} = \sin^2 (a + b)$$

Problema 1386

Fie cercul O și un punct exterior C. Ducem secanta CBA și tangenta CD la cercul O. Cercul CBD taie pe AD în E. Să se arate că: a) *dreptele CD și CE sînt egale,* b) *dreapta CE este tangenta cercului ABE*

* * *

Soluție. Avem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = \frac{1}{2}$ arc BD. Deci $\sphericalangle CDE = 180° - \sphericalangle CDB - \sphericalangle BDA = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle BDA = \sphericalangle ABD$. De asemenea, $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBE = \frac{1}{2}$ arc CE. Deci, $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABD$ iar $\sphericalangle ECD = \frac{1}{2}$ arc $DE = \sphericalangle EBD = 180° - \sphericalangle CBE - \sphericalangle ABD = 180° - 2\sphericalangle ABD$. Atunci în triunghiul CDE avem $\sphericalangle CED = 180° - \sphericalangle CDE - \sphericalangle ECD = 180° - \sphericalangle CDE - (180° - 2\sphericalangle ABD) = 2\sphericalangle ABD - \sphericalangle CDE = 2\sphericalangle CDE - \sphericalangle CDE = \sphericalangle CDE$.



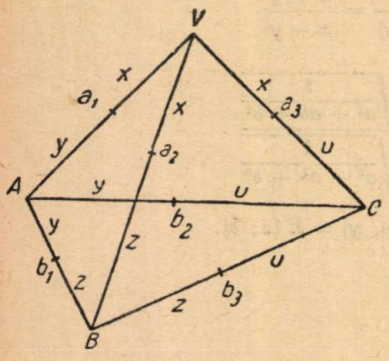
Deci triunghiul CDE este isoscel așa că $CD = CE$.

$\sphericalangle ECB = 180° - \sphericalangle EDB = \sphericalangle BDA$; $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABD$ deci triunghiurile CBE și DBA sînt asemenea și urmează că și $\sphericalangle CEB = \sphericalangle DAB$ care arată că CE este tangentă cercului ABE ($\sphericalangle CEB = \sphericalangle DAB = \frac{1}{2}$ arc BE).

Problema 1388

O sferă este tangentă la toate muchiile unui tetraedru. Să se demonstreze că aceasta este posibil numai atunci cînd sumele muchiilor opuse ale tetraedrului sînt egale.

P. Erdniev (Matematica V. Școle)



Soluție. În cazul cînd aceste muchii sînt tangente la o sferă, segmentele cuprinse între un vîrf și punctele de tangentă la sferă ale muchiilor respective vîrfului sînt egale, adică,

$$V_{a1} = V_{a2} = V_{a3} = x$$

$$A_{a1} = A_{b1} = A_{b2} = y$$

$$B_{b1} = B_{a2} = B_{b3} = z$$

$$C_{b3} = C_{b2} = C_{a3} = u$$

Sumele laturilor opuse sînt egale cu $(x + y + z + u)$

Problema 1391

Să se calculeze suma

$$S_n = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}.$$

H. Hamzin (Sterlitamac

Soluția I, dată **I. I. Cristea,,** *Constanța.* Avem,

$$\sin nx = \sin (n-1)\, x \cos x + \cos (n-1)\, x \sin x$$

împărţind prin $\cos^n x$ obţinem

$$\frac{\sin nx}{\cos^n x} = \frac{\sin (n-1)\,x}{\cos^{n-1} x} + \frac{\cos (n-1)x}{\cos^{n-1} x}\,\mathrm{tg}\ x.$$

Deci putem scrie succesiv:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\ x \cdot 1$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \mathrm{tg}\, x \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos^3 x} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \mathrm{tg}\, x \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\sin nx}{\cos^n x} = \frac{\sin (n-1)\,x}{\cos^{n-1} x} + \mathrm{tg}\, x \frac{\cos (n-1)x}{\cos^{n-1} x}$$

$$\frac{\sin (n+1)\,x}{\cos^{n+1} x} = \frac{\sin nx}{\cos^n x} + \mathrm{tg}\, x \frac{\cos nx}{\cos^n x}$$

egalităţi care adunate parte cu parte, dau

$$\frac{\sin\,(n+1)\,x}{\cos^{n+1} x} = S_n \cdot \mathrm{tg}\, x$$

de unde,

$$S_n = \frac{\sin (n+1)\,x}{\sin x \cos^n x}.$$

Soluţia II, dată de **Fl. Torjescu**, *student Bucureşti şi* **C. Ţurlea**, *elev Craiova.* Considerăm sumele.

$$S_1 = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}$$

$$S_2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2n}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + \ldots + \frac{\sin nx}{\cos^n x}.$$

Avem,

$$S_1 + iS_2 = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x + i \sin x}{\cos^3 x} + \ldots + \frac{\cos nx + i \sin nx}{\cos^n x}$$

dar după formula lui Moivre avem $\cos nx + \mathrm{i} \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$ deci

$$S_1 + iS_2 = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x} + \left(\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x}\right)^n$$

$$S_1 + iS_2 = \frac{\left(\dfrac{\cos x + i \sin x}{\cos x}\right)^{n+1} - \dfrac{\cos x + i \sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x + i \sin x}{\cos x} - 1}.$$ Aplicăm din nou formula

lui Moivre

$$S_1 + iS_2 = \frac{\dfrac{\cos (n+1)\,x + i \sin (n+1)\,x}{\cos x} - \dfrac{\cos x + i \sin x}{\cos x}}{\dfrac{i \sin x}{\cos x}}$$

$$S_1 + iS_2 = \frac{\cos (n+1)x + i \sin (n+1)\,x - \cos^{n+1} x - i \sin x \cos^n x}{i \sin x \cos^n x}$$ Deci,

$$S_1 + iS_2 = \frac{\sin (n+1)\,x - \sin x \cos^n x}{\sin x \cos^n x}\, x + i\, \frac{\cos^{n+1} x - \cos (n+1)\,x}{\sin x \cos^n x}.$$

Rezultă că $S_1 = \dfrac{\sin (n+1)\, x}{\sin x \cos^n x} - 1$.

Se observă însă că $S_n = S_1 + 1$, deci $S_n = \dfrac{\sin (n+1)\, x}{\sin x \cos^n x}$.

Observare. — Cu aceasta am obținut și valoarea sumei

$$S_2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + \ldots + \frac{\sin nx}{\cos^n x} = \operatorname{ctg} x - \frac{\cos (n+1)\, x}{\sin x \cos^n x}.$$

Problema 1392

Să se rezolve sistemul:

$$a(ax + by + cz) - Kx = A$$
$$b(ax + by + cz) - Ky = B$$
$$c(ax + by + cz) - Kz = C$$

N. N. Mihăileanu

Soluție: Înmulțind ecuațiile cu a, b, c și le adunăm:

$$(ax + by + cz)(a^2 + b^2 + c^2) - K(ax + by + cz) = Aa + Bb + Cc$$

De aici scoatem:

$$ax + by + cz = \frac{Aa + Bb + Cc}{a^2 + b^2 + c^2 - k} = E$$

Înlocuind această valoare pe rînd în ecuațiile sistemului, obținem soluțiile:

$$x = \frac{aE - A}{k}\ ;\quad y = \frac{bE - B}{k}\ ;\quad z = \frac{cE - C}{k}$$

Problema 1394

Dacă a, b, c sînt trei numere reale și pozitive, există inegalitatea:

$$\left(\sum a^5\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right) \geqslant \left(\sum a^3\right)\left(\sum a\right) + 2\sum [(a^2 - b^2)^2 + 2(a-b)^4]$$

Mihail I. Popescu student, București

Soluție. — Plecăm de la inegalitatea $(a-b)^6 \geqslant 0$ care se mai poate scrie,

$$a^6 + b^6 \geqslant 6ab(a^4 + b^4) - 15a^2b^2(a^2 + b^2) + 20a^3b^3.$$

Împărțind cu ab și adunînd în ambii membri ai acestei inegalități termenul $\dfrac{c^5}{c} = c^4$ obținem: $\dfrac{a^5}{b} + \dfrac{b^5}{a} + \dfrac{c^5}{c} \geqslant 6a^4 + 6b^4 + c^4 + 20a^2b^2 - 15(ab^3 + a^3b)$. (1)

Analog, avem

$$\frac{b^5}{c} + \frac{c^5}{b} + \frac{a^5}{a} \geqslant 6b^4 + 6c^4 + a^4 + 20b^2c^2 - 15(bc^3 + b^3c). \quad (2)$$

$$\frac{c^5}{a} + \frac{a^5}{c} + \frac{b^5}{b} \geqslant 6c^4 + 6a^4 + b^4 + 20a^2c^2 - 15(ac^3 + a^3c). \quad (3)$$

Adunînd relațiile (1), (2). (3) și făcînd o grupare convenabilă de termeni, deducem tocmai inegalitatea din enunț.

Problema 1397

Să se calculeze cîte grame de zinc şi acid sulfuric trebuie să intre în reacţie pentru a obţine 16,128 *grame de hidrogen.*

Dacă reacţia are loc la 17°C *şi presiune normală* (760 mm), *să se calculeze volumul hidrogenului la temperatura de* 27° *şi presiune de* 1 000 mm.

Marin I. Mateescu, elev, Tîrgovişte

Soluţie. În reacţia $Zn+H_2SO_4+H_2$ trebuie să aflăm de cîte ori trebuie să luăm H pentru a obţine 16,128 grame. Pentru aceasta, împărţim cantitatea la greutatea atomică 16,128: 1,008=16. Ecuaţia devine $8\ Zn+8\ H_2SO_4=8\ ZnSO_2+8\ H_2$. Cunoscînd greutăţile atomice pentru Zn=65,38 şi SO_4=96,06 putem determina cantităţile de Zn şi H_2SO_4

m (pentru Zn) $= 8 \cdot 65{,}38 = 523{,}04$ grame

m (pentru H_2SO_4) $= 8\ (1{,}001 + 96{,}06)$

$m = 8 \cdot 97{,}068 = 776{,}524$ grame.

Volumul hidrogenului la 17°C şi 760 mm este, $V = m\colon d = 16{,}128\colon 0{,}00009 = 179{,}2$ litri; 0,00009 = densitatea hidrogenului.

Folosind legea gazelor perfecte putem afla volumul hidrogenului la 27°C şi presiune de 1 000 mm

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad \text{sau} \quad \frac{760 \times 179{,}2}{290} : \frac{1000\ V_1}{300}$$

deci,

$$V_1 = 3.760 \cdot 179{,}2 : 2900$$

$$V = 141 \text{ litri.}$$

Problema 1421

Fie un patrulater convex ABCD. Notăm respectiv cu x, y, z, u unghiurile ABD, ADB, BDC, DBC pe care diagonala BD le face cu laturile patrulaterului. Să se arate că este necesar şi suficient ca patrulaterul ABCD să fie circumscriptibil dacă există relaţia

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Marius Iosifescu, Piteşti

Soluţie. — Triunghiurile ABD şi BCD ne dau

$$AB = \frac{BD \sin y}{\sin(x+y)};\quad BC = \frac{BD \sin z}{\sin(u+z)};\quad CD = \frac{BD \sin u}{\sin(u+z)};\quad DA = \frac{BD \sin x}{\sin(x+y)}.$$

Condiţia necesară şi suficientă ca patrulaterul $ABCD$ să fie circumscriptibil este $BC+AD = CD+AB$. Ţinînd seamă de relaţiile scrise mai sus avem succesiv

$$\frac{\sin z}{\sin(u+z)} + \frac{\sin x}{\sin(x+y)} = \frac{\sin u}{\sin(u+z)} + \frac{\sin y}{\sin(x+y)};$$

$$\text{sau}\quad \frac{\sin z - \sin u}{\sin(u+z)} = \frac{\sin y - \sin x}{\sin(x+y)} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(z-u)}{\sin\frac{1}{2}(z+u)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(y-x)}{\sin\frac{1}{2}(y+x)}, \quad \text{deci}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(z-u) + \sin\frac{1}{2}(z+u)}{\sin\frac{1}{2}(z+u) - \sin\frac{1}{2}(z-u)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(y+x) + \sin\frac{1}{2}(y-x)}{\sin\frac{1}{2}(y+x) - \sin\frac{1}{2}(y-x)},$$

de unde rezultă relaţia din enunţ.

Problema E: 558

Se dă $\frac{1-x}{1+x}=\frac{4}{9}$; $y^2=\frac{1}{x^2}-1$ şi $z=\frac{2y}{1-y^2}$.

Să se calculeze x, y, z.

* * *

Soluţie. — Din prima ecuaţie a sistemului obţinem $x=\frac{5}{13}$ valoare pe care introducînd-o în ecuaţia II-a, avem

$$y^2=\frac{1-\frac{25}{169}}{\frac{25}{169}}=\frac{144}{25}. \quad \text{Deci} \quad y=\pm\frac{12}{5}.$$

Introducînd valoarea obţinută pentru y în ecuaţia III, avem

$$z=\frac{\pm\frac{24}{5}}{1-\frac{144}{25}}=\mp\frac{120}{199}.$$

Formăm tabloul soluţiilor:

$$x_1=\frac{5}{13};\quad y_1=\frac{12}{5};\quad z_1=\frac{-120}{119} \text{ şi}$$

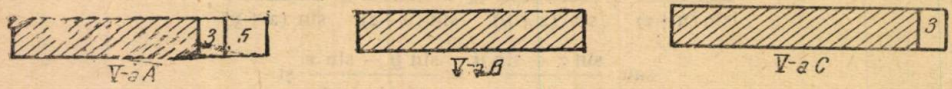
$$x_2=\frac{5}{13};\quad y_2=-\frac{12}{5};\quad z_2=\frac{120}{119}.$$

Problema E: 568

Clasele a cincea ale unei şcoli au în total 116 elevi. În clasa V-a A sînt cu 5 elevi mai mult ca în clasa V-a C; iar în clasa V-a B are 8 elevi mai puţin decît clasa V-a A Cîţi elevi sînt în fiecare clasă? Se va figura judecata rezolvării.

* * *

Soluţie. — Ne servim de desenul de mai jos.



Operaţiile sînt următoarele $3+5+3=11$

$116-11=105$

care reprezintă de trei ori numărul elevilor din clasa V-a B.

Deci, $105:3=35$ elevi în clasa V-a B

$35+8=43$ elevi în clasa V-a A

$35+3=38$ elevi în clasa V-a C.

Această metodă se mai numeşte metoda figurativă

Problema E: 571

După terminarea şcolii tehnice absolvenţii pleacă la practică. Un practicant lucrează la un loc cu muncitorul calificat. Pentru 12 *zile de lucru ale muncitorului calificat şi* 7 *zile ale practicantului se plăteşte* 334 *lei; iar pentru* 11 *zile de lucru ale muncitorului şi* 6 *zile de lucru ale practicantului se plăteşte* 302 *lei. Cît se cuvine fiecăruia pentru* 25 *de zile de lucru?*

Gelu Juncu, elev, Roman

Soluţie. — Operaţiile sînt următoarele:

334 − 302 = 32 lei primesc pentru o zi de lucru muncitorul şi practicantul.

Atunci, pentru 7 zile de lucru vor primi împreună 32 . 7 = 224 lei, iar 334 − 224 = 110 lei primeşte numai muncitorul pentru 5 zile de lucru.

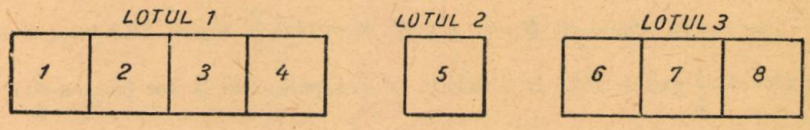
Pentru o zi de lucru muncitorul va primi 110 : 5 = 22 lei. Prin urmare, 32 − 22 = 10 lei primeşte practicantul pentru o zi de lucru. Pentru 25 zile de lucru vor primi 22 . 25 = = 550 lei muncitorul şi 10 . 25 = 250 lei, practicantul.

Problema E: 574

De pe trei loturi s-au recoltat 160 *tone grîu. Primul lot a produs de patru ori mai mult decît al doilea, iar al treilea a produs cît diferenţa între primul şi al doilea lot. Cît s-a recoltat de pe fiecare lot?*

Tatiana Ivănceanu, elev Bucureşti

Soluţia. — Metoda figurativă. Facem desenul



Operaţiile sînt următoarele 4 + 1 + 3 = 8, rezultă ca 160 : 8 = 20 tone s-au recoltat de pe lotul II şi 20 . 4 = 80 tone s-au recoltat de pe lotul I. Deci, 20 . 3 = 60 tone s-au recoltat de pe lotul III.

Problema E: 586

O cantină a cumpărat 384 *kg cartofi şi* 142 *kg ceapă plătind în total,* 779 lei. *Cît a costat ceapa şi cît cartofii, dacă un kg de ceapă costă cu* 0,30 *lei mai mult decît un kg de cartofi.*

1. *Soluţie aritmetică.*

142 . 0,30 = 42,60 lei a costat mai mult ceapa decît cartofii 779 − 42,60 = 736,40 lei costă ceapa şi cartofii dacă un kg de ceapă costă cît un kg de cartofi

384 + 142 = 526 kg ceapă şi cartofi

736,40 ; 526 = 1,40 lei costă un kg de cartofi

1,40 + 0,30 = 1,70 lei costă un kg de ceapă

384 · 1,40 = 537,60 lei costă cartofii

142 · 1,70 = 241,40 lei costă ceapa

2. *Soluţie algebrică.*

Fie x şi y respectiv numărul kilogramelor de cartofi şi de ceapă. Avem: $x + y = 779$ şi $\frac{y}{142} - \frac{x}{384} = 0{,}30$. Sau $384\,y - 142\,x = 16358{,}40$. Scoatem valoarea lui x din prima

ecuație, $x = 779 - y$ și introducînd-o în a doua, avem $384\,y - 142(779 - y) = 16358{,}40$ sau

$$384 - 110\,618 + 142\,y = 16358{,}40 \text{ sau}$$
$$384\,y - 142\,y = 16358{,}40 + 110\,618. \text{ Deci,}$$
$$526\,y = 126\,976{,}40 \text{ adică } y = \frac{126\,976{,}40}{526} = 241{,}40 \text{ lei}$$

Mai avem $x = 779 - 241{,}40$, deci, $x = 537{,}50$ lei.

Verificare: 241,40 + 537,60 = 779 lei în total

537,60 ; 384 = 1,40 lei un kg de cartofi

241,40 ; 142 = 1,70 lei un kg de ceapă

1,70—1,40 = 0,30 costa mai mult un kg de ceapă decît unul de cartofi.

Piobleme 609

Pionierul A este cu 80 pași înaintea pionierului B. El face 5 pași în timp ce pionierul B face 4 pași ; dar 3 pași de-ai pionierului B fac cîît 4 pași ai pionierului A. Știind că pionierul B face 84 pași pe minut, după cît timp îl va ajunge pe A?

Gh. C. Grosu, Botoșani

Soluție. — Fie x numărul de pași pe care pionierul B trebuie să-i facă pentru a-l ajunge pe primul. Deoarece 4 pași de-ai lui A fac cît 3 pași de-ai lui B, un pas da-al lui A face cît $\frac{3}{4}$ dintr-un pas de-al lui B. Deci 80 pași ai lui A vor face cît $80.\frac{3}{4} = 60$ pași ai lui B. În timpul cît B face 4 pași, A face 5 pași. Deci, în timpul în care B face un pas A face $\frac{5}{4}$ pași sau în timpul cît B face x pași, A va face $\frac{5}{4}$ x pași. Știm însă, că un pas al lui A face cît $\frac{3}{1}$ pași de-ai lui B. Urmează că $\frac{5}{4}x$ pași ai lui A vor face cît $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}x =$ $= \frac{15}{16}x$ pași de-ai lui B. Drumul străbătut de A, măsurat în unități egale cu pasul lui B, va fi 60 (adică cei 80 pași al lui A exprimați în pașii lui B) plus $\frac{15}{16}x$. Ecuația problemei este $x = 60 + \frac{15}{16}$, x, unde x este numărul de pași pe care va trebui să-i facă B ca să-l ajungă pe A. Ecuația rezolvată, ne va da $x = 860$ pași. Timpul va fi deci,

$$t = \frac{s}{v} = \frac{960}{84} = 11\frac{3}{7} \text{ minute.}$$

PROBLEME PROPUSE

1779. — Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghi, suma cosinusurilor unghiurilor este cuprinsă între semi-suma și suma sinusurilor unghiurilor acelui triunghi.

L. Mănescu R. Vîlcea

1780. — Fie α, β, γ, trei puncte pe cevienele AA', BB', CC' în triunghiul oarecare ABC. Dacă segmentul $\alpha\beta$ este paralel cu AB, să se demonstreze că și segmentul ce unește intersecțiile $(AC, \alpha\gamma)$ și $(BC, \beta\gamma)$ rămîne paralel cu AB cînd γ descrie ceviana CC'.

Gh. Dobrotescu, Predeal

1781. — Dacă A și B sînt numere întregi astfel că $7A - 6B$ să fie multiplu de 13, să se demonstreze că și $7B - 6A$ este multiplu de 13. Generalizare.

Ion Mateescu, Giurgiu

1782. — Un corp cu greutatea specifică de 2,3 introdus în apa unui bazin este lăsat să cadă și face pînă în fundul bazinului 1,2 secunde. Care este adîncimea bazinului și cu ce viteză atinge fundul lui.

* * *

1783. — Să se afle pentru care valori pozitive ale lui x mai mici ca 360° avem pe rînd egalitățile:

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{2(1 - \sec x)} = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{cotg} x} - \sqrt{2(1 - \operatorname{cosec} x)} = \sqrt{1 - \operatorname{cotg} x}$$

C. Ionescu — Țiu

1784. — Cu 60 lei s-au cumpărat 60 broșuri de trei feluri: a 7 lei, a 3 lei și a 0,50 lei. Cîte au fost de fiecare fel?

Gh. Mitrofan, Caransebeș

1785. — O rază de lumină cade pe o lamă cu fețe paralele, suferind fenomenul de refracție. Dacă unghiul de incidență $i = 30°$, grosimea lamei $c = 20$ mm și indicele de refracție al sticlei $n = 1{,}54$. Să se arate:

1. Ce poziție are raza emergentă față de raza incidentă.
2. Care este deplasarea d a punctului I' care se vede în I'' (punctul pe unde iese raza emergentă).
3. Care este deplasarea h a razei emergente față de raza incidentă.

D. Tănase

1786. — Un automobil cu masa de 490 kg se mișcă uniform cu viteza de 10 m/sec. Fiind frînat la un moment dat se oprește după 10 secunde. Să se determine:

1) energia cinetică a automobilului înainte de frînare,
2) încetinirea mișcării în timpul frînării,
3) spațiul parcurs în timpul frînării pînă la oprire,
4) forța de frînare.

(Clasa VIII-a. Olimpiada de fizică Timișoara, 1955)

1787. — Într-un calorimetru de alamă avînd masa de 500 g, se află 1000 g apă cu temperatura inițială de 10°C. În apa din calorimetru se toarnă o cantitate de 300 g plumb topit, cu temperatura de 420°C. Temperatura finală a apei devine 15°C. Să se calculeze căldura de topire a plumbului știind căldura specifică a lui de 0,03 cal/g grad (atît în stare solidă cît și în stare lichidă), iar temperatura de topire a plumbului este de 327°C. Căldura specifică a alamei este de 0,09 cal/g grad.

(Clasa IX-a. Olimpiada de fizică, Timișoara, 1955)

1788. — Pistonul pompei unei prese hidraulice este împins cu ajutorul unei pîrghii. La brațul cel lung al pîrghiei acționează 20 kg. Raportul brațelor este 5:1. Ce forță de apăsare vom obține la pistonul presei dacă diametrul pistonului de la pompă este de 8 cm iar cel al pistonului de la presă este de 30 cm. Cît de mare e lucrul mecanic efectuat în kgm, dacă pistonul presei este ridicat cu 15 cm. Ce putere are motorul care a pus presa în funcțiune, dacă ridicarea de 15 cm a pistonului s-a făcut în 2 minute.

(anul I, școli medii tehnice Olimpiada de fizică, Timișoara 1955)

1789. — Fie un cerc O și pe el un punct fix A. Să se găsească pe cercul O punctul M, astfel ca N fiind proiecția lui A pe tangenta în M la cercul O, să avem produsul $AN \cdot NM$ maxim, apoi, ca suma $AN + NM$ să fie maximă. (Se poate consulta: I. I o n e s c u, Maxime și minime geometrice).

Gh. I. Bercea, Timișoara

1790. — Dacă $0 \leqslant a \leqslant 90°$ și $0 \leqslant b \leqslant 90°$ avem,

$$\sin a \sin b + \sin b \sin c + \sin a \sin c > \frac{9 \sin a \sin b \sin c}{\sin a (1 + \cos b) + \sin b (1 + \cos a)}$$

C. Ionescu — Țiu

1791. — O pompă servește pentru a ridica un debit de lichid cu greutatea specifică γ, la o înălțime oarecare. Se cere să se afle randamentul mecanic al pompei cunoscînd că randamentul total al ei este 0,5 și randamentul hidraulic este 0,75, iar pierderea de debit se consideră 4% din debitul net; pierderile prin frecare în conducte și viteza reziduală se apreciază la 20% din înălțimea netă de ridicare.

N. Sălan, inginer, Constanța

1792. — Motorul unui avion are puterea de 400 C.P., iar randamentul de 30%. Cîtă benzină trebuie să ia cu el avionul, ca să zboare fără escală pe o distanță de 650 km, cu viteza de 180 km/oră. Se dă puterea calorică a benzinei, de 11000 Kcal/kg.

(Clasa IX-a, Olimpiada de fizică, Timișoara 1955)

1793. — Un corp punctiform izolat, fiind încărcat cu sarcina $Q = +0{,}003$ coulombi creează în jurul lui un cîmp electric. În acest cîmp se dau două puncte: A aflat la depărtarea $r_1 = 0{,}3$ m și B aflat la depărtarea $r_2 = 90$ cm de sarcină. Să se determine:

1) intensitatea cîmpului în punctul A,

2) potențialul electric în punctul A,

3) diferența de potențial în volți, între punctele A și B,

4) lucrul mecanic în jouli, ce se cîștigă la deplasarea unei sarcini $q = +200$ unități electrostatice C.G.S. de la punctul A pînă la punctul B.

(Clasa X-a, Olimpiada de fizică, Timișoara 1955)

1794. — Polii unui acumulator care are o rezistență interioară de 0,25 ohmi sînt legați printr-un fir de cupru lung de 314 m și cu un diametru de 2 mm. Să se determine:

1) forța electromotoare a acumulatorului, dacă curentul produs are intensitatea de un amper;

2) tensiunea la bornele acumulatorului;

3) cantitatea de căldură ce se produce în circuitul exterior în timp de 10 minute;

4) cantitatea de argint metalic ce se depune pe catod în 10 minute dacă în locul rezistenței exterioare se intercalează o baie electrolitică de azotat de argint, avînd o rezistență de 0,75 ohmi.

(Se dă: rezistența specifică a cuprului = 0,0175 iar; echivalentul electrochimic al argintului 1,118).

(Clasa X-a, Olimpiada de fizică, Timișoara 1955)

1795. — Fie A un punct pe semicercul de diametru BC. Un cerc cu centrul în A și tangent dreptei BC taie arcele AC și AB în B_1 și C_1. Să se stabilească relațiile:

$$BC \cdot B_1C_1 = AB\,(CC_1 + B_1C) = AC\,(BB_1 + BC_1)$$

I. I. Cristea, elev, Constanța

1796. — Cercurile O_1, O_2, O_3 trec prin punctul fix O și se taie două cîte două în $P_1(O_2, O_3)$; $P_2(O_3, O_1)$; $P_3(O_1, O_2)$. Pe diametrele OA_1, OA_2, OA_3 se iau punctele B_1, B_2, B_3 așa încît: $OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2 = OA_3 \cdot OB_3 = m^2$ iar prin B_1, B_2, B_3 se duc la diametrele respective perpendiculare Δ_1, Δ_2, Δ_3, care se taie două cîte două în $C_1(\Delta_2, \Delta_3)$, $C_2(\Delta_3, \Delta_1)$, $C_3(\Delta_1, \Delta_2)$. Să se arate că:

a) Punctele C_1, C_2, C_3 se află pe coardele comune OP_1, OP_2, OP_3 și satisfac relațiile $OC_1 \cdot OP_1 = OC_2 \cdot OP_2 = OC_3 \cdot OP_3 = m^2$.

b) Punctele în care Δ_1, Δ_2, Δ_3 taie respectiv cercurile O_1, O_2, O_3 se află pe un cerc cu centrul O și rază m.

N. C. Ciomu

1797. — Să se demonstreze că dreptele determinate de vîrfurile unui triunghi şi punctele unde mediatoarele laturilor intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului, sînt concurente.

Mihail I. Popescu, student, Bucureşti

1798. — Se dă o circumferinţă de diametru AB. Fie OC raza perpendiculară pe AB. Printr-un punct D luat pe cerc se duce DE paralelă la AB, punctul E fiind pe OC. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor OD şi AE.

M. V. Iosifescu, student, Bucureşti

1799. — Să se rezolve ecuaţia trigonometrică:

$$\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{8}.$$

(Olimpiada matematică, etapa raională, Cluj 1955)

1800. — Să se arate că ecuaţia:

$$\frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = 4$$

are rădăcini reale oricare ar fi numerele a şi b.

(Olimpiada matematică, etapa raională, Cluj 1955)

1801. — O lampă electrică este de 100 W şi 120 V. Să se calculeze: *a)* rezistenţa filamentului la rece; *b)* coeficientul termic al filamentului dacă temperatura de încălzire este 2000°C şi dacă rezistenţa filamentului la cald este de 10 ori mai mare decît 0°C; *c)* cantitatea de căldură exprimată în calorii transmisă camerei timp de o oră dacă energia luminoasă este numai 5% din energia totală radiată.

(Olimpiada de fizică, cl. X-a., Cluj, 1955)

1802. — Să se calculeze suma:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cos (2k - 1) a$$

(Se poate folosi metoda arătată în nota asupra unor sume trigonometrice din G.M.F.— B).

C. Ionescu — Ţiu

1803. — Să se determine cantitatea de căldură necesară pentru a ridica temperatura unei camere de dimensiunile 7 m . 5 m . 3 m de la 16°C la 21°C dacă se pierde prin pereţi 10% din căldură. (Pentru aer C= 0,24; Gs = 0,00128).

(Olimpiada de fizică, cl. IX-a, Cluj 1955)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E: 679. Într-o staţiune climaterică o grupă de excursionişti a luat masa la cantină plătind cîte $2\frac{3}{4}$ lei de fiecare persoană, iar o altă grupă, a luat masa la restaurant plătind cîte $10\frac{1}{2}$ lei de fiecare persoană.

---

*) V: 679, 680; VI: 681, 683, 685, 686, 689; VII: 682, 684, 687, 688, 690, 691, 692.

Cheltuiala totală a primei grupe a fost cu $127\frac{1}{2}$ lei mai mică decît a grupei a doua, cu toate că în grupa întîia au fost cu 10 persoane mai mult.

Din cîte persoane a fost formată fiecare grupă de excursionişti? Cît a cheltuit fiecare grupă?

Ştiind că aceste grupe au dormit în camere cu acelaşi număr de paturi şi astfel că în fiecare cameră au dormit excursionişti dintr-o singură grupă, în cel mai mare număr posibil, se întreabă cîte paturi au fost într-o cameră şi cîte camere a ocupat fiecare grupă?

* * *

E: 680. Din sfeclă de zahăr recoltată de pe un teren dreptunghiular s-au fabricat 69552 kg zahăr. O parte din această sfeclă, destinată exportului este cu 9552 kg mai mică decît cea destinată uzului intern. Ştiind că 50 kg sfeclă dau 9 kg zahăr şi că un hectar produce în medie 35 tone sfeclă, se cere:

1) producţia totală de sfeclă;
2) cîte hectare au fost semănate cu sfeclă?
3) ce cantitate de sfeclă a fost exportată şi ce cantitate s-a folosit în ţară?

* * *

E: 681. A, B, C, D fiind patru puncte aşezate în ordinea dată pe o dreaptă, să se arate că avem relaţia:

$$2(AB \cdot BC \cdot CD + AB \cdot AD \cdot CD) + AB \cdot BC \cdot AC + BC \cdot CD \cdot BD =$$
$$= AC \cdot CD \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD.$$

I. I. Loziciu, student Timişoara

E: 682. Cît trebuie să fie E astfel ca să avem relaţia:

$$\left(\frac{n}{m} + p \cdot \frac{m}{n}\right) \cdot \left(p \cdot \frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right) - E = (p-1)^2.$$

Gh. Dobrotescu

E: 683. La patru depozite au sosit în aceeaşi săptămînă 3900 kg făină, repartizată în felul următor: primul depozit a primit de două ori cantitatea pe care a primit-o al doilea depozit, al treilea $\frac{2}{5}$ din ceea ce a primit primul, iar al patrulea cu 220 kg mai mult decît al treilea. Această cantitate a reprezentat $86\frac{2}{3}$ % din cantitatea trimisă în săptămîna următoare acelorași depozite. De data aceasta distribuţia a fost următoarea: primul depozit a primit de $1\frac{2}{3}$ ori mai puţin decît al doilea, al treilea cu 10% mai mult decît al doilea, iar al patrulea jumătate din cantitatea primită de primul depozit.

Ştiind că dintr-un kg de făină se pot fabrica 1,200 kg pîine, se întreabă ce cantitate de pîine se poate fabrica din făina depozitului al doilea, atît în prima săptămînă cît şi în a doua săptămînă, şi cu cît la sută s-a mărit cantitatea de făină la acest depozit în a doua săptămînă faţă de prima?

* * *

E: 684. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic, dintre cele trei mediane cea mai mică este mediana corespunzătoare ipotenuzei.

C. I. Ţ.

E: 685. Un muncitor sapă în medie 1 m^3 de pămînt în 2 ore şi 24 minute. Care este numărul minim necesar de muncitori pentruca în 3 zile a cîte 8 ore pe zi de lucru, să se termine de săpat 90 m^3 de pămînt? Să se afle cu cîte ore ar termina mai înainte lucrarea dacă se angajează de la început un muncitor mai mult decît numărul necesar?

* * *

E: 686. Să se arate că:

$$(2a - b + 1)^3 - (a + b - 1)^2 + (a + b)^2 - (a - b)^2 - 4b =$$
$$= 6a^3 + (1 - b)^3 + 6a(1 - b)(2a - b + 1) + (2a - 1)(a^2 + 1) - b(b - 2a + 2) =$$
$$= 4ab + (2a - b)^2(2a - b + 3) + (a + b)(a - b) - (a + b)^2 +$$
$$+ (1 - b)^2 - (a - 1)^2 - 3(b - 2a) = (2a + 1)^3 + [4b(b - 3a) + a](a + 1) -$$
$$- [b(b - 2a) + 1](b + 1) - a(2a + 1) - b(b + 4).$$

Paul Popescu, elev, Bucureşti

E: 687. Se dă patrulaterul $ABCD$ înscris, având diagonala $AC = 2R$; laturile $B = BC$, arcul $AD\ A = \frac{3}{5}$ din 2 unghiuri drepte. Prelungirea coardei BE întîlneşte prelungirea laturei AD în F; $DE = 30°$. Se cere: măsura unghiurilor AFB, ACD, BHC, unghiul format de latura patrulaterului şi tangentă în punctul B, precum şi unghiurile patrulaterului.

Gh. Moţiu, profesor Arad

E: 688. Să se descompună în factori expresiile

$$E_1 = x^4 + x^2 + x - 3$$

şi

$$E_2 = x^4 + 25x^3 - 4x^2 - 19x - 3.$$

Gh. Dinu, elev, Craiova

E: 689. Să se arate că:

$$(ax - by)^3 + (by - cz)^3 + (cz - ax)^3 = 3(ax - by)(by - cz)(cz - ax).$$

Ad. Dragomir, elev, Oraşul Stalin

E: 690. Într-un triunghi oarecare ABC perpendiculara în C pe BC întîlneşte pe AB în D, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B şi C se taie formînd un unghi egal cu $\frac{B + C}{2}$. Se mai cere să se calculeze unghiurile triunghiului CDE în funcţie de A, B şi C.

I. A. Rus, elev, Oradea

E: 691. Să se demonstreze că dacă $m > n > 0$ şi $mn > 1$ există inegalitatea:

$$\frac{m}{n} > \frac{1 + m^2}{1 + n^2}.$$

C. I. Ţ.

E: 692. Un număr împărţit la 7 dă rest 6, iar împărţit la 4 dă rest unu. Ce rest va da împărţirea acelui număr la 28?

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Evidenţiaţi

Dintre rezolvitorii din localităţile care încep cu literele P-Z, anunţaţi cu soluţii bune, primite în cursul lunii martie 1955 s-au **evidenţiat** următorii:

Şerb G. Adrian (clasa X-a, Piteşti), **Graure I. Gheorghe** (clasa IX-a Slatina), **Rotaru Const.** (clasa X-a, Suceava), **Mateescu V. Ion** (clasa X-a, R. Vîlcea), **Buţă D. Titus** (clasa X-a, Turnu Severin), **Soresecu Victor** (clasa X-a, Piteşti), **Stăniculescu Mihail** (clasa IX-a, Tîrgo-

viște,), **Tudosie Constantin** (clasa X-a, Turnu Severin), **David Vasile** (clasa X-a, Ploiești), **Antonescu Victor** (Reghin), **Sămărescu F. Dan** (clasa X-a, Pitești), **Popescu Dumitru** (clasa X-a, Ploiești), **Boghian Dragoș** (clasa X-a, Suceava), **Bogdan Mircea** (clasa IX-a, Ploiești), **Iștan S. Cornel** (student, Timișoara), **Alexe Ion** (absolvrnt, Sibiu), **Pupăzan Nicolae** (absolvent, Sibiu), **Băeșu D.** (clasa X-a, R. Vîlcea), **Ursoiu Vasile** (clasa X-a, Roman), **Lupuțiu Ion** (clasa X-a, Ploiești), **Velicescu Mircea** (clasa VI-a, R. Vîlcea), **Moroșan Dumitru** (clasa X-a, Succava), **Sofron Gavril** (anul I, s.m.t. mec. agriculturii, Pitești), **Gălbenuș Eugeniu** (clasa X-a, Slatina), **Chirică Andrei** (clasa IX-a, Ploiești), **Ghinea Constanța** (clasa IX-a, Tg. Ocna), **Nedelcu Mihai** (clasa X-a, Ploiești), **Negoescu Emil** (clasa X-a, Tecuci), **Alter Moisă** (clasa X-a, Tecuci, **Ionescu Mircea** (clasa IX-a, Ploiești), **Bucur Gheorghe** (clasa IX-a, Pucioasa), **Matic Corneliu** (clasa IX-a, Tg. Mureș), **Stroe Radu** (clasa X-a, Ploiești), **Ionescu Radu** (clasa IX-a, Turnu Severin), **Stănescu Viorel** (clasa X-a, Vaslui), **Pătrașcu Victor** (Clasa X-a, Ploiești), **Vladu Viorel** (clasa X-a, Turnu Severin), **Strungaru N. Crișan** (clasa X-a, Turnu Severin), **Hodor Constantin** (clasa VII-a, Roznov-Piatra Neamț), **Fildan Mircea** (clasa IX-a, Petroșani), **Petrescu M. Răsvan** (Clasa IX-a, Ploiești), **Tudor C. Gheorghe** (clasa X-a, R. Vîlcea), **Garandt Valter** (clasa VI-a, Reșița), **Antonescu Păun** (clasa X-a, Slatina), **Galațky Gheorghe** (clasa X-a, Tîrgoviște), **Stoian I. Gheorghe** (clasa X-a, Tîrgoviște), **Matei Aurel** (clasa IX-a, Tg. Mureș).

* * *

Pînă la sfîrșitul lunii martie 1955 s-au mai primit soluții bune la cîte cel puțin zece probleme publicate în ultimele patru numere ale G.M.F.-B, probleme propuse (P), note (N) sau articole, de la următorii rezolvitori din localitățile care încep cu literele O — Z, după cum urmează:

ORAȘUL STALIN. Clasa VI-a. Climescu Mihail (E: 563, 568, 574, 576, 582, 586, 592, 603, 608); clasa VII-a. Tarța Mircea (E: 566, 571, 574, 575, 578, 582, 583, 586, 588, 603, 601, 604, 606, 608); clasa VIII Dragomir Adrian (1408, 410, 411, 413, 414, 419, 423, 426, 439, E: 564, P), Jinga Gheorghe (1413, 432, 437, 449, 460, 524, 528, 529, 534, E: 550, 553, 554, 557, 561, 563, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 580, 584, 585, 586, 587, 588, 592, 594, 600, 601, 602, 603, 608), Gabor Mircea (1472, 474, 483, 485, 486, E: 520, 522, 524, 526, 531, 532, 533, 576, 578, 608), Buruiană N. (E: 546, 560, 563, 567, 568, 571, 572, 573, 574, 578), Munteanu Petru (1446, 449, 460, 474, 478, 493, 496, 513, 563, 571, 574, 580, 586, 587, 588, 597, 608); clasa IX-a. Cioban I. Ioan (1373, 374, 375, 377, 380, 382, 383, 398, 402, 409, 416, 441, 449, 458, 460, 461, 468, 472, 475), Corbu Gheorghe (1411, 413, 436, 449, E: 563, 568, 569, 580, 586, 587, 588), Grizbășan Sorin (1408, 409, 432, 460, 475, 449, 504, E: 567, 571, 574, 588, 608), Hondroșan Florin (1460, 474, 528, E: 563, 566, 568, 569, 574, 586, 587, 588, 597, 608), Iancovici Lucian (1416, 432, 436, 449, 474, 475, 526, 528, 532, E: 563, 568, 570, 571, 574, 576, 586, 587, 588, 597, 600, 608), Minea Florin (1372, 374, 375, 377, 384, 403, 404, 405, 418, 419, 424, 432, 433, 434, E: 555, 558, 559, 561, 563, 568, 569, 574, 575), Modval Nicolae (1411, 416, 436, 449, 472, 474, 475, 522, 526, 527, 528, 532), Nedelescu Stelian (1416, 436, 449, 472, 474, 475, E: 563, 570, 571, 586, 587, 588), Cîrstea Cornel (1449, E: 569, 592, 588, 597, 600, 601, 605, 607, 608); clasa X-a. Tofan Mircea (1472, 474, 475, 483, 494, 513, 522, 526, 532, 534, E: 592, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 606, 607, 608). Școala medie tehnică de mecanică, anul II. Dragomir Ion (1416, 436, E: 563, 568, 569, 571, 574, 575, 580, 584), Păunescu Mihai (1416, 426, 432, 436, E: 563, 565, 568, 571, 574, 575), Nițulescu Vasile (1416, 436, E: 559, 560, 563, 565, 568, 569, 571, 574, 576); anul IV. *Ioniță Tudor* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 388, 389, 390, 391, 392, 893, 395, 396, 397, 402, 403, 404, 405, 406, 407).

ORȘOVA. (reg. Timișoara). Clasa VIII-a. Petroi Constantin (1449, 458, 460, 517, E: 563, 567, 568, 571, 572, 574, 592, 597, 601, 608), Răchitan N. Constantin (1460, 493, 494, 496, E: 587, 592, 597, 602, 603).

PANCIU. *Școala medie.* Clasa VIII-a. Țîru Nicolae (1449, 456, 478, 493, 393, 395, 524, 528, 540, 558, E: 592, 597, 601).

PAȘCANI. Clasa X-a. Balaban Eugen (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 382, 383, 395).

PIATRA NEAMȚ. *Școala medie tehnică de construcții.* Anul III. Leaț Nicolae (1474, 475, 481, 483, 484, 486, 494, 495, 516, 521, 527, 531);

Școala medie de fete. Clasa X-a. Ardeleanu Margareta (1469, 473, 474, 475, 480, 483, 512, 515, 522), Chertic Elena (1472, 482, 483, 522, 528,529, 533, 558, E: 592, 602, 607, 608), Corduneanu Maria (1410, 412, 416, 442, 472, 474, 475, 480, 482, E: 563, 568, 569, 575, 586, 587, 588, 592, 602, 607, 608), Gheorghiu Elena (1472, 474, 481, 485, 486, 506, 513, 515, 520, 526, 529), Gribincea Elena (1472, 474, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 498, 526, E: 592, 602, 607, 608), Iftimoaia Florica (1442, 464, 472, 473 474, 475, 482, 483, 485, 489, 513, 515, 517, 521, 522, 528, 529, 531, 533, E: 592, 603, 608), Stăncescu Angela (1481, 483, 498, 516, 531, E: 584, 586, 588, 597, 600, 503, 608,), Țifui Zenobia (1472, 482, 4483, 485, 86, 498, 525, 603, E: 592, 602, 607, 608).

Școala de 7 ani, Roznov. Clasa VII-a. *Hodor D. Constantin* (1377, 437, E: 550, 551, 552, 553, 555, 557, 558, 559, 560, 563, 566, 567, 568, 569, 571), Tîrcăoanu H. Nicolai (E: 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 583, 584, 586, 587, 588).

Școala medie de băieți. Clasa IX-a. Gavril Vasile (1436, 449, 475, 484, 486, 493, 516, 529, E: 586, 587, 594, 601, 608), Hărăboi Mihai (1411, 449, E: 563, 564, 565, 568, 571, 574, 575, 580, 581, 585, 586, 587, 588), Mitu Ion (1374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 403, 409, 410, 419, 423, 427, E: 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 567, 568, 569, 570, 571); clasa X-a. Băiceanu Constantin (1374, 375, 378, 410, 442, 449, E: 559, 577, 578, 587).

PETROȘANI *(Hunedoara).* Clasa IX-a. *Fildan Mircea* (1472, 474, 475, 477, 478, 483, 484, 485, 486, 492, 494, 496, 513, 516, 518, 522, 526, 528, 529, 532, 540, 558, E: 599), *student Biclineru Vasile* (1395, 405, 406, 424, 425, 426, 436, 442, 445, 449, 453, 456, 457, 458, 460, 416, 465, 467, P).

PETROȘANI *(Zimnicea). Absolvent* Bătinețu M. Dumitru (1346, 349, 358, 362, 363, E: 537, 538, 539, 540, 541, 544, 546, 547, 548, 549, 551, 553, 558, 559, 586, 561, 563, 566, 568, 569, 570, 571, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 582, 583, 584, 586, 587, 588).

PITEȘTI. *Școala medie tehnică de mecanizarea agriculturii.* Anul II. *Sofron Gavril* (1356, 364, 373, 374, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 389, 392, 395, 403, 405, 407, 409, 411, 424, 432, 436, 449, 451, 454, 456, 460, 461, 465, 498, 499); *Școala medie de fete.* Clasa X-a. Manda I. Simona (1383, 410, 416, 418, 434, 436, 440, E: 552, 558, 559, 561, 563, 564, 568, 570, 571), Roman Livia (1441, 442, 449, 472, 475, E: 578, 579, 586); Școala medie de băieți. Clasa VIII-a. Oproiu Camil (E: 558 563, 564, 567, 568, 570, 571, 574, 575) ;clasa IX-a. Dumitrescu T. Nicolae (1408, 409, 410. 436, 442, 460, E: 563, 567, 568, 571, 572, 575, 578, 580), Dumitru Gh. Stan (1372, 375, 378, 416, 436, 452, 513, 515, 516, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 529, 532, 534, 540, 572, 576, 577, 578, E: 567, 570, 592, 596, 597, 600, 601, 602, 603, 606, 607, 608), Marin Ion (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 382, 383, 385, 386, 403, 404, 405, 416, 419, 436, 443, 449, 458, 467), Matei I. Ion (1372, 374, 375, 377, 378, 383, 385, 386, 403, 404, 405, 418, 424, 436); clasa X-a. Bogaciu Valeriu (1390, 393, 402, 409, 410, 411 412, 413, 416, 417, 418, 419, 421, 423, 424, 425, 426, 427, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 437, 438, 439, 440, P), Gulie I. Nicolae (1441, 449, 453, 472, 474, 475, 479, 480, 482, 483, 484, 486, 485, 493, 494, 499, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 534, E: 563, 568, 586), *Sămărescu F. Dan* (1388, 389, 390, 392, 393, 396, 403, 404, 405, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 418, 419, 421, 423, 424, 426, 431, 432, 433, 434, 436, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 449, 451, 453, 456, 460, 461, 464, 465, 467, 467, 468). ȘERB GABRIEL ADRIAN (1424, 447, 449, 451—456, 458—545, 547—552, P) (109 probleme), *Sorescu Victor* (1372—1387, 390, 392, 395, 397, 402, 403, 404, 406, 407, 409, 416, 421, 423, 425, 426, 431, 433, 434, 437, 441, 442, 443, 446, 449, 453, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 468, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482,

483, 484, P), Ștefănescu I. Alexandru (1372, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 348, 385, 386, 390, 395), Răducanu Mutzi (1376, 377, 378, 379, 382, 386, 404, 412, 416, 436, 442), Tața Octavian (1373, 375, 377, 378, 379, 384, 386, 409, 416, 417, 432, 493, 528, 532, 550, 552, 553, P).

PLOIEȘTI. Clasa V-a. Cheșa Valeriu (1493, 494, 495, E: 561, 568, 574, 575, 580, 582, 586, 587); clasa VI-a *Scăeni*. Ghindescu Elena (E: 563, 568, 571, 574, 575, 581, 586, 587, 588, 607), Mateescu Doina (E: 551, 558, 559, 563, 574, 578, 580, 586, 589, 596); clasa VI-a șc. el. băieți. Tăbușcă C. Pavel (E: 563, 568, 569, 571, 574, 575, 580, 583, 586, 587, 588), Timuș M. Dan (E: 561, 563, 566, 568, 571, 574, 575, 582, 586, 587, 588, 601, 608); clasa VII-a. Băzăvan Mihai (E: 563, 568, 571, 574, 580, 581, 586, 593, 601, 603, 608), Foarfecă Mihaela (E: 551, 558, 559, 560, 561, 565, 567, 572, 580, 585), Magda Marian (E: 563, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575), Tudor Corneliu (E: 565, 576, 578, 581, 582, 585, 586, 588, 592, 601, 602, 608), Petricică Teodor (E: 563, 568, 569, 571, 574, 575, 583, 584, 586, 587, 588), Marinescu G. Mihai (1493, 494, E: 580, 581, 592, 593, 598, 600, 602, 603, 608); clasa VIII-a. Gheorghe A. Ioan (E: 563, 564, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 576, 578, 579, 580, 584, 586, 587, 588), Rusu Dan (1408, 418, 419, 424, 426, 434, 449, 458, 460, E: 563, 564, 565, 566, 568, 569, 570, 571, 573, 574, 575, 580, 584, 586, 587, 588), Vasilache Marilena (1372, 374, 375, 377, 383, 402, 407, E: 558, 559, 561, 563, 564, 574, 586, 587, 588), Borislavski Florin (1389, 392, 402, 403, E: 558, 561, 563, 569, 574, 575, 586, 587, 588), Căsăndroiu C. Tudor (1372, 374, 377, 383, 392, 412, 449, 493, 494, 495, 516, 527, 528, 529, 545, 548, E: 551, 559, 569, 576, 580, 586, 588, 593, 594, 597, 603, 608), Cojocaru Alexandru (1458, 460, 474, 479, 485, 486, E: 563, 568, 569, 574, 587, 588, 597, 608), Drosu Constantin (1449, 460, 486, 493, 495, E: 563, 566, 568, 569, 571, 574, 575), Georgescu P. Adrian (E: 554, 558, 559, 561, 563, 568, 569, 571, 574, 578, 580, 586, 587, 588), Stănescu M. Constantin (E: 551, 558. 559, 563, 568, 569, 571, 580, 586, 587), Baltag Vasile (1302, 389, 404, 407, 433, 449, 474, E: 553, 559, 565, 566, 573, 496, 601, 603, 604, 606, 608, P), Constantinescu Dan (E: 580, 584, 585, 586, 587; 1437, 449, 493, 516), Rîmniceanu Dan (1432, 449, E: 563, 568, 569, 571, 574, 575, 586, 587, 588); clasa IX-a. *Chirică Andrei* (1372, 373, 375, 376, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 386, 392, 394, 396, 402, 403, 404, 405, 409, 410, 412, 413, 416, 426, 436, 440, 443, 449, 481, 482, 502), Cheșa Valentin (1493, 494, E: 563, 565, 568, 571, 574, 476, 586, 587, 588), Costeanu I. Sorin (1372, 374, 375, 377, 378, 416, 449, 451, 493, E: 559, 560, 561, 563, 565, 566, 567, 568, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 580 582, 583, 586, 587, 588), Cioltei Anca (1472, 474, 475, 483, 493, 494, 522, 526, 532, E: 563, 567), Dinescu Sorin (1375, 377, 378, 383, 434, E: 558, 563, 567, 568, 569, 572, 574, 576, 577, 586), Enache C. Gheorge (1372, 373, 374, 377, 378, 379, 383, 386, 403, 405, 416, 424, 436, E: 558, 559, 563, 567, 568, 572, 574), Gașcu A. Mihai (1372, 374, 375, 378, 379, 383, 397, 407, 409, 416, 436, E: 552), Mezincescu Anca (1408, 411, 412, 416, 449, 458, 475, 526, 529, 540, E: 563, 567, 568, 571, 572, 576, 575, 577, 584, 586, 587, 588, 608), *Bogdan Mircea* (1376, 379, 381, 382, 384, 394, 396, 402, 404, 405, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 423, 424, 426,—430, 434, 436, 440, 441, 443, 449, 451, 453, 456, 458, 459, 460, 461, P), Damian Șerban (1372, 376, 379, 380, 384, 386, 392, 396, 403, 404, 408, 409, 412, 413, 416, 426, 432, 436, 439, 443, 449, 451, 472, 473, 476), *Ionescu Mircea* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 381, 383, 384, 386, 392, 394, 396, 402, 403, 404, 405, 409, 410, 413, 416, 426, 432, 436, 440, 449, 451, 476, 482, P), *Petrescu M. Răsvan* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 386, 392, 394, 396, 402, 403, 404, 405, 406, 409, 416, 434, 436. 449, 472, 522), Georgescu Sorin (1408, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 436, 427, 449), Popescu I. Gheorghe (1372, 473, 480, 483, 486, 493, 496, 516, 520, 526, 528, E: 563, 565, 568, 571, 574, 586, 587, 592, 603, 608), Georgescu Dan (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 383 386, 402, 403, 404, 409, 410, 413, 416, Rădulescu Gheorghe (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 383, 403, 404), Spătaru Dinu (1372, 375, 380, 382, 383, 392, 402, 409, 436, 476), Jurcă Valeriu (1372, 1374, 377, 379, 379, 383, 403, 404, E: 563, 568), *Văgăunescu Gheorghe* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381,

382, 383, 384, 386, 392, 394, 402, 403, 404, 405, 406, 408, 409, 410, 411, 413, 436), Ştefănescu Dan (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 386, 403, 404, E: 563), Roman Barbu (1372, 374, 377, 378, 380, 383, 403, 406, 407, E: 563); Clasa X-a. *David Vasile* (1372—375, 377, 378, 380, 382, 383, 385, 404, 409, 410, 412, 413, 415, 416, 423, 424, 432, 436, 440, 442, 449, 454, 456, 458, 459, 460, 464, 468, 472, 475, 476, 481, 482, 486, 498, 499, 506, 513, 515, 517, 520, 522, 524, 526, 527, 529, 531, 532, 533, 534, 558, E: 528, 564, 567, 571, 574, 585, 586, P), *Lupuţiu Ioan* (1441, 462, 468, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 489, 490, 491, 493, 496, 497, 498, 499, 501, 502, 503, 506, 507, 508, 509, 510, 511, P), Cristescu Florian (1409, 436, 440, 441, 442, 461, 462, 513, 520, 522, 526, 528, 532), Kupferberg Albert (1408 — 412, 414 — 416, 418, 423, 424, 426, 431, 432—434, 436, 440 — 443, 448, 449, 453, 456, 458, 460, 461), *Nedelcu Mihai* (1346, 348, 372, 375, 376, 377, 378, 382, 384, 388, 390, 392, 393, 397, 408, 409, 410, 411, 413, 414, 416, 423, 429, 436, 439, 465, 441, 442, 453, 457, 458, 459, 460). *Pătraşcu Victor* (1423, 441, 442, 449, 451, 460, 465, 471, 472, 474, 475, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 493, 494, 498, 511, 513, 515, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 532, P), Popovici Gh. Iulian (1426, 429, 430, 431, 432, 433, 440, 441, 442, 443, 449, 451, 453, 454, 456, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 466, 467, P), *Popescu Dumitru* (1381, 384, 386, 388, 390, 404, 409, —413, 415, 419, 423, 429, 432, 437, 440—443, 449, 451, 453, 456—462, 465, 467, 472, 474, 475, 478, 481—486, 493—495, 509), Teodorescu Tudor (1372, 374—379, 382, 385, 386), Scupin Nicolae (1410—413, 416, 423, 432, 434, 436, 440, 449, 458, 459, 461, 462), Turiga M. Constantin (1436, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 532, 539, E: 565, 563, 597, 600, 602), *Stroe Radu* (1375, 376, 383, 385, 388, 392, 396, 397, 399, 421, 454, 466, 469, 472, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 497, 498, 499, P), Visarion Cornel (1372—377, 379, 389, 381—383, 385, 392, 396, 403, 404, 405, 406); absolvenţi: Constantinescu Nina (1374, 377, 409, 410, 416, 418, 436, 442, 443, 449, 472, 474, 480, 481, 483, 487, 506, 516, 526, 531, 532, 534), Schip Harry (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 409, 416, 436, 442, 449, 465, 472, 474, 475, 479, 480, 481, 482, 486, 491, 499, P), Teodorescu Ştefan (1372, 373, 374, 375—385, 390, 392, 393, 397, 405, 406, 407, 436, 441, 457, 459, P).

PUCIOASA. Clasa IX-a. *Bucur D. Gheorghe* (1423, 434, 453, 464, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 484, 485, 486 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 508, 510, 511, 516, 518, 520), Dragomir I. Jean (1374, 375, 377, 378, 383, 385, 392, E: 552, 558, 559, 560, 561), Frăţiloiu Gheorghe (1375, 378, 381, 383, 411, 416, E: 552, 558, 559, 560, 561, 563, 571, 572, 574, 575, 578, 579, 584, 586, 587, 588), Stan N. Dumitru (1374, 375, 377, 381, 392, 403, 411, 436, 449, 465, E: 558, 559, 560, 563, 564, 571, 586, 587, 588).

RĂDĂUŢI. Clasa X-a. Coroamă Octavian (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 370, 382, 410, 411, 414, 436, 438, 439, 440, 453, 455, 465, E: 558, 559, 561, 568, 570, 571, 577, P), Malek Frieda (1409, 410, 412, 413, 416, 441, 443, 449, 460, E: 563, 568, 574, 575, 588).

R. SĂRAT. Clasa V-a. Asanache Horia (E: 561, 563, 568, 574, 575, 581, 582, 586, 588, 601, 508); Clasa IX-a. Tudor Ionel (1410, 413, 414, 421, 434, 442, 449, 451, 460, 461, 464, 468, 471, 475, 481, 484, 486, 493, 498); clasa X-a. Teodor Sergiu (1472, 524, 527, 532, 537, 539, 541, 546, E: 576, 578, 579, 596, 606).

R. VÎLCEA. Clasa VII, *fete*. Ionescu Crista (E: 558, 559, 561, 563, 568, 571, 572, 574, 576, 578, 579, 586, 587); *Şcoala medie tehnică silvică*, anul II. Blejan Ion (1358, 375, 378, 379, 390, 392, 404, 409, 414, 416, 436, 441, 461, E: 561, 568, 571, 574, 576, 588), *Şcoala medie de băieţi*, clasa IX-a. Băiaşu D. Nicolae (1474, 475, 482, 486, 493, 494, 495, 496, 517 ,527, 528, E: 554, 558, 559, 596, 597, 601, 603, 608), Cornilescu I. Mircea (1372, 375, 378, 383, 434, 443, 449, E: 559, 561, 563, 565, 568, 571, 572, 574, 576, 577, 580, 583, 586, 587, 588), Enescu I. Nicolae (1375, 378, 418, 429, 436, 449, 460, 474, 475, 493, 494, E: 558, 559, 563, 572, 574, 576, 578, 579, 582, 586, 587), Neferu N. Mihai (1372, 374, 375, 377, 378, 383, 405, 418, 429, 434, 436, 449, 456, 458, 464, 472, 478, 482, 493, 494, 513, 524, 526,

532, 538, 546, E: 560, 561, 563, 568, 571, 572, 574, 575, 576, 586, 583, 597), Puşchilă I. Octavian (1372, 383, 402, 403, 434, 436, 442, 449, 458, 464, E: 558, 559, 561, 580, 586, 587, 588), Paulescu N. Dan (1374, 449, 465, 474, 482, 493, 494, E: 559, 565, 580, 581, 586, 587, 588, 590), Ţugulea Eugen (1418, 432, 472, 482, 493, 494, 513, 524, 526, 532, E: 572, 597, 600, 603, 608); clasa X-a. Alexandrescu Sică (1443, 456, 460, 461, 462, 472, 473, 483, 486, 493, 494), Abagiu V. Dorel (1418, 429, 474, 475, 486, 494, 495, 496, 526, E: 597, 600, 604, 608), *Băeşu D.* (1372, 373, 374, 375, 377—384, 402—406, 408, 410, 411, 412, 413, 416, 418, 425, 429, 432, 433, 434, 436, 440, 441, 449, 456, 458—462, 464, E: 565, 570, 571, 574, 575, P), Drosu Petre (1372, 378, 383, 395, 434, 443, 449, 458, E: 559, 561, 563, 568, 569, 572, 574, 576, 580, 587, 588), Georgescu D. Ion (1372, 383, 390, 402, 403, 405, 535, 436, 449, 458, 460, 461, E: 554, 558, 559, 561, 563, 565, 566, 568, 571, 572, 574, 576, 578, 579, 580, 586, 587, 588, « Informaţii despre cercurile de matematică»), Godeanu A. Ion (1372, 374, 375, 377, 383, 403, 410, 412, 416, 441, 443, 449, 458, 464), Hereşamu A. Ion (1374, 375, 377, 381, 382, 383, 403, 483, 486, 493), Jitescu Gheorghe (1374, 375, 377, 378, 380, 409, 416, 434, 436, 437, 465), *Mateescu V. Ion* (1365, 366, 372—385, 389, 396, 397, 403—406, 409, 410, 412, 416, 418, 419, 427, 432, 433, 434, 436, 441—444, 449, 451, 453, 456, 458—462, 465, 467, 468, 472, 273, 474, 475, 476, 482—486, P), Marcu Constantin (1403, 406, 416, 434, 436, 441, 442, 443, 449, 453, 456, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 478, 479, E: 559, 563, 567, 568, 569, 571, 574), Patic Laurenţia (1372, 374, 375, 377, 382, 383, 403, 416, 434, 442, 449, 456, 458), Poajgă C. Constantin (1372, 375, 389 403, 410, 412, 416, 441, 449, E: 559, 580), Popescu D. Nicolae (1374, 375, 377, 436, 493, E: 565, 578, 586, 587, 588), Popescu Cornel (1372, 374, 375, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 403, 406, 409, 410, 416, 434, 436 441, 442, 449, 452, 458, 459, 464, 465), Popescu Paul (137, 7382, 384, 406, 410, 416, 434, 436, 441, 442, 449, 456, 459, 461, 462, 464, 465, 472, 473, 482, 483), Roşca Dumitru (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 403, 404, 405, E: 558, 559, 560, 561), Rogojinoiu Neiu (1372, 373, 375, 377, 379, 378, 381, 382, 383, 390, 403, 405, 409, 410, 411, 434, 436, 441, 442, 443, 449, 460, 461, 464, 474), Sandu M. Haralambie (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 383, 384, 402, 403, 405, 408, 409, 410, 412, 413, 416, 432, 434, 436, 441, 449, 458, 459, 460, 464), Stanca M. Ion (1372, 374, 375, 377, 383, 403, 410, 412, 416, 441, 449), Statie D. Mihai (1372, 373, 378, 449 472, 474, 475, 479, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 513, 516, 521, 523, 524, 527, 528, 531, 532, 533, E: 582, 584, 587, 588, 592, 593, 596, 597, 598, 599, 600, 602, 603, 604, 605, 606, 608, 609), Şerbana C. Ion (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 384, 390, 402, 403, 410, 432, 436, 441, 449, 456. 459, 475, 483, 486, E: 568, 578, 586, 588), *Tudor C. Gheorghe* (1358, 372, 373, 375, 378, 379, 382, 390, 392, 402, 403, 405, 409, 410, 413, 414, 416, 434, 436, 440, 441, 442, 449, 456, 458, 461, 462, 464, 465, 483, E: 563, 568, 571, 574, 576, 586, 587, 588, P), Tighe C. Mihai (1472, 475, 483, 486, 493, 494, E: 592, 596, 601, 603, 606, 608), Ţurcanu Nicolae (1372, 375, 377, 378, 379, 380—383, 403, 405, 406, 410, 416, 427, 434, 436, 441, 442, 443, 449, 456, 458, 460, 464, 465, E:559, 563, 567, 568, 574), *absolvent* Popescu R.T. (1372, 373, 385, 383, 403, 416, 427, 442, 449, 464, 458, E: 558).

REGHIN. *Antonescu Victor* (1472, 473, 474, 476—486, 493,—496, 508, 513—518, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 529, 531, 532, 533, 534, 536, 537, 538, 542, 543, 545, 546, 549, 550, 551, 553, 555, 558, 592, 594, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 607, 608).

REŞIŢA. Clasa VI-a *Garandt Valter* (E: 554, 557, 558, 559, 560, 563, 564, 565, 566, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 577, 578, 579, 581); clasa IX-a. Marchiş F. Ioan (1410, 416, 423, 426, 436, 449, 465, 475, 486, 493, 494, 495, 522, 524, 525, 526, 528, E: 564, 569, 571, 577, 578, 579, 581, 584, 586, 587, 588, 592, 593, 597, 598, 600, 601, 602, 603); clasa X-a. Velnicov Carmen (1410, 416, 423, 426, E: 563, 565, 568, 571, 574, 575), Weiss Adolf (1408, 409, 410, 411, 412, 418, 419, 423, 426, 432, 436, 434, 438).

RODNA (Năsăud ,Cluj). Domide Leontin (« Un scurt istoric al dezvoltării numerelor).

ROMAN. Şcoala medie tehnică de mecanizare agriculzurii, anul I. Pîrţac Anton 1431 432, E: 563, 566, 568, 571, 573, 574, 575, 580, 587, 588); anul IV. Leuştean Sorel (1372, 374, 373, 378, 380, 381, 403, 407, 457, 459, 461, 462, E: 553, 558, 560, 561, 576, 577, 579, 580, 586, 587, 588); clasa VIII-a. Zaharia Mihai (E: 553, 588, 559, 563, 565, 566, 568, 572, 581, 586); clasa IX-a. Şteinberg Marcel (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381 , 382, 383, 385, 386, 405, 407) .Vătămărelu Ieronim (1472, 475, 486, 516, 521, 527, E: 597, 600, 502, 608); clsa X-a. Juncu Gelu (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 386, 401, 409, 411, 412, 416, 436, 552, 462, 468, P), Stoica C. Constantin (1372, 373, 374, 377, 379, 380, 382, 383, 407, 408, 409, 410, 412, 413, 414, 416, 442, 444, 449, 458, 462, 468, 472, 473, 474, 475, 476, E: 552, 555, 558, 559, 561, 567, 568, 570, 575, 579, 580, 582, 588), Rugină Constantin (1372, 373—380, 383, 409, 411, 416, 436, 442, 449, 462, 468), Tarşanu Cătălin (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 386, 408, 409, 410, 411, 412, 416, 419, 436), *Ursoiu Vasile* (1372—383, 385, 390, 396, 406, 407, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 427, 428, 431, 432, 433, 434, 436, 440, 441, 44,2 444, 449, 457, 459, 460, 461, 462, 465, E: 563, 565, 567, 568, 569, 571, 574, 575).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa X-a. Leontin Aristide (1377, 378, 379, 380, 383, 413, 449, E: 558, 561).

SATU MARE. Clasa VIII-a. Matei Cornel (E: 558, 561, 568, 569, 571, 574, 575, 580, 586, 587, 588); clasa IX-a. Benea A. Cornel (1374, 375, 377, 378, 382, 383, 385, 409, 423, 436, E: 552, 556, 559, 561, 563, 568, 569, 571, 574, 575, 576, 577, 578, 579); clasa XI-a. Benea Mihai (1374, 377, 380, 383, 436, 449, 460, 472, E: 559, 574, 578), Lipovan Ştefan (1513, 522, 528, 534, 646, E: 576, 578, 579; 1372, 373, 379, 380, 382, 416, 436, 440, 441, 460, 472, 483, 501), Sălăgeanu Octavian (1436, 441, 442, 449, 459, 460, 461, 462, 472, 485).

SFT. GHEORGHE. Şcoala medie textile, anul III. Zaharia Gheorghe (1403, 442, 449, E: 559, 574, 578, 586, 587, 588).

SIBIU. Grupul şcolar tehnic agricol, anul II. Connerth Liana (1460, 475, 477, 480, 488, 499, 511, E: 584, 586, 587, 588); şcoala medie tehnică de mecanică, anul I. Aleman Nicolae (E: 563, 567, 568, 571, 572, 574, 580, 581, 588, 597, 608), Măerean Mirceà (E: 563, 568, 571, 574, 580, 592, 600, 602, 603, 606, 608), Rădulescu Petre (E: 563, 568, 571, 574, 578, 580, 592, 597,599, 600, 603, 606, 608), Săvulescu Vasile (E: 568, 571, 574, 580, 581, 584, 586, 592, 593, 602, 605, 608), Tudor Ioan (E: 563, 568, 571, 574, 580, 581, 586, 588, 592, 597, 600, 602, 605, 606, 608); anul II. Brăguş D. Const. (1416, E: 558, 563, 567, 568, 571, 572, 578, 586, 587, 588), Drăgan Mircea (1493, 494, 495, E: 563, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 586, 601, 608, 609), Negrescu Toma (E: 558, 563, 567, 568, 571, 572, 574, 578, 586, 587, 588); U.M. — Alexandrescu Gh. (1381, 389, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 418, 419, 423, 424, 425, 436, 442, 443, 449, 453, 456, 457, 459, 460, 461, 462, 465, 467, 468), Steinberg Victor (1412, 431, 432, 433, 436 440, E: 563, 564, 565, 566, 567, 568, 570, 571, 572, 573, 574, 575), Schuler Oscar (1412, 413, 415, 416, 432, 436, 440, E: 563, 564, 565, 566, 567, 568, 571, 572, 573), Bârsan Ion (1416, 453, 465, 472, 473, 474, 475, 479, 480, 482, 483, 493, 494, 499, 526, 528, 532, 545), Coruţ Teodor (1416, E: 563, 567, 568, 571, 572, 574, 578, 580, 586, 587, 588), Sandi D. (1409, 410, 411, 416, 436, 451, 475, 482, 483, 486), absolvent U.M. *Alexe Ion* (1392, 409, 411, 412, 413, 416, 418, 419, 423, 524, 426, 536, 442, 443, 449, 453, 454, 456, 457, 459, 461, 462, 465, 466, 467, 469, 470, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 488, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 498, 499, P), *Pupăzan Nicolae* (1407, 426, 437, 442, 443, 446, 449, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 488, 489, 490, 491, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, P), Toth Ştefan (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 384, 385, 392, 397, 401, 403, 407); Şcoala medie de fete, clasa X-a. Dimitriu Cireşica (1472, 475, 482, 486, 1513, 516, 521, 530, 531, 532), Dănescu Agnes (412, 413, 416, 436, 437, 449, 465, 472, 475, 479, 481, 482, 486, 493, 516, 521, 529, 531, E: 581, 582, 587, 588, 601), Raluca Miga (1410, 411, 412, 436, 473, 476, 482, 483, 486), Simoiu Lilica (1513, 514, 516, 521, 523, 526, 527, 531, 532, E: 581), Spiridon Steliana (1472, 474, 478, 481, 484, 485, 486, 496, 521); Şcoala medie de băieţi, clasa X-a. Dicoiu T. Ovidiu (1361, 372, 373, 374, 375, 376, 378, 379, 377, 382), Petrescu Cornel (1410, 411, 418, 423, 424, 434, 439, 441, 442, 443, 449, 456, 460, 464, 465, 472, 473, 474, 477, 478, 480, 481, 482, 485), Schlesingher Toma (1383, 404, 423, 439, 453, 472, 474, 476, 478, 479, 482, 528), Zimmermann Nicolae (1462, E: 576, 577, 578, 579, 580, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, P).

SIGHIŞOARA. Liceul mixt german, clasa X-a. Ute M. Roth (1472, 473, 474, 476, 479, 480, 482, 483, 485, 486, 489, 490, 497, 498, 534).

SLATINA. Clasa IX-a. Bărbulescu Marcel (1409, 410, 412, 416, 436, 449, 451, 472, 475, 486, 496, E: 580), Guran Virgil (1472, 475, 476, 482, 483, 486, 493, 516, 526, 527, 528, 532), Dicu N. Constantin (1426, 427, 432, 436, 449, 452, E: 563, 567, 568, 569, 572, 574), Dima I. Virgil (1372, 374, 378, 379, 416, 434 436, 442, 465, ξ: 558, 559, 561, 568, 569, 574, 584, 587, 588), Bratu Gh. Sever (1372, 373, 374, 375, 377, 379, 382, 383, 386, 412, 416, 418, 436, 449, 472, 475, 520, 524, 526, 528, 529, 532, E: 559, 565, 569, 592, 599, 600), *Graure I. Gheorghe* (1392, 395, 396, 403—413, 415, 416, 418, 419, 321, 423, 424, 426, 427, 436, 439, 440, 442, 443, 449, 452, 453, 454, 456, 459—499, 504, 508, 509, 510, 511), Nițu I. Marian (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 382, 383, 386, 403, 404, 411, 416, 434, 436, 437, 441, 442, 458, 565, E: 553, 558, 559, 560, 569, 572), Ionescu Alexandru (1372, 378, 416, 434, 436, E: 558, 559, 561, 569, 574, 580, 584, 586, 587, 588), Obrocea Paul 1372, 374, 376, 379, 383, 411, 416, 437, 442, 465, E: 563, 568, 569, 571, 574, 580, 584, 586, 587, 588), Moraru I. Petre (1372, 374, 378, 379, 383, 411, 416, 432, 434, 436, 442, 465, E: 558, 559, 561), Moraru Gheorghe (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 383, 386, 403, 404, 411, 416, 434, 436, 442, 465), Șerbănescu N. Tiberiu (1408, 467, 474, 524, 526, 529, 532, 558, E: 597), Stănescu Marin (1372, 374, 375, 377, 378, 379, 383, 384, 386, 403, 404, 410, 411, 412, 415, 416, 434, 436, 437, 449, 465, 472, 486), Tilea Traian (1373, 379, 383, 409, 436, E: 568, 569, 571, 586, 587); clasa X-a, *Antonescu Păun* (1374, 385, 386, 389, 396, 404, 411, 441, 472, 473, 474, 475, 476, 479, 482, 485, 486, 489, 493, 495, 498, 499, 516, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 534, P), Burete C. Dumitru (1416, 436, 449, 472, 486, 494, 526, 532, E: 563, 568, 571, 574, 587, 608), Bușcu P. Constantin (E: 505, 526, 554, 555, 557, 559, 561, 563, 568, 571, 574, 576, 578, 579, 586, 587, 588, P), Dumitrescu I. Ilie (1472, 473, 474, 475, 481, 482, 483, 486, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533), Cîntea Alexandru (1472, 481, 486, 493, 516, 522, 526, 528, 532, 553, E: 592, 600, 602, 606, 607, 608), Gherga N. Ion (1438, 446, 453, 464, 473, 474, 482, 498, 499, 513, 516, 517, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 536, 549, E: 595), Matache I. Marin (1377, 412, 449, 472, E: 534, 563, 568, 574, 591, 592, 608), *Gălbenuș Eugeniu* (1372, 374, 375, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 386, 392, 409, 410, 411, 416, 432, 436, 439, 441, 442, 443, 449, 451, 458, 472, 474, 478, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 495, 499, 525, P), Pavel P. Ion (1472, 482, 483, 485, 490, 498, 499, E: 586, 587, 588), Vaică I. Florea (1416, 436, 442, 449, 472, 483, 486, 520, 522, 526, 529, 531, 532, 533, 546, E: 570, 578, 606, P).

SUCEAVA. Clasa IX-a. Creoleanu Nicolae (1372, 375, 385, 392, 403, 404, 405, 416, 424, 426, 436, 439, 449, 453, 458, 462, 464, 465, 467, E: 558, 559, 563, 568, 569, 571, 574, 575, 580, 586, 587, 588); clasa X-a. *Boghian Dragoș* (1384, 385, 392, 410, 413, 426, 439, 441, 442, 444, 449, 451, 453, 458, 460, 461, 464, 465, 467, 468, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 494, 495, 498, 499, 504), Măierean Nicolae (1372, 373, 374, 376, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 385, 403, 405, 409, 410, 411, 416, 436, 441, 442, 443, 456, 468), *Moroșan Dumitru* (1372, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 385, 40 3, 405, 416, 436, 442, 443, 449, 451, 453, 458, 460, 464, 465, 467, 472, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 486, 498, 499), *Rotaru Constantin* (1370, 385, 392, 405, 410, 413, 417, 423, 426, 439, 441—444, 449, 451, 453—456, 458, 460—465, 467, 468, 470, 472—487, 493, 494, 495, 497, 498, 499, 504, 506, 511, 513, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 524, 526—529, 532, 536, 540, 550, 558, E: 551, 552, 553, 556, 560, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574,—578, 581, 586—588, 590, 592, 593, 595—603, 605, 607, 608, 609, P).

TIRGOVIȘTE. Brezeanu F. (1460, E: 563, 566, 569, 574, 576, 577, 586, 587, 588); clasa IX-a. Cărbunaru M. Constantin (1516, 524, 526, 528, 532, 540, E: 578, 592, 597, 660), *Stănciulescu Mihail* (1375, 406, 413, 416, 428, 432, 437, 438, 439, 440, 443, 444, 449, 453, 458, 461, 462, 473, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 481, 484, 485, 490, 493, 494, 495, 496, 497, 499, 504, 508, 510, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 527, 530, 531, 532, 5534, 536, 545, 546, 547, 553); clasa X-a. *Galațky George* (1441, 442, 443, 447, 449, 451, 453, 460, 461, 464, 467, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 508, 509, 511), Ianculescu Mir ea (1449, 472, 475, 478, 480, 482, 483, 484, 486, 522, 524, 526, 528, 532, 549, 555), Parnia Letiția (1409, 410, 416, 436, 441, 471, 472, 474, 475, 478, 479, 481, 482, 483, 486, 489, E: 568, 574, 578), Stoian I. Gheorghe (1392, 408, 409, 411, 413, 414, 416, 421, 423, 425, 436, 441, 442, 443, 449, 453, 454, 455, 458, 460, 464, 472, 476, 478, 480, 482, 484, 486).

TIRGU — JIU. Clasa VI-a *Velicescu Mircea* (E: 555, 556, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 566, 567, 568, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 580, 581, 582, 583, 584); Clasa IX-a, Amzulescu Liana (1409, 449, 474, 475, 478, 484, 486, 516, 518, 525, 526, 527, 528, 529, 532. E: 580 586, 592); Clasa X-a. Dalidis, Dumitru (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 404, 416, 436, 449, 465, 472, 475, 483, 486), Floroiu Gabriel (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 388, 389, 392, 395, 403, 407), Cruceru Gh. Gheorghe (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383).

TIRGU— OCNA. Clasa IX-a. Sasu E. Dorin (1416, 434, 436, 437, 443, 449, 520, 527, 543, E: 563, 569, 571, 574, 575, 576, 587, 588, 603); clasa X-a. Gheţu Ioan (1373, 374, 375, 379, 380, 382, 383, 403, 413, 416, 436, 449, 472, 474, E: 558, 559), *Ghinea Constanţa* (1374, 375, 378, 377, 383, 409, 410, 413, 416, 434, 436, 472, 474, 476, 479, 483, 487, 522, 523, 526, 527, 528, 531, 532, 533, E: 559, 563, 668, 569, 571, 572, 574, 575, 586, 587, 588, 601, 606, 608).

TIRGU MUREŞ. Clasa VIII-a. Neagoe Toma (E: 563, 564, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 586, 587, 588); clasa IX-a. Babă Ştefan (1449, 474, 475, 486, 492, 520, 522, 526, 528, 529, 532, 578, 579, 586, 587, 588, 595, 597, 600, 601, 602, 603), Hegedus Attila (1408—411, 413, 415, 416, 427, 436, 442, 449, 455, 465, 472, 474—477, 481, 483, 485, 486, 493, 494, 496, 498), Hoţa Marcel (1408, 414, 416, 436, 449, 460, 472, 474, 475, 478, 479, 484, 486, 492, 494, 495, 502, 531, 532, E: 563, 567, 568, 571, 572, 574, 577, 581, 582, 584, 586, 587, 588), *Matic Corneliu* (1372, 374, 375, 377, 378, 380, 381, 383, 384, 385, 402, 403, 410, 412, 415, 416, 418, 423, 434, 436, 437, 443, 449, 458, 460, 464, 465, 467, E: 563, 564, 565, 568, 569, 571, 574, 575, 578, 586, 587, 588), Moga Ioan (E: 558, 559, 560, 561, 562, 563, 568, 569, 571, 574, 575), Murar Gheorghe (1464, 475, 486, 520, 522, 525, 526, 532, E: 586, 587, 588, 597, 600, 602, 605, 607, 608), *Matei Aurel* (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 392, 396, 3 7, 402, 403, 408, 409, 410, 411, 412, 416, 436, E: 558, 559, 560, 561, 563, 564, 565, 567, 5 8, 569, 571, 572, 574, 575), Matei Ioan (1372, 375, 376, 377, 378, 379, 408, 409, 410, 411, 412, 414, 416, 423, 437, 481, 582, 483, 484, 485), Nicolescu Claudiu (1410, 412, 415, 416, 418, 423, 431, 432, 434, 436, 443, 449, 458, 460 464, 465, 467, E: 563, 564, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 578, 586, 587, 588); clasa X-a. Cătărig Alexandru (1372, 373, 374, 377, 378, 379, 382, 383, 416, 436, E: 559, 561, 563, 568, 574, 578), Dalacov Victor (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 408, 409, 410, 411, 412,413, 416), Manole Nicolae (E: 554, 558, 563, 565, 567, 568, 5 9, 571, 572, 574), Muji A. Ştefan (1372, 374, 378, 379, 383, 416, 436, E: 561, 563, 574, 578).

TIRGU NEAMŢ. Clasa IX-a. Focşeneanu I. Ioan (1409, 410, 412, 413, 422, 429, 431, 432, 433, 434, 436, 440, E: 570).

TECUCI. Clasa IX-a. Neruja Ioan (1408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 418, 426, 436), Panaite Corneliu (1416, 436, 449, E: 558, 559, 561, 563, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 580, 584), Ionel Stan (1526, 532, E: 565, 567, 574, 592, 597, 600, 601, 608), Ilea Valeriu (E: 516, 526, 527, 532, 540, 563, 568, 574, 571, 578, 608), Goldstein Alexandru (1524, 525, 526, 527, 528, 532, 540, E: 563, 592, 597, 600, 603, 607, 608), Niţă Fănică (1424, 431, 432, 433, 434, 436, 449, 472, 483, 526, 527, 528, 532, 540, E: 559, 563, 567, 568, 571, 578, 587, 588, 592); Clasa X-a. *Alter Moisă* (1380, 382, 385, 386, 404, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 423, 424, 426, 431, 440, 443, 449, 451, 453, 556, 467, 471, 472, 474, 475, 476, 482, 483, 485, 486, 493), Grecu P. Eugen (1372, 375, 380, 383, 392, 403, 409, 410, 411, 416, 434, 436, 442, 443, 449, 472, 478, 481, 482, 484, 486, 493, 494, E: 558, 559, 560, 561, 563, 568, 569, 574, 575), Munteanu A. Constantin (1380, 386, 403, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 418, 419, 424, 431, 432, 433, 434, 436, 441, 442, 449, E: 558, 559, 563, 568, 569, 574), Lungeanu Vladimir (1372, 374, 375, 377, 380, 382, 383, 385, 392, 402, 407, 408, 409), Lazăr Gheorghe (1411, 424, 432, 458, E: 554, 555, 557, 561, 563, 567, 571, 572, 574, P), *Negoescu Emil* (1380, 382, 385, 386, 404, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 423, 426, 431, 432, 440, 449, 451, 453, 456, 467, 472, 474, 475, 476, 482, 483, 485, 486, 493), Luca Dona (1515, 521, 522, 526, 527, 528, 552, E: 574, 600, 608), Marin Ştefan (1373, 374, 375, 376, 380, 383, 392, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 426, 431, 432, 436, 440), Matei Mihail (1472, 474, 475, 476, 486, 516, 522, 524, 526, 527, 528, 532, E: 592, 597, 598, 600, 602), Purcaru I. Gheorghe (1408, 410, 411, 413, 416, 422, 424, 436, 443, 449, E: 565), Rotaru Săvel (1449, 416, 472, 474, 475, 476, 483, 486, 522, 526, 527, 529, 531, 432, 434, 555, E: 567, 578, 581, 586, 587, 592, 606, 607, 608,), Teleman Felician (1376, 379, 382, 409, 410, 411, 440, 441, 442, 449, 461, 472, 473, 475, 479, 480, 481, 493, 522, 524, 527, 528, 529, 532, 533, 539).

TIMIŞOARA. *Student, Işfan S. Cornel* (1472, 473, 474, 475, 476, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 487, 493, 494, 495, 499, 501, 511, 513, 516, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 534, 536, 537, 540, 542, 546, 555, E: 592, 593, 596, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608); *Şcoala medie nr. 1* Clasa VII-a. Coşereanu Radu (E: 560, 561, 562, 563, 568, 571, 574, 575, 577, 581, 584, 590); clasa VIII-a. Mihăileanu N. Constantin (1408, 524, E: 565, 569, 575, 588, 592, 602, 607, 608); clasa IX-a. Bărglăzan Mircea (1472, 474, 475, 478, 482, 483, 486, 493, 496, 497, 499), Arsenovici Tiberiu (1372, 373, 374, 375, 377, 378, 380, 382, 385, 389, 409, 411, 416, 423, 432, 436, 437, E: 552, 553, 554, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575), Popa Laurenţiu (1373, 376, 382, 385, 410, 415, 416, 436, 440, 442, 443, 449, 455); clasa X-a. Braia Ivan (1376, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 391, 392, 472, 473, 474, 475, 483), Negoiţescu Stelian (1410, 413, 416, 441, 442, 443, 472, 473, 474, 475, 479, 481, 485, 486, 491, 493, 513, 515, 521, 522, 526, 532); Şcoala medie nr. 3 de fete, clasa IX-a.

Cismariu Ionica (1409, 413, 416, 475, 496, 515, 521, E: 576. 577, 597, 608); *Şcoala medie nr. 5*, clasa IX-a. Nerodea Tiberiu (1416, 436, 449, 527, E: 576, 577, 580, 581, 582, 587, 588), Soşdean Doina (E: 592, 597, 598, 599, 600, 501, 502, 603, 604, 605), Vasilievici Alexandru (1436, 449, 493, 526, E: 567, 572, 576, 577, 597, 599); clasa X-a. Podnia Ioan (1408, 409, 410, 413, 416, 436, 437, E: 563, 567, 574), Szekeres Anton (1372, 375, 378, 379, E: 558, 559, 561, 576, 577, 597); *Şcoala medie nr. 6*, clasa IX-a. Bărbulescu Iulian (1449, E: 562, 563, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 586, 587, 588). Şcoala pedagogică de învăţători, anul III. Siegmeth Richard (E: 567, 569, 571, 572, 574, 575, 578, 580, 601, 608). *Şcoala medie tehnică de construcţii*, anul II. Carol Leon (1442, 449, 472, 475, 481, 482, 483, 486, 494, 495, 498, 499, E: 575, 578, 581, 584, 586, 587, 588, P).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII-a. Bozdog Marin (E: 560, 578, 580, 584, 587, 588, 592, 593, 595, 600, 601, 603, 608), Cojocaru Napoleon (1418, 419, 449, 460, E: 563, 565, 569, 574, 578, 587, 588), Panaitescu Valeriu (1460, E: 588, 559, 560, 561, 563, 568, 569, 571, 574, 580, 586, 587, 588), Sălcianu Tudor (E: 565, 587, 588, 592, 593, 601, 602, 603, 608, 609); clasa IX-a. Niculescu M. Iulian (1474, 475, 482, 486, 493, 494, 516, 520, 522, 523, 526, 526, 527, 528, 532, 540, 545, 546, 547, E: 592, 593, 594, 596, 597, 600, 601, 602, 603, 606, 607, 608); clasa X-a. Constantin Maria (1372, 422, 474, 475, 481, 482, 483, 486, E: 527, 528), Stoenescu P. Iulian (1471, 472, 474, 475, 476, 482, 515, 516, 521, 522, 524, 524, 527, 529, 531, 532, 533, 534, 540, 541), *absolventă* Dragomirescu Elena (1449, 460, 513, 515, 520, 521, 524, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, E: 592, 607).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. *Ionescu Radu* (1373, 392, 426, 474, 475, 478, 483, 486, 492, 494, 513, 516, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 532, 536, 539, 540, 542, E: 564, 565, 570, 576, 578, 579, 592, 594, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608, P); clasa X-a. *Buţă D. Titus* (1375, 376, 379, 383, 385, 409, 410, 411, 416, 423, 436, 437, 441, 442, 443, 449, 456, 460, 461, 465, 468, 470, 472, 473, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 489, 494, 495, 499, 510, 511, 512, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 536, 545, 547, 554, 555, 563, 572, E: 558, 561, 563, 567, 572, 574, 575, 578, 579, 582, 583, 586, 587, 588, 592, 593, 596, 598, 600, 602, 606, 607, 608), David Dumitru (1409 411, 416, 436, 437, 442, 449, 459, 460, 461, 463, 472, 474, 475, 480, 481, 485, 486, 495, 498, 513, 515, 524, 548, E: 563, 568, 571, 574, 577, 578, 586, 587, 588, 597, 608), Dragotoniu B. Dorin (1372, 375, 442, 449, 472, 474, 475, 483, 486, 495), *Strungaru Crişan* (1376, 379, 382, 385, 441, 442, 449, 465, 470, 472, 473, 474 ,475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 495, 499, E: 579, 592, 593, 594, 596, 597, 600, 501, 502, 603, 604, 606, 608, 607), *Tudosie Constantin* (1372, 373, 376, 380, 385, 434, 440, 441, 442, 443, 449, 455, 458, 459, 460, 461, 468, 470, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 489, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 506, 513, 515, 516, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 534, 536, 539, 540, 541, E: 559, 560, 561, 578, 580, 582, 586, 587, 588), Picior C. Dumitru (1442, 449, 465, 472, 475, 480, 481, 483, 486, E: 578, 579), *Vladu Viorel* (1372, 375, 376, 379, 383, 385, 416, 423, 434, 441, 442, 443, 449, 453, 459, 460, 461, 465, 472, 473, 474, 475, 479, 480, 482, 486, 489, 494, E: 558, 561, 565, 569, 574, 577, 578, 579, 582, 583, 584, 586, 587, 588).

TULCEA. Clasa X-a. Crîlov Eugen (1373, 341, 436, 442, 449, 457, 459, 461, 462, 472, 474, 475, 483, 502, 506, 513, 516, 520, 523, 524, 526, 532, 536, 570, 571, P), Beche Vasile (1409, 410, 416, 436, 441, 442, 449, 472, 474, 475, 478, 483, 436, 493,) Matei Petru (1372, 376, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 416, 436, 442).

URLAŢI (Reg. Ploieşti). Clasa VIII-a. Iancu V. Vasile (E: 567, 569, 582, 583, 586, 591, 592, 599, 602, 603); clasa IX-a. Iorgulescu Alexandru (1416, 432, 436, 449, 460, 465, 467, 475, 481, 486, 493, 494, 495, 516, 522, 524, 526, 528, 529, 532, 558, E: 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 581, 586, 587, 592, 601, 608).

VASLUI. Clasa VII-a. Barbu Viorel (E: 576, 578, 580, 592, 596, 599, 601, 502, 603, 606, 608, P), Stănescu Viorica (E: 497, 505, 526, 531, 547, 563, 564, 568, 574, 487, 588). *Comuna Laza*. Floareş Alexandru (1442, 457, 459, 460, 461, 462, 486, 493, 516, 523, E: 571, 576, 577, 578, 580, 582, 583, 586, 587, 588); clasa X-a. Lupu D. Dumitru (1513, 516, 517, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 534, 548, E: 592, 595, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 605, 607, 608), *Stănescu I. Viorel* (1346, 347, 348, 349, 353, 354, 356, 358, 360, 361, 362, 363, 365, 368, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 385, 390, 392, 407).

ZALĂU. Clasa VIII-a. Mastan I. Ioan (1460, E: 559, 560, 561, 576, 577, 578, 579, 580, 586, 587, 588), Moroti Cornel (1372, 374, 376, 378, 403, 496, E: 559, 560, 576, 579, 580, 581, 585, 586, 587, 588, 592, 593, 597, 598, 600, 602, 603, 607, 608); clasa IX-a. Farcaş Beniamin (1374, 475, 478, 484, 486, 493, 494, 496, 509, E: 581); clasa X-a. Roman Vasile (1465, 472, 473, 474, 475, 479, 482, 483, 486, 483, 494, 495, 516, 518, 520, 521, 523, 531.).

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multe probleme pe aceiași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— *Se primesc soluții numai* la problemele și exercițiile din ultimile *patru* numere apărute.

— Rezolvitorii pot trimite *într-un singur plic*, francat după greutate, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului* 1955, *se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul* 1955.

— *Pentru anul* 1955, *G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX- a și a X-a sau de către studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic decît zece, sau necorect redactate.

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *În redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții au fost scrise îngrijit și sînt bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante sub formă de note.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a « Olimpiadei matematice și fizice »*, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a presei București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat să *facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Cititorii și colaboratori revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care doresc să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15-18, miercuri între orele 10-13 și sîmbătă între orele 15-18 la sediul redacției din strada Academiei 14, București — Telefon 4.46.53

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominskhi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi de* **A O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Saeter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **. S. Şklovski** (lei 6,85)
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu** (lei 6,55).
15. *Soarele şi observarea lui* de **V. V. Şaronov** (lei 7,10)

• • •

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII. TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI TEHNICIENI, ELEVI LEI 5, PENTRU ŞASE NUMERE.

C. 880 — Întreprinderea Poligrafică nr. 4

Preţul **Lei 1** exemplarul

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
CMEHA - CSERE
WYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

NUMĂR FESTIV
la aniversarea a 60 de ani de la înfiinţarea „Gazetei Matematice"

Anul VI — Septembrie 1955

9

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 9 — septembrie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*60 ani de la înfiinţarea «Gazetei Matematice», de Constantin Ionescu-Bujor*	389
2.	*Amintiri din trecutul «Gazetei Matematice» de O. N. Ţino*	397
3.	*Articole şi probleme rezolvate din «Gazeta Matematică» 1895—1896 şi alţi ani*	400
4.	*Despre tetraedru, de Mihai I. Popescu*	411
5.	*Montaj pentru demonstrarea proprietăţilor tuburilor electronice, de Laszlo Tihomir*	419
6.	*Probleme rezolvate (E: 587; E: 588; E: 620; 1395,1396)*	421
7.	*Probleme propuse (1804—1828)*	425
8.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 693—E: 707)*	427
9.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	428
10.	*Olimpiada de matematică şi fizică 1955—1956*	436

ANUL VI 9 SEPTEMBRIE

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Mérzeti Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 9 Septembrie 1955

60 ANI DE LA ÎNFIINŢAREA GAZETEI MATEMATICE

CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

profesor universitar

Director General în Ministerul Învăţămîntului

SARCINA principală a şcolii în Republica Populară Romînă este să formeze cadre de tehnicieni calificaţi precum şi oameni de ştiinţă, pregătindu-i astfel încît să contribuie la dezvoltarea economiei patriei şi la progresul ştiinţei activînd cu toată capacitatea lor creatoare la construirea socialismului. Patria noastră are nevoie de ingineri şi tehnicieni care să-i valorifice din plin bogăţiile naturale, aplicînd metodele cele mai avansate de producţie, care să perfecţioneze aceste metode, să elaboreze metode noi şi să construiască maşini noi. In acelaşi timp ne sînt necesari oameni de ştiinţă, care prin cercetările lor să contribuie la descoperirea legilor naturii, să le formuleze, să închege explicarea teoretică a fenomenelor, să deducă şi să concretizeze aplicaţiile practice ale ştiinţei, să pună ştiinţa în serviciul poporului.

De aceea, şcoala noastră pune un accent deosebit pe studiul ştiinţelor naturii, adică pe studiul Fizicii, Chimiei, Matematicii, Botanicii, Zoologiei, etc., avînd drept fundament filozofia materialismului dialectic.

Partidul Muncitoresc Romîn şi Guvernul R.P.R., acordă un sprijin larg dezvoltării institutelor de cercetări ştiinţifice şi tehnice, desfăşurării activităţii ştiinţifice în instituţiile de învăţămînt superior, precum şi creerii celor mai bune condiţii de studiu în şcoli, universităţi şi institute tehnice superioare ; fonduri însemnate sînt alocate pentru înfiinţarea şi înzestrarea unor laboratoare şi ateliere moderne, pentru activitatea pe terenurile experimentale.

Un ajutor preţios îl constituie pentru noi folosirea realizărilor ştiinţei şi tehnicii sovietice, adică a ştiinţei şi tehnicii celei mai înaintate din lume, precum şi a experienţei de învăţămînt a şcolii sovietice.

In marele număr de creaţii ale regimului nostru democrat popular menite să promoveze ştiinţa, să servească perfecţionării cadrelor didactice, să contribuie la formarea dragostei şi pasiunii de lucru a tineretului în diferitele ramuri ale ştiinţei şi tehnicii, se înscrie şi Societatea de Matematică şi Fizică.

Vom înţelege însemnătatea Societăţii de Matematică şi Fizică, dacă ne gîndim la locul important pe care îl au în ştiinţa şi tehnica modernă fizica şi matematica.

Fizica este una dintre ştiinţele fundamentale ale cunoaşterii legilor naturii. Progresele extraordinare ale tehnicii moderne au la bază un vast material de cunoştinţe din domeniul fizicii. Oamenii de ştiinţă din lumea întregă au elaborat, prin studiul atomilor şi nucleelor lor, unul dintre cele mai importante capitole ale fizicii, fizica atomică sau nucleară. Aplicarea în tehnică, medicină, biologie a cunoştinţelor obţinute în fizica atomică de către savanţii sovietici, extinderea

cîmpului acestor aplicări, au consecințele cele mai importante pentru ridicarea nivelului de trai material și cultural al popoarelor sovietice.

Cu dragoste frățească, Uniunea Sovietică acordă țării noastre și celorlalte democrații populare ajutor științific și tehnic pentru organizarea cercetărilor în domeniul fizicii atomice.

Imaginația noastră nici nu poate cuprinde imensele posibilități de progres ce sînt deschise omenirii prin folosirea în scopuri pașnice a energiei atomice.

In studiul naturii, în formularea legilor ei, în construirea teoriilor care generalizează observațiile și experiențele științifice, în elaborarea tehnicii prin care omul supune forțele naturii în folosul său, matematica are un rol important. Ea constituie un mijloc de formulare concentrată a teoriei și a aplicațiilor ei practice în numeroase ramuri ale științei și tehnicii : mecanica corpurilor solide, mecanica fluidelor, termodinamica, electrotehnica, fizica atomică, optica, calculul mașinilor, calculul construcțiilor, al podurilor, drumurilor etc. De aceea, cercetătorii științifici în aceste domenii, precum și inginerii au nevoie de o bună pregătire în matematică.

Importanța care s-a acordat atît studiului fizicii, cît și aceluia al matematicii în școala statului nostru democrat popular s-a reflectat clar în locul pe care — după reforma învățămîntului din 1948 *— aceste două obiecte l-au ocupat în planurile de învățămînt ale școlilor de orice grad, în grija ca ele să aibă un conținut cu adevărat științific, în numeroasele metode și forme prin care s-a căutat a se trezi la elevi interesul pentru fizică și matematică și a li se forma deprinderi de muncă independentă în aceste domenii.*

Printre mijloacele pe care statul nostru democrat popular le pune la îndemîna tineretului studios pentru însușirea cît mai temeinică și cît mai largă a cunoștințelor de matematică și fizică se numără publicarea « Gazetei Matematice și Fizice », ca organ al Societății de Matematică și Fizică.

Contigente tot mai mari de elevi citesc « Gazeta », rezolvă probleme propuse, propun ei înșiși probleme. Elevii corespondenți ai « Gazetei Matematice și Fizice » se numără printre fruntașii examenelor de admitere la institutele tehnice superioare și la facultățile de matematică și fizică. Aceste fapte arată că grija statului nostru democrat popular de a se publica o revistă de matematică și fizică pentru tineret răspunde unei nevoi reale.

« Gazeta Matematică și Fizică » împlinește în acest an 60 ani de apariție continuă. Ea este una dintre cele mai vechi reviste științifice românești cu o durată atît de lungă de apariție. De aceea, a 60-a aniversare a ei trebuie considerată ca un important eveniment al culturii noastre. Timp de 54 de ani, publicația de care ne ocupăm a fost intitulată « Gazeta Matematică » și în ea s-au publicat în special materiale din domeniul matematicii. Problemele de fizică ocupau un loc neînsemnat în paginile « Gazetei Matematice ». Din iunie 1949, revista își lărgește cîmpul preocupărilor, publică în egală măsură material de matematică și fizică și apare în două serii : o serie cu titlul « Gazeta Matematică și Fizică » adresîndu-se profesorilor de matematică și studenților, o altă serie, cu titlul Revista Matematică și Fizică pentru elevii din școlile medii. Din mai 1954 ambele serii poartă numele « Gazeta Matematică și Fizică » (seria A și seria B).

Dacă în prezent însă statul acordă un sprijin însemnat, « Gazetei Matematice și Fizice », prin subvențiile anuale, prin îndrumarea justă a conținutului, prin asigurarea condițiilor bune de imprimare, nu la fel a fost situația « Gazetei Matematice » în Romînia burghezo-moșierească.

Apariția primului număr al « Gazetei Matematice », la 15 septembrie 1895 nu este opera vreunui organ de stat al regimului burghezo-moșieresc, ci a unui

grup de cinci tineri ingineri care se interesau de matematici și care — cu ocazia concursului de intrare în anul I al Școlii de Poduri și Șosele din București, în toamna anului 1894, constataseră o slabă pregătire matematică a candidaților. Acești ingineri erau : Ion Ionescu, Vasile Cristescu, Victor Balaban, Mihail Roco *și* Ion Zottu.

GAZETA MATEMATICA

ANUL I.

INTRODUCERE.

Scopul acestei reviste este : 1) Publicarea de articole originale de matematici. 2) Desvoltarea gustului pentru studiul acestei științe și al cercetărilor originale.

Materiile ce vom trata în corpul revistei, vor fi pe cît posibil originale. Vom reproduce însă și articolele apărute în alte reviste, cînd acestea ar prezinta un interes deosebit. Chestiele ce vom trata, se vor referi în cea mai mare parte la matematicele elementare ; totuși vom da preferință articolelor originale, chiar cînd ele n'ar trata despre matematici elementare.

In afară de articolele originale, în fie-care număr vom propune un număr oare care de probleme și vom publica soluțiele ce ni se vor trimete. La aceste probleme fie care își poate încerca sagacitatea. Rezolvirea problemelor este unul din cele mai bune stimulente pentru a atrage pe cine-va către studiul matematicilor. Experiența noastra personala ne probează lucrul acesta. Mai mulți dintre noi datoresc acest gust revistei „Recreșt'i Științifice„ ce a aparut în timp de 6 ani la Iași și pe care noi ne-incercam a o continua.

Acestea fiind motivele pentru care neam hotărît sa începem publicarea acestei reviste, credem că nu vom lipsi de a fi încurajați și ajutați de toate persoanele care vor avea aceleași sentimente ca noi.

Redacția.

(Prima pagină din nr. 1 al « Gazetei Matematice », apărută la 15 septembrie 1895).

Ei au ajuns la concluzia că una dintre cauzele lipsurilor în cunoștințele de matematici ale absolvenților liceelor era lipsa de interes pentru matematici și au hotărît publicarea unei reviste de matematici, cu scopul de a cultiva la elevi preocuparea pentru această ramură a științei. Această revistă a fost, « Gazeta Matematică ». Cei cinci ingineri împreună cu alți tineri, pe care i-au cîștigat pentru colaborare la publicarea « Gazetei Matematice », au contribuit cu bani, cu muncă, asigurînd apariția lunară a revistei. Un sprijin prețios au dat profesorul Gh. Țițeica *și inginerul* A. G. Ioachimescu. *Obiectivele Gazetei Matematice sînt formulate în introducerea publicată în nr. 1 vol. 1 astfel :*

1. Publicarea de articole originale de matematici, 2. Dezvoltarea gustului pentru studiul acestei științe și pentru cercetările originale. Inițiatorii își propun să trateze chestiuni, care în cea mai mare parte să se refere la matematicile elementare, cu mențiunea că vor da preferință articolelor originale, chiar cînd ele n-ar trata despre matematici elementare.

De la început « Gazeta Matematică » a avut de învins greutăți mari. Ele izvorau din lipsa de interes pe care regimul burghezo-moșieresc o manifesta pentru ridicarea materială și culturală a poporului, din politica guvernelor din trecut care imprima țării caracterul unei semicolonii a capitaliștilor străini, din cosmopolitismul claselor exploatatoare. Conducătorii țării din acea vreme, promovînd lozinca « Romînia este o țară eminamente agricolă », aserveau economia țării producției industriale străine, încît era firesc ca ei să nu se ocupe de dezvoltarea învățămîntului tehnic. In 1894 exista în Romînia o singură instituție de învățămînt tehnic superior : « Școala națională de Poduri și Șosele » din București cu un total de 64 elevi. Inginerii mecanici, metalurgiști, electrotehnicieni, de mine pentru extracția și prelucrarea petrolului, pentru industria alimentară sau ușoară, inginerii chimiști, etc., așa cum se pregătesc astăzi în numeroase instituții politehnice și tehnice superioare în R.P.R., nu se pregăteau în Romînia condusă de burghezie și moșierime în secolul al XIX-lea și în primul sfert al secolului al XX-lea. Pe de o parte nu erau necesari, pentru că industria țării era neînsemnată, pe de altă parte, cei necesari erau aduși din străinătate sau erau fiii de bogătași din țară care își făceau studiile în străinătate. Abea în 1920, Școala Națională de Poduri și Șosele se transformă în Școală Politehnică. Cercetarea științifică în Romînia, la finele secolului al XIX-lea era neînsemnată; nu existau cadrele științifice care să desfășoare activitatea științifică, lipsea baza materială necesară. Matematica în școli era prezentată abstract, fără legăturile ei firești cu fizica sau cu tehnica, de aceea nici nu atrăgea elevii.

In asemenea condiții, este de înțeles că tinerii ingineri și profesori care scoteau « Gazeta Matematică » au luptat greu ca să-i deschidă drum. Unii s-au descurajat și au părăsit redacția revistei. In anul 1904, ca urmare a crizei economice, salariile funcționarilor reducîndu-se prin așa zisa curbă a lui Haret, cotizațiile mari ale redactorilor « Gazetei Matematice », din care în bună parte se tipărea revista, se încasau greu. De aceea, unii redactori au cerut încetarea apariției « Gazetei Matematice » și împărțirea între redactori a fondurilor revistei. Datorită perseverenței lui Ion Ionescu, Gh. Țițeica, A. G. Ioachimescu și Vasile Cristescu redacția nu s-a dizolvat , iar revista a continuat să apară.

Treptat, Gazeta Matematică s-a răspîndit prin licee. Numărul elevilor și studenților corespondenți a crescut. Tinerii colaboratori ai revistei așteptau cu nerăbdare ziua de 15 a fiecărei luni, cînd apărea « Gazeta Matematică » și lucrau cu pasiune problemele propuse în revistă. Interesul lor pentru matematici creștea, citeau cărți de matematici și își însușeau cunoștințe ce depășeau nivelul clasei lor. Mulți nu se mărgineau la rezolvarea problemelor propuse în fiecare număr al « Gazetei Matematice », ci ei înșiși elaborau și propuneau probleme în revistă, iar unii închegau chiar articole-studii de matematici. « Gazeta Matematică » stimula astfel interesul pentru cercetarea științifică. Mulți elevi și studenți purtau corespondență cu redactorii « Gazetei Matematice » de la care primeau sfaturi și îndrumări. « Gazeta Matematică » era o adevărată școală de ucenici în domeniul matematicii. Cea mai mare partea dintre acești ucenici corespondenți ai « Gazetei Matematice », devenind profesori sau ingineri, au păstrat amintirea emoțiilor tinerești, pe care le trăiau cu fiecare număr al revistei, au păstrat dragostea pentru « Gazeta Matematică » și au continuat să activeze ca redactori și îndrumători la « Gazetă », să sprijine la rîndul lor « Gazeta

Matematică », Este meritul celor 4 stîlpi ai « Gazetei Matematice » : Ion Ionescu Gheorghe Ţiţeica, Andrei Ioachimescu *şi* Vasile Cristescu *de a fi creat un astfel de climat la « Gazeta Matematică ». De la ei au învăţat mulţi tineri la « Gazeta Matematică » să preţuiască munca, dragostea pentru ştiinţă, modestia, cinstea, disciplina în muncă, sobrietatea. Astfel şcoala « Gazetei Matematice » a avut o însemnată acţiune educativă, cu unele lipsuri inerente epocii în care se desfăşura, totuşi o acţiune educativă pozitivă. Este mare numărul celor care de-a lungul celor 60 de ani şi-au început activitatea matematică sau tehnică prin colaborare la « Gazeta Matematică » ca elevi de liceu. Academicienii profesori* Gr. Moisil, Miron Nicolescu, Tiberiu Popovici, Nicolae Teodorescu *şi* Gh. Mihoc, *profesorii* O. N. Ţino, V. Vîlcovici, V. Alaci, *academicianul inginer* N. Profiri, *profesorii ingineri* Cristea Mateescu, Şt. Bălan, A. Pîrvu *şi mulţi alţii şi-au înscris numele în paginile « Gazetei Matematice » în timpul studiilor medii.*

Începînd de la 1 septembrie 1909, pentru a se asigura o participare mai largă la îndrumarea şi conducerea « Gazetei Matematice », Redacţia « Gazetei Matematice » se transformă în « Societatea Gazeta Matematică », care în 1935 număra 210 membri. Statutele prevedeau ca scop al « Societăţii » răspîndirea gustului pentru studiul ştiinţelor matematice şi îndrumarea spre cercetări originale relative la această ramură de ştiinţă, iar în art. 10 se arată că « Societatea » va dispune pentru atingerea acestui scop de munca voluntară şi dezinteresată a membrilor săi care vor voi, conform tradiţiei « Gazetei Matematice », să se ocupe de redactarea « Gazetei » şi cu administrarea « Societăţii ».

Credem că este necesar a fi subliniat acest caracter al muncii voluntare şi dezinteresate depusă de către acei care s-au ocupat de redactarea, tipărirea şi difuzarea « Gazetei Matematice ». Este una din tradiţiile sănătoase ale « Gazetei Matematice », cu atît mai demnă de laudă, cu cît ea s-a format într-un timp cînd, sub scutul partidelor burgheziei şi moşierimei, moravurile ţării erau inundate de bălăriile otrăvite ale corupţiei şi goanei după cîştiguri, pe seama muncitorilor şi ţăranilor exploataţi.

« Gazeta Matematică » conţine în primele 54 de volume următoarele rubrici : Articole, Note matematice, (scurte prezentări a unor probleme cunoscute, completări sau generalizări ale unor probleme rezolvate), Probleme propuse, Probleme rezolvate Exerciţii, Chestiuni de examen (cuprinzînd problemele date la examenele de admitere în învăţămîntul superior — uneori cu soluţii sau probleme date la concursuri), Bibliografii, Cereri şi Diverse.

In primii 54 de ani, s-au publicat în « Gazeta Matematică » 1037 articole dintre care 114 articole de aritmetică şi teoria numerelor, 371 articole de geometrie, 164 de algebră, 19 de trigonometrie, 59 articole de mecanică, etc. Chiar numai din compararea acestor cifre rezultă accentul care s-a pus pe materialul de geometrie.

Este interesant de notat că prin publicarea unui număr însemnat de articole şi note privind istoria matematicilor, « Gazeta Matematică » a trezit interesul

pentru asemenea cercetări. In paginile revistei se găsește un material bogat privind istoria matematicii românești. Astfel, Ion Ionescu *scrie despre prima Aritmetică tipărită în limba română. Se scrie despre Aritmetica lui Nicolae Milescu, despre primul profesor de matematici în limba română, despre viața și activitatea lui Gheorghe Lazăr, despre metodele folosite pentru a determina capacitatea vaselor la finele sec. XVIII, etc.*

S-au propus în 54 de ani 6.645 probleme și s-au publicat soluții la 5 279 dintre aceste probleme.

Desigur voluminosul material publicat în primii 54 de ani în « Gazeta Matematică » nu este deasupra criticii ; el are multe lipsuri. Legătura sa cu practica, cu viața este insuficientă. De asemenea, dacă lăsăm deoparte mecanica, materialul publicat nu conține aproape nimic în legătură cu celelalte capitole ale fizicii. Aceste lipsuri au determinat o orientare greșită, de multe ori formalistă a tineretului ce se forma la « Gazeta Matematică ». Se află publicat în paginile revistei și material lipsit de interes, gol de valoarea științifică sau pedagogică. Nu a existat preocupare pentru metodica matematicilor, nici pentru ridicarea nivelului pregătirii matematicie a masei elevilor. In total lipsește fundamentarea științifică comună tuturor științelor, materialismul dialectic.

Cu toate aceste lipsuri, conținutul « Gazetei Matematice » a contribuit mai mult decît o jumătate de secol la formarea a numerose generații de profesori și ingineri care au construit știința matematică românească, au dat realizări tehnice valoroase și au predat cu competență matematica în țara noastră.

Lipsa de legătură a Gazetei Matematice cu masa elevilor și cu preocupările de metodică a fost simțită chiar în redacția « Gazetei Matematice ». Ca urmare, la propunerea profesorului O. N. Țino *« a apărut de la 1 octombrie 1934, paralel cu « Gazeta Matematică », o altă revistă anexă lunară : « Gazeta Matematică — supliment cu exerciții ». Apariția suplimentului cu exerciții a mai fost determinată și de reducerea programei de matematici în licee, operată în 1929 prin desființarea liceelor reale, reducere care provoca o mare diferență de nivel între cunoștințele căpătate de elevi în liceu și chestiunile tratate în paginile « Gazetei Matematice », al căror nivel crescînd, se depărtase de acel existent în primii ani de apariție. Suplimentul cu exerciții publica exerciții spre rezolvare, repartizate pe clase, în legătură cu materia predată în fiecare lună la clasa respectivă. Se publicau soluții numai la exercițiile mai grele. In unele numere au apărut și articole de inițiere a elevilor în capitolele de matematici care nu figurau în programa liceului. Suplimentul cu exerciții a apărut timp de 15 ani, pînă la 1 iunie 1949. De la această dată, sarcina îndrumării școlilor medii în ridicarea nivelului cunoștințelor atît de matematică, cît și de fizică a preluat-o actuala serie B a « Gazetei Matematică și Fizică », apărută în martie 1950, sub numele de Revista Matematică și Fizică.*

După reforma învățămîntului din 1948, care reprezintă hotarul dintre vechea școală din Romînia condusă de guvernele burghezo-moșierimei și școala nouă, deschisă larg poporului, din Republica Populară Romînă, era absolut necesar — ca pe baza principiilor Reformei învățămîntului și a noului conținut al învățămîntului — « Gazeta Matematică » să primească o orientare nouă, orientare care să însemne lichidarea lipsurilor ce existau în conținutul revistei și punerea sa în acord cu noua viață ce se construiește de regimul democrat popular, sub îndrumarea Partidului Muncitoresc Romîn. Revoluția culturală a avut un ecou puternic și la « Gazeta Matematică ». « Am arătat mai sus că una din principalele lipsuri ale « Gazetei Matematice » consta în ruperea ei de acea ramură a științei, de care ea este firesc și oragnic legată, de Fizică. In scopul lichidării acestei importante

deficiențe se formează în iunie 1949 « Societatea Științelor Matematice și Fizice din R.P.R. », concentrînd profesorii de matematică și fizică, din învățămîntul mediu și superior, inginerii și pe toți cei preocupați de științele matematice și fizice. « Gazeta Matematică » se transformă în « Gazeta Matematică și Fizică », devenind unul din organele « Societății ». Și astfel în iunie 1949, apare primul număr al revistei sub titlul « Gazeta Matematică și Fizică », revistă pentru răspîndirea științelor matematice și fizice, anul I (Vol. 55), serie nouă a «Gazetei Matematice » fondată în 1895. *Gazeta Matematică și Fizică se adresează profesorilor din învățămîntul mediu, studenților, tehnicienilor și, în parte, cadrelor didactice din învățămîntul superior.*

Cîteva luni mai tîrziu, în martie 1950, apare actuala serie B a « Gazetei Matematice și Fizice » sub, numele « Revista Matematică și Fizică », de asemenea ca organ al « Societății Științelor Matematice și Fizice », pentru elevii școlilor medii și ai școlilor de 7 ani.

Cele două serii ale « Gazetei Matematice și Fizice » au ca principal țel ridicarea continuă a nivelului învățămîntului matematicii și fizicii în instituțiile de învățămînt superior, în școlile medii și în acelea de 7 ani. In ultimii ani, fizica și matematica au făcut pași mari înainte, ca urmare a cercetărilor savanților sovietici. « Gazetei Matematice și Fizice » i-a revenit sarcina de a informa cadrele didactice, studenții și elevii asupra principalelor realizări ale științei moderne în domeniul fizicii și matematicii, asupra însemnatelor cuceriri ale științei sovietice. Problemele metodicii predării matematicii și fizicii ocupă un loc important în paginile revistei, împlinindu-se astfel un gol de mult resimțit. « Gazeta Matematică și Fizică » oglindește clar în cuprinsul său, în articole sau probleme, legătura vie dintre fizică și matematică, precum și relațiile lor cu practica, cu problemele puse de tehnică. Este vădită preocuparea pentru curățirea materialului de fizică și matematică de zgura idealismului și prezentarea lui în lumina limpede a filozofiei materialismului dialectic. De asemenea, « Gazeta Matematică și Fizică » informînd asupra principalelor activități și evenimente cu caracter fizico-matematic din țară și din U.R.S.S., reprezintă unul dintre mijloacele prin care « Societatea Științelor Matematice și Fizice » realizează coeziunea cadrelor și a celor ce se ocupă cu aceste domenii ale științei în toate colțurile țării. Seria B a « Gazetei Matematice și Fizice » a izbutit să realizeze o intensă rețea de corespondenți, tineri elevi cu bogată activitate de rezolvitori și chiar propunători de probleme și exerciții.

Desigur toate aceste înfăptuiri ale « Gazetei Matematice și Fizice » se răsfrîng pozitiv asupra învățămîntului științelor fizico-matematice în școlile noastre. Numărul absolvenților cu bună pregătire în aceste științe crește an după an. Examenele de admitere la Facultățile Fizico-Matematice și la Institutele tehnice scot în relief acest fapt. Iar aceasta înseamnă viitoare contingente din ce în ce mai mari, de buni profesori pentru catedrele de matematică și fizică, de cercetători temeinic pregătiți sau de ingineri înarmați cu o bază științifică serioasă pentru producția patriei noastre.

Un stimulent important pentru creșterea nivelului de cunoștințe și întărirea deprinderilor de muncă independentă al elevilor la matematică și fizică îl reprezintă Concursurile și Olimpiadele organizate anual de « Societatea de Științe Matematice și Fizice ».

Concursurile sînt în același timp un mijloc de cunoaștere personală a elevilor ce activează la revistele matematice. « Gazeta Matematică » a organizat primul concurs în anul 1902. Era un concurs prin corespondență, pentru cele mai bune soluții date problemelor publicate în numerele 8—11 ale revistei. In anii 1905—

1908 s-au organizat concursuri de matematici în scris, cu teze date în mai multe orașe din țară. Din anul 1909, concursurile s-au ținut la București și constau din două probe scrise și o probă orală. Concursurile nu aveau însă un caracter larg, numărul participanților fiind mic. Astfel, cercetînd numărul elevilor care s-au prezentat la concursurile «Gazetei Matematice» pînă în anul 1935, constatăm că el atinge maximul în 1934, cînd au participat la concurs 76 de candidați. «Societatea de Științe Matematice și Fizice» a continuat tradiția concursurilor «Gazetei Matematice», dar urmînd experiența sovietică, a reușit să amplifice numărul participanților, să dea concursurilor un caracter de masă, să intereseze pentru desfășurarea concursurilor cea mai mare parte a școlilor și a cadrelor didactice, alături de elevi. Ministerul Învățămîntului și organele sale de îndrumare și control sprijină organizarea și desfășurarea acestei acțiuni. Și noi considerăm că este un succes remarcabil realizat de «Societatea de Științe Matematice și Fizice» în acest an, faptul că numai la Olimpiada tinerilor matematicieni și fizicieni din 1955, ținută cu elevii din clasele V—VII, au participat circa 18 000 elevi din toate regiunile țării, reprezentînd școli situate în bună parte la sate. Acest fapt oglindește pe de o parte aria largă pe care se exercită acțiunea educativă a «Gazetei Matematice și Fizice», pe de altă parte progresele realizate de învățămîntul din Republica Populară Romînă.

Sublinierea principalelor aspecte din activitatea «Gazetei Matematice și Fizice» nu ar fi completă, dacă nu am scrie despre preocuparea, «Societății de Științe Matematice și Fizice» de a pune la dispoziția tineretului cărți prin care acesta să-și întindă cîmpul cunoștințelor, fie prin prezentarea unor cunoștințe clasice de matematică, fizică, astronomie, depășind cadrul programelor școlare, fie prin prezentarea metodică a unor capitole și rezultate moderne. În acest scop, «Societatea» a pus bazele unei colecții de broșuri din care au apărut pînă la data scrierii acestui articol 15 numere, constituind «Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice» din R.P.R. Se continuă astfel inițiativa pe care a luat-o «Gazeta Matematică» în anul 1901 de a publica o serie de volume destinate întăririi și completării cunoștințelor elevilor. Primul volum, apărut în «Biblioteca Gazetei Matematice», la 4 decembrie 1901, a fost «Culegerea de probleme de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie» întocmită de Ion Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu. Ulterior au apărut separat culegerile de probleme de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie. Unele dintre acestea au apărut în mai multe ediții. Astfel culegerea de probleme de algebră a ajuns la a cincea ediție. Volumele publicate de «Gazeta Matematică» au acoperit în parte marele gol de material auxiliar și de completare a manualelor școlare, ce exista în trecut în domeniul matematicii. Aceasta pentru că în Romînia, înainte de anul 1948, Ministerele ce tutelau școlile nu se îngrijeau de editarea manualelor necesare învățămîntului și cu atît mai puțin de culegeri de probleme, iar editurile capitaliste nu scoteau în afară de manuale alte cărți de matematici, pentru că aceasta reprezenta o operație insuficient de rentabilă.

Din cele expuse, tineretul nostru școlar este în măsură să cunoască etapele străbătute în decursul a 60 ani de «Gazeta Matematică și Fizică», de revista care îl ajută astăzi să-și lărgească orizontul cunoștințelor de fizică și matematică. Tineretul nostru școlar poate reflecta cu acest prilej asupra grelelor condiții de studiu ale elevilor în trecut, comparîndu-le cu cele ce sînt astăzi, ca urmare a grijii pe care Partidul Muncitoresc Romîn și Guvernul R.P.R., o acordă pregătirii viitoarelor cadre productive ale țării.

Îndreptîndu-ne privirea asupra conținutului și realizărilor «Gazetei Matematice» și ale «Gazetei Matematice și Fizice», înțelegem ce importanță au avut

și au în complexul realizărilor culturale ale poporului nostru, deci importanța aniversării celor 60 de ani de la apariția primului număr al « Gazetei Matematice ».

Desigur că mai sînt încă multe lucruri de făcut pentru a îmbunătăți mereu conținutul și aspectul grafic al revistei. Cîmpul de acțiune al « Gazetei Matematice și Fizice » trebuie întins și adîncit. « Societatea de Științe Matematice și Fizice », perfecționînd actualele mijloace prin care polarizează activitatea cadrelor didactice de specialitate și a elevilor în jurul matematicii și fizicii, va trebui să adauge și alte metode noi. Este de asemenea necesar ca Ministerul Învățămîntului să îndrumeze și să sprijine mai consistent activitatea « Societății de Științe Matematice și Fizice ». Cadrelor didactice considerăm că le revine sarcina intensificării colaborării la Seria A. a « Gazetei Matematice », a folosirii din plin a materialului publicat, precum și aceea de răspîndire a « Gazetei Matematice și Fizice » în masa studenților și elevilor, de crearea interesului și dragostei de lucru la revistă. Studenții și elevii noștri, învățînd din exemplul frumos al avîntului și al muncii, pe care cei ce iubesc « Gazeta Matematică și Fizică », îl închină științei, să se străduiască a-și însuși materialul publicat de revistă și broșurile « Societății », să-și lărgească continuu orizontul cunoștințelor lor de fizică și matematică, să-și exerseze și să-și întărească deprinderile de muncă independentă în aceste domenii. Dragostea pe care noi, mai vîrstnici o purtăm matematicii, fizicii și « Gazetei Matematice și Fizice » ce ne-a călăuzit pașii pe ogorul științei, să înflorească și în inimile celor tineri.

AMINTIRI DIN TRECUTUL «GAZETEI MATEMATICE»

prof. univ. O. N. ȚINO

« GAZETA Matematică este o operă românească, iar izbînda ei trebuie să ne umple inima de bucurie și să ne întărească încrederea în capacitatea multilaterală a poporului nostru » sînt cuvinte rostite de marele matematician Traian Lalescu cu ocazia unei serbări a « Gazetei Matematice » din mai 1909. Cu atît mai legitimă este mulțumirea și mîndria noastră de această operă românească acum cînd serbăm șasezeci de ani de la înființarea ei, șase zeci de ani de prosperitate prin contribuția celor mai luminate minți românești în domeniul matematicii.

Primul număr al « Gazetei Matematice » a apărut la 15 septembrie 1895 deci încă înainte de înființarea « Societății Gazeta Matematică ».

In prima decadă a existenței sale « Gazeta Matematică » a fost fără statute, fără președinte, fără director. Cei nelipsiți dintre redactorii « Gazetei au fost așa numiții « Cei patru stîlpi ai Gazetei Matematice », care constituiau bătrînii sfătuitori ai noilor redactori proveniți din foștii corespondenți. Ei au fost: *Ion Ionescu, Gheorghe Țițeica, A. G. Ioachimescu* și *V. Cristescu.* In afară de aceștia mai lucrau la « Gazetă » N. Nicolescu, Traian Lalescu, St. N. Mirea, D. Năsturaș, Gh. Buicliu Al. Roșu și alții.

Datorită străduinților depuse de Traian Lalescu, « Societatea Gazeta Matematică » a fost recunoscută ca persoană morală și totodată i s-a acordat locul din Calea Griviței nr. 158, unde mai tîrziu s-a construit localul « Societății Gazeta Matematică ».

Timp de 16 ani redactorii amintiți mai sus s-au îngrijit de strîngerea și redactarea materialelor spre publicare de la numeroși corespondenți. Chiar în timpul primului război mondial, datorită voinței lor nestrămutate de a menține această făclie a științei, colaboratorii « Gazetei », deși mobilizați sau reținuți de îndeplinirea altor îndatoriri, au izbutit să mențină legătura cu redacția « Gazetei » și să asigure prin contribuția lor apariția revistei.

La început, din lipsa de local propriu, ședințele redacționale aveau loc la cîte unul dintre redactori. Mai tîrziu, cînd numărul redactorilor a devenit mai mare, aceste ședințe se țineau, cînd într-un birou, cînd în altul, fie în clădirea Ministerului Finanțelor (Direcția Monopolurilor), fie în clădirea Ministerului Lucrărilor Publice (Direcția Apelor, Direcția Tehnică). Ultima ședință din luna mai se ținea la Moși (în Tîrgul Moșilor), unde membrii redacției « Gazeta Matematică » veneau însoțiți de familiile lor.

Ședințele de redacție ale « Gazetei Matematice » decurgeau într-o atmosferă de colaborare prietenească, se făceau schimburi de idei în legătură cu îmbunătățirea activității « Gazetei » precum și critici la adresa colaboratorilor și chiar a unor servicii. Astfel la prima ședință la care am luat parte ca membru al « Societății Gazeta Matematică, » în 1922, ședință care s-a ținut în biroul inginerului Ion. D. Theodor, am asistat la folosirea unei originale metode de critică. Profesorul Traian Lalescu vesel și vioi, după ce într-un colț dăduse îndrumări unui tînăr profesor, veni în mijlocul celorlalți, scoase o cutie de chibrituri din buzunar și încercă pe rînd să aprindă trei bețe de chibrituri care însă nu s-au aprins; unul dintre colaboratori, inginer la Fabrica de chibrituri, roșind pronunță încet cîteva cuvinte, scoase din buzunar un carnețel și notă ceva — desigur sugestia lui Traian Lalescu în legătură cu necesitatea îmbunătățirii fabricației chibriturilor.

Membrii redacției « Gazeta Matematică » formau un fel de familie aparte și țineau să se știe acest lucru. De multe ori, în urma unei ședințe de redacție, o parte din membri, care participaseră la ședință, petreceau o jumătate de oră la una din berăriile apropiate de Universitate, unde continuau discuțiile pe cît de interesante pe atît de folositoare în special pentru membrii mai tineri.

In octombrie 1934 a luat ființă « Suplimentul cu exerciții al Gazetei Matematice » a cărui publicare s-a hotărît în urma constatării că elevii de liceu nu aveau pregătirea necesară pentru a putea deveni colaboratori ai « Gazetei Matematice ».

Necesitatea editării acestui supliment au dovedit-o mai ales două fapte și anume: numărul abonaților a trecut în anii următori de 2500, iar dintre corespondenții « Suplimentului » s-au selecționat corespondenți ai « Gazetei Matematice » care au depășit prin rezultatele colaborării lor celelalte serii de corespondenți.

La început însă nu toți membrii « Societății Gazeta Matematică » erau de acord cu înființarea acestui « Supliment »; așa se explică faptul că prima noastră propunere a cîtorva redactori ai « Gazetei », a fost respinsă de Adunarea Generală. Motivul invocat de cei care au votat contra, era considerentul că « Suplimentul » ar periclita existența « Gazetei » însăși, aceasta riscînd să rămînă fără colaboratori. Intr-o altă ședință, propunerea noastră a fost acceptată însă cu anumite condiții. In prefața, la primul număr, profesorul Ion Ionescu lămurește deplin scopul acestei publicații. Putem spune că origina propunerii rezidă în raportul profesorului Gheorghe Tițeica asupra concursului din 1930 al « Gazetei Matematice » precum și în cele trei articole publicate de profesorul

Ion Ionescu în numerele « Gazetei Matematice » din iunie-august 1933 privind starea deplorabilă a studiului matematicii în liceu.

Din Comitetul de redacţie al « Gazetei Matematice » s-a constituit Comitetul de redacţie al « Suplimentului Gazetei Matematice » şi au făcut parte următorii: O. N. Ţino, C. Ionescu-Bujor, Gh. D. Simionescu, Gh. Buicliu, N. N. Mihăileanu, C. Ionescu — Ţiu, Adrian Gheorghiu, N. Botea, G. G. Constantinescu, Virgil Claudian, Gabriela Ţiţeica, Al. Stoenescu şi alţii.

Abia în al 40-lea an al existenţei sale « Gazeta Matematică » a izbutit datorită concursului unora din membrii « Societăţii Gazeta Matematică », cum a fost Traian Lalescu, Aurel Ioanovici, Gh. Filipescu, Ion Ionescu, D. Stan, etc. să-şi clădească un local propriu în Calea Griviţei 158. Profesorul ing. Aurel Ioanovici membru al « Societăţii » s-a oferit să facă clădirea fără beneficii, făcînd şi donaţii între care şi mobilierul. De remarcat faptul că la şedinţa întrunită în legătură cu construcţia unui local propriu al « Societăţii Gazeta Matematică », numărul membrilor prezenţi a fost mai mare decît la orice altă adunare generală a « Societăţii », iar hotărîrea a fost luată în unanimitate.

După terminarea construcţiei localului şi înfiinţarea bibliotecii « Gazetei Matematice » şedinţele de redacţie s-au ţinut în acest local, iar corespondenţii « Gazetei Matematice » puteau consulta la anumite ore biblioteca pentru a se documenta în diferite probleme. Vorbind despre donatorii din urmă ai « Gazetei Matematice » nu putem uita mai ales figura distinsului colaborator ing. D. V. Stoica — supranumit de noi « Moş Crăciun » — care ori de cîte ori se ivea vreo nevoie la « Gazeta Matematică » era primul care se înscria cu donaţie sau acoperea suma necesară.

Concursurile de matematică între elevii liceelor, corespondenţi ai revistei, au fost înaugurate de « Gazeta Matematică » încă în 1902. Datorită prestigiului revistei precum şi minuţiozităţii cu care erau întocmite rapoartele de premiere, aceste concursuri au căpătat o mare popularitate, au constituit un stimulent în studiul matematicii şi au creat posibilitatea de a se stabili raporturi personale între corespondenţi şi membrii « Societăţii Gazeta Matematică » din diferite regiunii ale ţării; ele au contribuit totodată la pregătirea viitoarelor cadre de matematicieni şi ingineri.

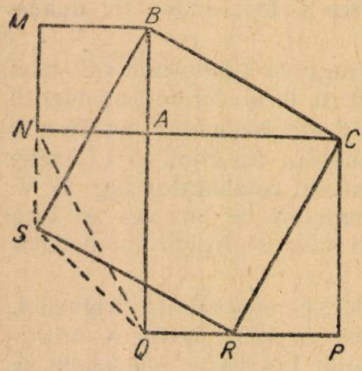
Organizarea acestor concursuri era pregătită în amănunt: datele la care aveau loc înscrierile participanţilor, programele de concurs, locul concursului, transportul, cazarea şi masa participanţilor, totul era stabilit din timp şi anunţat. In fiecare an diferitele faze ale concursului se succedau cu aceeaşi regularitate, iar în luna mai se publica darea de seamă asupra concursului, rezultatele şi premiile distribuite. Numărul maxim de elevi prezenţi la concurs a fost de 156 în anul 1935. Aceste concursuri au fost întrerupte de două ori: în 1940 şi 1944.

Concursurile « Gazetei Matematice » se încheiau printr-o reuniune la care luau parte elevii concurenţi, profesorii şi membrii « Societăţii ». Cu această ocazie se creia o atmosferă de cordialitate, o legătură sufletească trainică între toţi, aşa încît fiecare se simţea mai ataşat de « Gazetă », mai îndrăgostit de matematică şi pleca cu avînturi sporite spre noi cuceriri în acest domeniu al ştiinţei.

TEOREMA LUI PITAGORA [2]

ACEASTĂ teoremă se enunţă în modul următor: *pătratul construit pe ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu este egal cu suma pătratelor construite pe catetele aceluiaşi triunghiu.*

Mai în toate tratatele de geometrie se dau două demonstraţiuni ale acestei teoreme, una directă bazată pe proprietăţile ariilor şi alta dedusă din asemănare de triunghiuri. Vom lăsa la o parte aceste 2 demonstraţiuni şi vom da o serie de alte demonstraţiuni, pentru a vedea pe cîte căi fiferite se pot ajunge la stabilirea ei. Vom începe prin o variantă a demonstraţiei directe, şi anume vom construi pătratele pe catete în afară de triunghiul dreptunghiu, iar pătratul ipotenuzei peste triunghiul dreptunghiu.



Fie ABC triunghiul dat, $ABMN$ pătratul construit pe cateta AB; $ACPQ$ pătratul construit pe cateta AC. Luăm pe dreapta MN o lungime $MS = AC$ şi pe dreapta PQ o lungime $PR = AB$ şi ducem dreptele BS, CR, RS, QS, QN. Fie care din triunghiurile MSB, PCR, AQN *sînt* egale cu triunghiul dat ABC, ca avînd unghiul lor drept cuprins între laturi respectiv egale cu catetele triunghiului dat. Prin urmare avem relaţiunile:

1) $AB = BM = RP = AN$, 2) $AC = CP = AQ$, 3) $BC = BS = CR = NQ$. Mai rezultă apoi că unghiurile MBS, ABC sînt egale, Adăogînd fiecăruia unghiul ABS se găseşte că unghiul CBS e egal cu ABM, adică e un unghi drept In acelaş mod se poate vedea că unghiul BCR e tot drept. Prin urmare patrulaterul $BCRS$ are laturile BS, CR egale cu BC după relaţiunea 3) şi perpendiculare pe BC, deci el e un patrat, adică pătratul pe ipotenuză. Rezultă că $SR = BC$.

Triunghiurile NQS, SRQ sînt egale. In adevăr ele au 1) latura SQ comună, 2) laturile SR şi NQ egale de oare-ce fie-care e egală cu BC, 3) laturile NS şi RQ egale cu diferenţe de lungimi egale. In adevăr avem:

$$RQ = PQ - PR = AC - AB, \qquad NS = MS - MN = AC - AB.$$

Acum dacă din toată figura $MBCPRQSNM$ scoatem triunghiurile MBS, CRP, RQS ne rămîne pătratul pe ipotenuză. Dacă din aceeaşi figură totală scoatem triunghiurile ABC, ANQ, NQS respectiv egale cu MBS, CRP, RQS ne rămîn pătratele pe catete. Descăzutul şi cantităţile ce se scad fiind aceleaşi, rezultă că diferenţa e aceiaşi. Aşa dar pătratul $BCRS$ este egal cu suma pătratelor $MNAB$, $PQAC$, şi teorema e demonstrată.

I. IONESCU

[1] S-a tipărit cu ortografia veche, de atunci.

[2] Extras din Gazeta Matematică Vol I. (15 sept. 1895), pag 13.

MAXIMUL ŞI MINIMUL FUNCŢIEI[1]) $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

EATĂ o metodă simplă, datorită lui E. Catalan, permiţînd de a găsi maximul şi minimul funcţiunei de mai sus, fără a recurge la discuţia unei ecvaţii de al doilea grad.

Să presupunem că a' e diferit de zero*). Atunci putem scrie

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} - \frac{a}{a'}$$

sau

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{(ba' - ab')x + ca' - ac'}{a'(a'x^2 + b'x + c')} \tag{1}$$

Dacă punem pentru prescurtare

$$g = ba' - ab', \qquad h = ca' - ac' \tag{2}$$

vom avea

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{gx + h}{a'(a'x^2 + b'x + c')} \tag{3}$$

Dacă g e diferit de zero**), putem pune

$$\alpha = -\frac{h}{g} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \tag{4}$$

şi vom avea

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{g}{a'} \cdot \frac{x - \alpha}{a'x^2 + b'x + c'} \tag{5}$$

Fie acum

$$y - \frac{a}{a'} = Y; \quad x - \alpha = X.$$

Egalitatea (5) devine atunci

$$\frac{a'}{g} Y = \frac{X}{a'(X + \alpha)^2 + b'(X + \alpha) + c'}$$

sau

$$\frac{a'}{g} Y = \frac{X}{AX^2 + BX + C}$$

---

[1]) Extras din Gazeta Matematică Vol. I (1895) pag. 10.

*) Cînd a' este egal cu zero, se va aplica aceiaşi metoda la funcţiunea

$$\frac{1}{y} = \frac{b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$$

**) In cazul cînd $g = 0$, chestiunea se reduce la discuţia funcţiunei

$$\frac{h}{a'x^2 + b'x + c'}$$

sau încă

$$\frac{g}{a'}\frac{1}{Y} = AX + \frac{C}{X} + B \tag{6}$$

Este evident că maximul sau minimul lui y este același ca și a lui Y; iar maximul sau minimul lui y corespunde la minimul sau maximul lui $\frac{1}{Y}$. Egalitatea (6) ne arată atunci că chestiunea se reduce la aflarea maximului sau minimului sumei

$$S = AX + \frac{C}{X}$$

Produsul celor două părți a le lui S este constant și egal cu AC, și se știe că *dacă doi factori pozitivi formează un produs constant, suma lor e minimă cînd factorii sînt egali.* Deci:

Dacă A și C sînt de același semn, trebue să luăm

$$X = \pm \sqrt{\frac{C}{A}} \tag{7}$$

și fracțiunea propusă are atunci un maximum și un minimum.

Iar dacă A și C sînt de semne contrare, fracțiunea propusă n'are nici maximum nici minimum.

Observația I. Valorile lui A,B,C, din formulele (6) și (7) sînt

$$A = a', \qquad B = \frac{2a'(ca' - ac') + b'(ab' - ba')}{ab' - ba'}$$

$$C = \frac{a'(ca' - ac')^2 + b'(ca' - ac')(ab' - ba') + c'(ab' - ba')^2,}{(ab' - ba')^2}$$

sau

$$C = \frac{a'c[a'^2c + b'(ab' - ba')] + a'c'[a^2c' - b(ab' - ba')] - 2aa'^2cc'}{(ab' - ba')^2}$$

Deci condiția $\frac{C}{A} > 0$ devine

$$c^2a'^2 + c'^2a^2 - 2aa'cc' + (ab' - ba')(cb' - bc') > 0$$

sau

$$(ac' - ca')^2 > (ab' - ba')(bc' - cb'). \tag{8}$$

Prin urmare dacă coeficienții a, b, c, a', b', c' sînt astfel aleși în cît inegalitatea (8) este îndeplinită, fracțiunea y are un maxim și un minim.

Observația II. Dacă avem

$$C = \frac{B^2}{4A}$$

formula (7) dă $X = \pm \frac{B}{2A}$

Din aceste două valori, cea cu semnul minus, anulează polinomul $AX^2 + BX + \frac{B^2}{4A}$ și prin urmare face pe Y infinit; această valoare deci nu corespunde nici la un maxim nici la un minim. În acest caz formula (7) trebue să fie înlocuită prin

$$X = \frac{B}{2A}$$

Prin urmare *cînd numitorul fracțiunei propuse este un pătrat fracțiunea are un maximum sau un minim.*

Observația III. Pentru ca fracțiunea y să aibă un maximum și un minimum, am văzut că trebue să avem

$$(ac' - ca')^2 > (ab' - ba')(bc' - cb')$$

În caz cînd $(ac' - ca')^2 < (ac' - ba')(bc' - cb')$,

nu avem nici maximum nici minimum.

Nu putem însă presupune că avem

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb') \tag{9}$$

căci atunci trinomii $ax^2 + bx + c$, $a'x^2 + b'x + c'$ ar avea o rădăcină comună, și fracțiunea propusă ar fi *reductibilă*. În adevăr dacă ordonăm în raport cu c', egalitatea (9) devine

$$a^2 c'^2 - [(2aa' c + b(ab' - ba')]\, c' + a'^2 c^2 + b'c(ab' - ba') = 0,$$

de unde scoatem

$$c' = \frac{2aa' c + b(ab' - ba') \pm (ab' - ba')\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a^2}$$

sau

$$c' = \frac{ca'}{a} - \frac{ab' - ba'}{a}\left(\frac{-(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

de unde

$$-\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{10}$$

De asemenea dacă am fi considerat pe c ca necunoscută am fi găsit

$$-\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'} \tag{11}$$

Comparînd pe (10) cu (11), avem

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'}$$

adică cel puțin una din rădăciniele ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ ar fi egală cu una din rădăcinile ecvației $a'x^2 + b'x + c' = 0$.

V. Cristescu.

Problema 5 *). *Să se găsească relațiunea care există între unghiurile unui triunghiu al cărui centru de greutate se află pe circonferința înscrisă triunghiului.*

(V. Cristescu)

Soluție dată de d-nul **G. Țițeica**

Chestiunea se reduce la a exprima că distanța de la centrul cercului înscris la centrul de greutate, este egală cu raza cercului înscris. Fie G și I centrul de greutate și centrul cercului înscris triunghiului ABC; M și D mijloacele segmentelor BC și AG, în fine E și F punctele de contact ale cercului înscris cu BC și AC. Avem $AD = DG = GM$. Pe de altă parte în triunghiul IDM

$$IG^2 = \frac{ID^2 + IM^2}{2} - MG^2 = \frac{ID^2 + IE^2 + ME^2}{2} - \frac{AM^2}{9} =$$

$$\frac{ID^2 + IE^2 + (MC - CE)^2}{2} - \frac{AM^2}{9}.$$

Însă în triunghiul IAG

$$ID^2 = \frac{IG^2 + IA^2}{2} - GD^2 = \frac{IG^2 + IA^2}{2} - \frac{AM^2}{9}.$$

Așa dar

$$IG^2 = \frac{IG^2 + IA^2}{4} - \frac{AM^2}{18} + \frac{r^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2}\right)^2}{2} - \frac{AM^2}{9}$$

De unde

$$3\ IG^2 = IA^2 - \frac{2AM^2}{3} + 2r^2 + \frac{(b-c)^2}{2}$$

Însă $IA^2 = IF^2 + AF^2 = r^2 + \frac{(b+c-a)^2}{4}$ și $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

Se obține după toate calculele

$$3IG^2 = 3r^2 + c\,\frac{5}{12}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(bc + ca + ab)$$

Așa că relațiunea $IG = r$, dă

$$5\,(a^2 + b^2 + c^2) = 6\,(bc + ca + ab)$$

Această relațiune fiind omogenă în raport cu a, b, c, putem înlocui pe a, b, c cu $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$. Obținem astfel

$$5\,(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 6(\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B)$$

care este relațiunea căutată.

Problema 67 **). *Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oare-care avem relațiunile:*

$$a \sin B \sin (C-\alpha) - c \sin C \sin \alpha = b \sin C \sin (A - \alpha) - a \sin A \sin \alpha$$
$$= c \sin A \sin (B - \alpha) - b \sin B \sin \alpha$$
$$a \sin C \sin (B - \alpha) - b \sin B \sin \alpha - b \sin A \sin (C - \alpha) - c \sin C \sin \alpha$$
$$= c \sin B \sin (A - \alpha) - a \sin A \sin \alpha$$

α fiind un unghiu oare-care. **G. Țițeica**

Soluție dată de D-nii **A. Iliovici** (Iași); **C. Mateiescu** *(Elev al Liceului din Craiova* și **G. Iliovici** *(Iași)*.

---

*) Extras din Gazeta Matematică Vol I (1895) pag. 37.
**) Extras din Gazeta Matematică, Vol I (1896) pag. 271.

Să luăm primul grup de formule, să desfacem sin $(A - \alpha)$, . . .şi să înlocuim pe a, b, c, cu $2R \sin A$, $2R \sin B$, $2R \sin C$; suprimînd factorul comun $2R$, găsim:
$\sin A \sin B \sin C \cos \alpha - \sin A \cos B \sin C \sin \alpha - \sin^2 B \sin \alpha = \sin A \sin B \sin C \cos \alpha - \cos A \sin B \sin C \sin \alpha - \sin^2 A \sin \alpha = \sin A \sin B \sin C \cos \alpha - \sin A \sin B \cos C \sin - \sin^2 C$ şi se vede că chestiunea va fi demonstrată, dacă vom arăta că: $\sin A \cos B \cos C + \sin^2 B = \cos A \sin B \sin C + \sin^2 A = \sin A \sin B \cos C + \sin^2 C$

Într-adevăr, avem:

$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin (A + B) \sin (A - B) = \sin C \sin (A - B)$ sau desvoltînd $\sin (A - B)$ şi grupînd:

$\sin^2 A + \cos A \sin B \sin C = \sin^2 B + \sin A \cos B \sin C$

în acelaşi mod:

$\sin^2 A + \cos A \sin B \sin C = \sin^2 C + \sin A \sin B \cos C$.

Al doilea grup de formule, după înlocuirea lui a, b, c ca şi mai sus, devine identic cu cel d'întîi.

Problema 261 *) — *Un balon de sticlă se umple cu un amestec de două lichide, avînd respectiv densităţile* d *şi* d', *iar greutatea amestecului fiind* P. *Se extrage o cantitate de amestec şi se umple balonul la loc cu lichidul de densitatea* d, *prin cîntărire se găseşte că greutatea noului amestec este* P'. *Din acest din urmă amestec se extrage aceiaşi cantitate ca mai sus, şi se umple iarăşi baloul cu lichidul de densitatea* d', *prin cîntărire se găseşte că greutatea ultimului amestec obţinut este* P'' *Să se determine*: 1) *capacitatea balonului*; 2) *cantitatea de lichid extrasă prin operaţiunile de mai sus*; 3) *proporţia de amestec a celor două lichide la început şi la sfîrşit.*

(A. G. Ioachimescu)

Soluţie dată de D-nii: **G. C. Dobrovici** (Elev Liceul Bărlad); **A. Iliovici** (Student, Iaşi): **G. Iliovici** (ib).

Fie: V volumul vasului.
v » lichidului de densitate d.
v' » » » d'
v'' » » extras.

Aplicînd formula cunoscută: *că greutatea unui corp este egală cu volumul multiplicat cu densitatea*, obţinem ecuaţiunea:

$$(1) \quad vd + v'd' = P$$

Amestecul primitiv are densitate $P : (v + v')$, extrăgînd din el un volum v'' greutatea acestuia va fi: $Pv'' : (v + v')$; introducînd acelaşi volum v'' de lichid cu densitatea d, greutatea sa va fi $v''d$; cum greutatea totală este P'', vom avea ecuaţiunea:

$$(2) \quad P - \frac{P'v''}{v + v'} + v''d = P'.$$

Pornind de la amestecul cu greutatea P' şi repetînd aceiaşi operaţiune şi acelaşi raţionament ca mai sus, obţinem ecuaţiunea:

$$(3) \quad P' - \frac{P'v''}{v + v'} + v''d' = P''.$$

Ecuaţiunile (1), (2), şi (3) rezolvă problema: ele determină pe v, v' şi v'' şi în urmă volumul total V.

Din ecuaţiunile (2) şi (3) deducem:

$$(v + v')(P + v''d - P') = Pv''$$
$$(v + v')(P + v''d' - P'') = P'v''$$

divizînd una cu alta:

$$\frac{P + v''d - P'}{P' - v''d' - P''} = \frac{P}{P'}$$

de unde:

$$v'' = \frac{PP'' - P'^2}{Pd' - P'd}$$

*) Extras din Gazeta **Matematică**, vol IV (1898) pag. 49.

În urmă se găsește:

$$V = v + v' = \frac{PP^* - P'^2}{d'(P - P') - d(P' - P'')}$$

Proporția de amestec la început este dată de ecuațiunile:

$$vd + v'd' = P$$
$$v + v' = V.$$

care dau:

$$v = \frac{P - Vd'}{d - d'}.$$

$$v' = \frac{Vd - P}{d - d'}.$$

Pentru a găsi proporțiile finale observăm, că după ce am extras cantitatea v'' din amestecul primitiv a rămas: $v - \frac{vv''}{V}$ lichid de densitatea d și $v' - \frac{v'v''}{V}$ lichid de densitatea d'. După prima operație vom avea: $v - \frac{vv''}{V} + v''$ lichid de densitatea d, volumul celuilalt rămînînd neschimbat. Din acest nou amestec extrăgînd volumul v'', am scos: $\left(v + v'' - \frac{vv''}{V}\right)\frac{v''}{V}$ lichid de densitatea d și $\left(v' - \frac{v'v''}{V}\right)\frac{v''}{V}$ lichid de densitatea d'. Prin urmare la sfîrșit vom avea lichid de densitatea d:

$$v_1 = v + v - \frac{vv''}{V} - \left(v + v'' - \frac{vv''}{V}\right)\frac{v''}{V} = \left(v + v'' - \frac{vv''}{V}\right)\left(1 - \frac{v''}{V}\right),$$ lichid de densitatea d':

$$v_2 = v' - \frac{v'v''}{V} - \left(v' - \frac{v'v''}{V}\right)\frac{v''}{V} + v'' = v'' + \left(v - \frac{v'v''}{V}\right)\left(1 - \frac{v''}{V}\right).$$

Problema 312 *) — *Să se construiască un triunghiu avînd un vîrf într-un punct dat celelalte două vîrfuri pe două circonferințe date și cunoscînd poziția punctului de întîlnire a medianelor triunghiului.*

(Bogdan Ioneseu)

Soluție dată de D-șoara **M. M. Rugescu** și D-nii: **G. G. Urechia, N. G. Muzicescu** (Iași), **V. V. Cambureanu,** (Bârlad), **N. G. Alexandrescu** și **G. C. Dobrovici** (Bârlad), **G. Manoliu, St. Popovici, Al. Opresecu.**

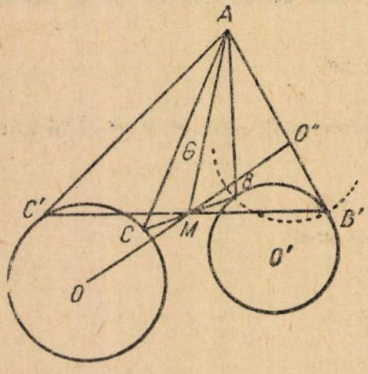


Fig. 312

Fie A, vîrful dat, G punctul de întîlnire a medianelor și O', O cercurile pe care se vor afla respectiv vîrfurile B. C. se prelungește AG pînă în M, așa ca $GM = \frac{AG}{2}$; M e mijlocul laturei BC. Vîrful triunghiului, care se află pe cercul O' e simetric, în raport cu M, cu vîrful care se află pe cercul O; însă simetricul ori cărui punct al cercului O, în raport cu M, se află pe un cerc O'', cu o rază egală cu a cercului O și așa ca $O''M = OM$. Cercul O'' taie cercul O' în punctele B, B', ale căror simetrice, în raport cu M, sînt punctele C și C' de pe cercul O. Soluțiunile problemei sînt triunghiurile ABC și $AB'C'$.

Dacă cercurile O'', O' ar fi fost tangente am fi avut o soluție, și dacă nu s-ar fi tăiat, nu am fi avut nici una.

*) Extras din Gazeta Matematică vol. IV. (1898), pag. 115.

Problema 327 *) — *Să dă pe un cerc de centru O, un punct fix A, din care ca centru se descrie un alt cerc C fix. Fie T o tangentă mobilă a cercului C. Există, relativ la fiecare tangentă T, două cercuri C_1 și C_2 cu centrele pe cercul O și având cu acest din urmă cerc tangenta T ca ax radical. Să se arate că punctul A are aceiași putere în raport cu toate cercurile C_1 și C_2*

(G. Țițeica)

Soluție dată de D-nii: **T. Lalescu, N. G. Alexandrescu** și **Șt. N. Mirea.**
În această problemă e avantajos a însemna segmentele cu semnele lor, așa în cît:

$$AB = -BA$$

Să numim p_1 și p_2 puterile punctului A în raport cu cercurile C_1 și C_2. Enunțiul cere să se arate că, atît p_1 cît și p_2 păstrează aceleași valori oricare ar fi tangenta T.

Fie R, R_1 și R_2 razele cercurilor C, C_1 și C_2 care corespund unei poziții determinate a tangentei T. Centrele C_1 și C_2 sînt extremitățile diametrului cercului O perpendicular pe tangenta T. Să însemnăm cu M intersecția tangentei T cu diametrul C_1C_2, și cu A' proiecția punctului A pe același diametru.

Avem:
$$p_1 = AC_1^2 - R_1^2. \tag{1}$$

Însă în triunghiul dreptunghic AC_1C_2:

$$AC_1^2 = C_1C_2 \cdot C_1A$$

$$AC_1^2 = 2C_1O \cdot C_1A' \tag{2}$$

Să calculăm acum pe R_1. De oare-ce punctul M e pe axul radical al cercurilor O și C_1, avem:

$$R_1^2 - R^2 = C_1M^2 - OM^2 = (C_1M + OM)(C_1M - OM) = C_1O(C_1M + OM) =$$
$$= C_1O(2C_1M + OC_1)$$

însă $\quad C_1O \cdot OC_1 = -OC_1^2 = -R^2$

prin urmare:

$$R_1^2 = 2C_1O \cdot C_1M \tag{3}$$

și în același mod s-ar obține:

$$R_2^2 = 2C_2O \cdot C_2M \tag{4}$$

Se va obține prin urmare p_1 înlocuind în (1) pe AC_1 și R_1 cu valorile lor date de (2) și (3). Găsim:

$$p_1 = 2C_1O(C_1A' - C_1M) = 2C_1O(MC_1 + C_1A') = 2C_1O \cdot MA'$$

și în același mod

$$p_1 = 2C_1O \cdot MA'$$

Din aceste valori se vede că p_1 și p_2 nu depind de tangenta T, căci C_1O și C_2O sînt egale în valoare absolută cu raza R a cercului O_2 iar MA' e egală iarăși, în valoare absolută cu distanța de la punctul A la tangentă, cu alte cuvinte cu raza cercului fix C descris din A ca centru.

Observări. 1°. — Puterile p_1 și p_2 ale punctului A în raport cu cercurile C_1 și C_2, care corespund unei tangente T sînt egale și de semne contrare, pentru că

$$C_1O = -C_2O$$

2°. — E posibil ca pentru unele poziții ale tangentei T să n'avem două cercuri C_1 și C_2. Într'adevăr, în expresiunile lui R_1 și R_2 date de (3) și (4) intră cantitățile C_1O și C_2O de semne contrare. Dacă cantitățile C_1M și C_2M sînt de același semn, adică dacă punctul M se află pe prelungirea segmentului C_1C_2, în care caz tangenta T e exterioară cercului O, atunci R_1^2 și R_2^2 sînt de semne contrare și prin urmare unul din cercurile C_1 și C_2 încetează de a mai exista. E clar că dacă tangenta T taie cercul O, atunci există ambele cercuri C_1 și C_2.

*) Extras din Gazeta Matematică vol VI. (1900) pag. 135.

Problema 475*) — *Se consideră o circonferință cu centrul O și un punct fix A situat pe ea. Dintr-un punct fix M exterior circonferenței se duce o secantă arbitrară MBC Să se găsească locul geometric al punctului de întîlnire al înălțimilor triunghiului ABC.*

(Tr. Lalescu)

I. *Soluție* dată de D-nii: **D. I. Mehedinți, G. Opresco** (Elevi Școala Specială de Artilerie și Geniu) și **N. G. Ciupercă.**

Fie H punctul de întîlnire al înălțimilor și D mijlocul laturei BC. Se știe că $AH = 2OD$. Din A și H să ducem paralele respectiv cu OM și DM și fie P punctul lor de intersecție. Triunghiul AHP este asemenea cu ODM, raportul de asemănare fiind 2/1. Rezultă de aici că latura AP este constantă ca mărime și fixă ca poziție, ca și omoloaga sa OM din triunghiul OMD, iar unghiul AHP fiind drept, urmează că locul punctului H este circonferența descrisă pe AP ca diametru, și anume segmentul RAQ determinat de perpendicularele AR și AQ duse respectiv pe tangentele MI și MN la circonferința O.

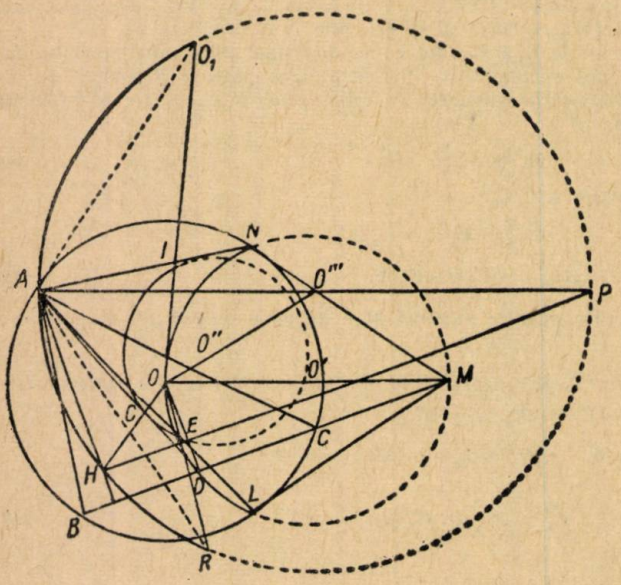


Fig. 475

II. *Soluție* dată de D-nii: **Corneliu P. Ionescu** și **C. N. Georgescu,** (Elevi Școala de Poduri și Șosele).

Fie G punctul de întîlnire al medianelor triunghiului ABC. Se știe că punctele O, G și H sînt în linie dreaptă (dreapta lui Euler), că $OH = 3OG$, iar $AG = 2AD/3$.

Locul punctului D este circonferența O' descrisă pe OM ca diametru, și anume segmentul LON interior circonferenței O. Considerînd atunci mediana AD se vede îndată că locul punctului G este o circonferență O'', omotetică cu circonferența O' avînd punctul A ca centru de omotetie și 2/3 ca raport de omotetie. Pentru a determina pozițiile extreme ale lui G, vom duce AI și AN și vom obține astfel punctele E și I. Locul lui G este deci segmentul EGI din circonferența O''.

Dacă considerăm acum dreapta OH, punctul O fiind fix și G mobil pe circonferența O'', se vede că locul lui H este o circonferență O''', omotetică cu circonferența O'', avînd punctul O ca centru de omotetie și 3/1 ca raport de omotetie [1]). Pentru a obține pozițiile extreme ale lui H, vom duce dreptele OE, OI și obținem astfel punctele R și Q. Locul lui H este deci segmentul RHQ din circonferența O'''.

Dar punctul fix M ar fi fost interior circonferenței O, punctele D, G și H ar fi descris circonferențele întregi O' O'' și O'''.

Notă. Alte soluții de D-nii: **A. M. Tănăsescu, Victor Stoica, Constant C. Georgescu, St. N. Mirea, Al. Roșu, G. Panajotopol** și **I. I. Nădejde.**

Problema 491. [2]) — *Fie $F(x, y)$ o fracțiune rațională în raport cu x, y. Să se arate că putem în totdeauna determina 3 polinoame $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ întregi și simetrice în raport cu x și y, astfel în cît să avem:*

$$F(x, y) = \frac{P(x, y) + (x - y)\,Q(x, y)}{R(x, y)}$$

(A. G. Ioachimescu)

---

*) Extras din Gazeta Matematică Vol. VI. (1900) pag. 47.

[1]) Se poate ușor demonstra că circonferența O''' este tot circonferența descrisă pe AP ca diametru din prima soluție.

[2]) Extras din Gazeta Matematică Vol. VI. (1901) pag. 161.

Soluţiune dată de D-nul **Tr. Lalescu** (Elev Şcoala de Poduri şi Şosele). Orice fracţiune raţională este egală cu citul a două polinoame, fie deci:

$$F(x, y) = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} \tag{1}$$

f şi φ reprezentînd nişte polinoame. Schimbînd pe x cu y avem:

$$F(y, x) = \frac{f(y, x)}{\varphi(y, x)} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) deducem:

$$F(x, y) + F(y, x) = \frac{f(x, y)\,\varphi(y, x) + f(y, x)\,\varphi(x \cdot y)}{\varphi(x, y)\,\varphi(y, x)} \tag{3}$$

$$F(x, y) - F(y, x) = \frac{f(x, y)\,\varphi(y, x) - f(y, x)\,\varphi(x, y)}{\varphi(x, y)\,\varphi(y, x)} \tag{4}$$

Numărătorul şi numitorul membrului al doilea din (3) sînt evident două polinoame simetrice în raport cu x, y; să le reprezentăm respectiv cu $2P(x, y)$ şi $R(x, y)$. Numărătorul membrului al doilea din (4) se reduce la zero, cînd facem $x = y$, deci el este divizibil cu $x-y$; iar citul va fi un polinom simetric în raport cu x, y, din cauză că dacă schimbăm pe x cu y, deîmpărţitul şi împărţitorul schimbă numai de semn, deci citul va rămîne neschimbat. Să reprezentăm acest cît prin $2Q(x, y)$, vom avea:

$$F(x, y) + F(y\,x) = \frac{2\,P(x, y)}{R(x, y)}$$

$$F(x, y) - F(y, x) = \frac{2\,(x, y)\,Q(x, y)}{R(x, y)}\,;$$

de unde prin adunare:

$$F(x, y) = \frac{P(x, y) + (x - y)\,Q(x, y)}{R(x, y)}$$

P, Q şi R fiind nişte polinoame întregi şi simetrice.

D-nii **Şt. N. Mirea** şi **G. T. Manolescu** (Studenţi) au trimes de asemenea foarte bune soluţiuni la această chestiune.

Problema 508 *). — *Fie a, b, c, R laturile şi raza cerului circumscris unui triunghiu oare-care. Să se demonstreze că expresiunile:*

$$R^2 + a^2 + b^2 - c^2$$
$$R^2 + b^2 + c^2 - a^2$$
$$R^2 + c^2 + a^2 - b^2$$

sînt totdeauna pozitive. Pentru un acelaşi triunghiu numai una din ele poate fi nulă; să se găsească condiţiunile ce trebuie să îndeplinească triunghiul pentru ca una din aceste expresiuni să se anuleze.

(V. Cristescu)

I. *Soluţie* dată de D-nii: **Traian Lalescu** (Elev Anul Preparator, Şcoala de Poduri şi **Ovidiu N. Ţino** (Elev Liceul Real, Brăila).

Să considerăm un triunghiu ABC; fie H ortocentrul său, O şi centrul cercului circumscris şi al cercului celor 9 puncte, M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB şi Q mijlocul segmentului AH.

Să calculăm lungimea segmentului. $A\,\omega$ care uneşte vîrful A cu centrul cerului celor 9 puncte.

Se ştie că ω este mijlocul segmentului MQ şi că segmentul MQ fiind un diametru al cercului ω, este egal cu R. Dacă considerăm triunghiurile AMQ, ABC, teorema medianei ne dă respectiv:

$$2\,A\omega^2 + R^2/2 = AM^2 + AH^2 \quad , \quad 2\,AM^2 + a^2/2 = b^2 + c^2$$

Se ştie însă că:

$$AH^2 = 4R^2 - a^2$$

Ţinînd seamă de ultimele două egalităţi, prima egalitate devine:

$$4A\omega^2 = R^2 + b^2 + c^2 - a^2$$

---

*) Extras din **Gazeta matematică** Vol. VI. (1901) pag. 162.

Tot astfel vom avea: $4B\omega^2 = R^2 + c^2 + a^2 - b^2$

$4C\omega^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$

Expresiile date fiind deci egale cu patratele îndoitului distanţelor $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$, vor fi totdeauna pozitive; una din ele, spre exemplu $R^2 + b^2 + c^2 - a^2$ nu se va anula, de cît dacă segmentul $A\omega$ se va reduce la un singur punct, adică dacă centrul ω al cercului celor 9 puncte se va găsi în vîrful A al triunghiului ABC. Cum el nu se poate găsi în acelaşi timp în două vîrfuri (căci atunci triunghiul ar deveni o dreaptă), rezultă că pentru un acelaşi triunghiu numai una singură din expresiile date se poate anula.

Să vedem acum la ce se reduce condiţia ca centrul cercului celor 9 puncte să se găsească spre ex. în vîrful A al triunghiului ABC. Se ştie că acest cerc trece prin mijloacele N şi P ale laturilor CA, AB şi dacă el are centrul în A, rezultă că avem $AN = AP$ ca raze şi deci $AC = AB$; triunghiul ABC este deci isoscel. Pe d altă parte cercul ω trecînd şi prin mijlocul M al lui BC, va trebui să avem:

$$AM = AP = MN = AN = PM$$

Triunghiurile AMN, AMP sînt deci echilaterale; unghiurile MAN, MAP sînt deci fie-care de cîte 60° şi prin urmare unghiul $A = 120°$; rezultă atunci că $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 30°$.

Pentru ca una din expresiile date să se anuleze, trebuie deci ca triunghiul să fie isoscel şi să aibă unghiul de la vîrf de 120°. In acest caz cele-lalte două expresiuni devin egale între ele şi egale fie-care cu $4a^2$, a fiind latura egală a triunghiului isoscel.

II. *Soluţie* dată de d-nul **A. M. Tănăsescu** (Elev Anul III, Şcoala Militară, Iaşi).

Să ştie că într-un triunghiu patratul unei laturi este egal cu suma patratelor celor-lalte două, plus de două ori produsul uneia din acestea prin proecţiunea celei-lalte pe dînsa, dacă latura considerată se opune la un unghi obtus, sau minus acest produs, dacă ea se opune la un unghiu ascuţit. Este evident deci că dacă triunghiul dat are toate unghiurile ascuţite, expresiile date sînt pozitive. Dacă triunghiul dat are unghiul C de exemplu obtus, expresia a doua şi a tr i vor fi pozitive, prima însă va fi egală cu:

$$R^2 - 2am \tag{1}$$

însemnînd prin m proecţia laturei b pe latura a. Cum însă:

$$a + 2m = 2R \sin (C - B)$$

maximul produsului $2am$ este $R^2 \sin^2 (C - B)$ şi are loc cînd:

$$a = 2m = R \sin (C - B) \tag{2}$$

Maximul produsului $2am$ este deci o cantitate mai mică ca $R\omega$ şi prin urmare expresia 1) este totdeauna pozitivă şi nu poate fi numai de cît cînd avem:

$$\begin{aligned} &R^2 - R^2 \sin^2 (C - B) = R^2 \cos^2 (B - C) = 0 \\ &\cos (C - B) = 0, \qquad \text{deci } C - B = 90° \end{aligned} \tag{3}$$

Observînd că $m = -b \cos C$, a doua din egalităţile (2) ne dă atunci

$$-2b \cos C = R. \qquad \text{deci } 4 \sin B \cos C = -1$$

şi ţinînd seamă de relaţiunea (3), obţinem:

$$\sin^2 B = 1/4$$

de unde deducem, observînd că unghiul C e obtus, şi deci B trebue să fie scuţit: $\sin B = 1/2$

$$\sin B = 1/2 \qquad \text{deci } B \sphericalangle 30°$$

Rezultă actunci că $\sphericalangle C = 120°$ şi $\sphericalangle A = 30°$.

Pentru ca una din expresiile date să se anuleze, trebue deci ca triunghiul să fie isoscel şi unghiul de la vîrf egal cu 120°; mai rezultă încă că numai una din expresiile considerate poate fi nulă, pentru un acelaşi triunghiu.

Observaţie. Dacă înlocuim pe a, b, c respectiv prin $2R \sin A$, $2R \sin B$, $2R \sin C$, expresiile date se pot pune sub forma:

$$R^2 + a^2 + b^2 - c^2 = R^2 [1 + 8 \sin A \sin B \sin C] = R^2 [2 \cos C + \cos (A - B)]^2 + R^2 \sin^2 (A - B)$$
$$R^2 + b^2 + c^2 - a^2 = R^2 [1 + 8 \sin B \sin \cos A] = R^2 [2 \cos A + \cos (B - C)]^2 + R^2 \sin^2 (B - C)$$
$$R^2 + c^2 + a^2 - b^2 = R^2 [1 + 8 \sin C \sin A \cos B] = R^2 [2 \cos B + \cos (C - A]^2 + R^2 \sin^2 (C - A).$$

Expresiile date sînt deci pozitive, căci fie-care din ele este egală cu o sumă de două patrate.

Pentru ca una din ele, spre exemplu prima, să se anuleze trebue să avem:

$$2 \cos C + \cos (A - B) = 0, \qquad \text{şi} \qquad \sin (A - B) = 0$$

Din ultima egalitate deducem $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, şi atunci prima dă ne:

$$\cos C = -1/2 \qquad \text{deci } \sphericalangle C = 120°, \qquad \text{iar } \sphericalangle A = \sphericalangle B = 30°.$$

Prin urmare pentru ca una din expresiile date să fie multă, trebue la laturile triunghiului dat să fie proporţionale cu $\sqrt{3}$, 1, 1. Mai rezultă încă, că pentru un acelaşi triunghiu, numai una din ele poate fi nulă. **(V. C.)**

DESPRE TETRAEDRU

MIHAI I. POPESCU

student, Inst. Construcții București

ÎN rîndurile de față, vor fi expuse unele proprietăți de bază ale tetraedrului, necesare în rezolvarea unor probleme din geometria tetraedrului.

Să considerăm tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ și să facem următoarele notații $\overline{A_iA_j} = a_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j$.

1. Cîteva proprietăți generale, asemănătoare unora întîlnite la triunghi

a) Planele mediatoare muchiilor unui tetraedru au un punct comun.

Fie (Δ) dreapta de intersecție a planelor mediatoare muchiilor A_2A_3 și A_2A_4. Existența dreptei (Δ) ne este garantată de faptul că punctele A_2, A_3, A_4 nu sînt coliniare. Se observă imediat că (Δ) este perpendiculară pe planul $A_2A_3A_4$ și cum punctele ei sînt egal depărtate de vîrfurile A_3 și A_4, rezultă că ea va fi conținută și de planul mediator lui A_3A_4. Să notăm cu 0 punctul unde (Δ) înțeapă planul mediator lui A_1A_2. Se deduce ușor că 0 este egal distanțat de vîrfurile tetraedrului, prin urmare el aparține tuturor planelor mediatoare muchiilor tetraedrului. El se proiectează pe fețele tetraedrului în centrele cercurilor circumscrise acestor fețe.

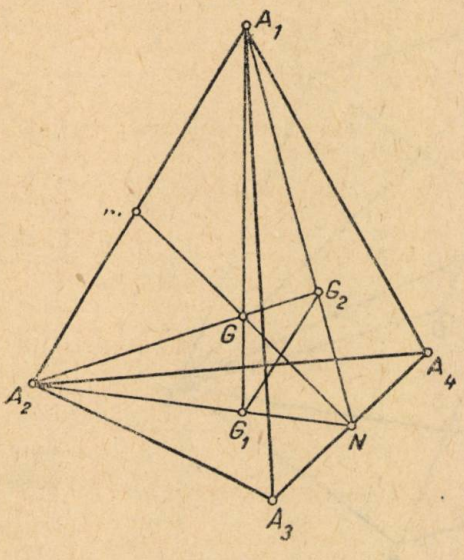


Fig. 1

b) *Planele bisectoare interioare ale diedrelor unui tetraedru au un punct comun.*

Fie I punctul unde se întîlnesc planele bisectoare diedrelor cu muchiile A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2.

Se observă că I se găsește la egală distanță de fețele tetraedrului, prin urmare el va aparține și celorlalte plane bisectoare interioare. I este centrul sferei înscrise tetraedrului. Să considerăm acum planele bisectoare interioare ale diedrelor de muchii respectiv A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 și planele bisectoare exterioare ale diedrelor cu muchiile A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2. Printr-un raționament analog, deducem că aceste 6 plane au de asemenea un punct comun I_1, situat în exterioarul tetraedrului și anume, în triedrul cu vîrful A_1. Acest punct este centrul unei sfere exînscrise tetraedrului, relativă vîrfului A_1. La fel se pun în evidență punctele I_2, I_3, I_4.

c) *Medianele unui tetraedru sînt concurente.* Prin mediană se înțelege dreapta ce unește vîrful unui tetraedru cu centrul de greutate al feței opuse.

Să notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale fețelor ce se opun respectiv vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4 iar cu M și N mijloacele muchiilor A_1A_2 și A_3A_4 (fig. 1).

În triunghiul A_1A_2N avem:

$$\frac{NG_1}{NA_2} = \frac{NG_2}{NA_1} = \frac{G_1G_2}{A_1A_2} = \frac{1}{3}, \quad (G_1G_2 \parallel A_1A_1)$$

Fie $G \equiv (A_1G_1, A_2G_2)$. Rezultă: $\frac{G_1G}{GA_1} = \frac{G_2G}{GA_2} = \frac{1}{3}$

La fel se arată că și medianele A_3G_3, A_4G_4 trec prin punctul G (situat pe AG_1 astfel încît $\frac{G_1G}{GA_1} = \frac{1}{3}$).

Punctul G se numește centrul de greutate al tetraedrului.

Dreapta ce unește mijloacele a două muchii opuse într-un tetraedru se numește *bimediană*.

În triunghiul A_1NA_2 se observă că MN trece prin G și există egalitatea $\overline{MG} = \overline{NG}$.

Prin urmare, putem enunța următoarea proprietate: *Bimedianele unui tetraedru sînt concurente în centrul de greutate al tetraedrului, care este mijlocul fiecăreia dintre ele.*

d) În general, înălțimile unui tetraedru nu sînt concurente.

Să găsim atunci tetraedrul în care înălțimile sînt concurente. În acest

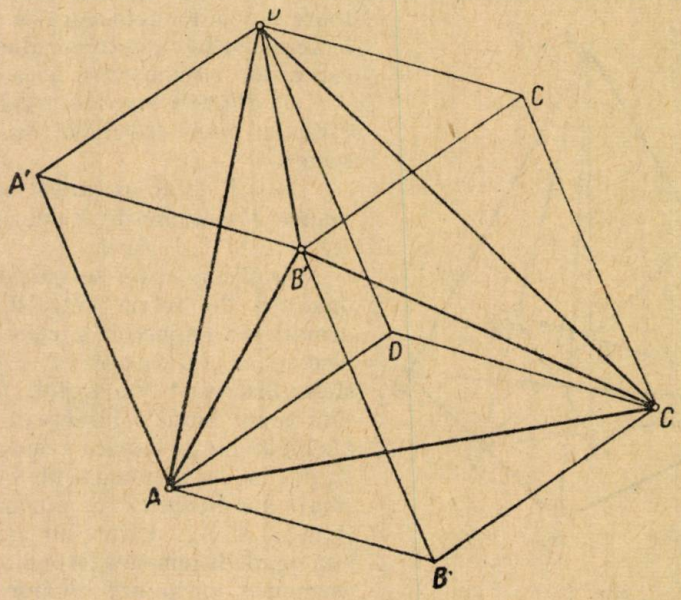


Fig. 2

scop, considerăm paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ cu fețele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ romburi (fig. 2).

Ataşăm acestui paralelipiped tetraedrul $AB'CD'$, cu muchiile opuse AC, $B'D'$ perpendiculare între ele.

Dacă un tetraedru are două perechi de muchii opuse perpendiculare, atunci și muchiile care compun a treia pereche sînt perpendiculare.

În adevăr, dacă paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ are două perechi de fețe opuse compuse din romburi, are și pe a treia pereche de fețe compuse din romburi.

Se numește tetraedru *ortocentric*, tetraedrul cu muchiile opuse perpendiculare între ele.

Într-un tetraedru ortocentric, înălțimile sînt concurente.

Revenim la notațiile inițiale. Considerăm tetraedrul ortocentric $A_1A_2A_3A_4$ și ducem planele ce trec respectiv prin A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 și sînt perpendiculare pe muchiile opuse. Notăm cu A_2', A_3', A_4' intersecțiile acestor plane cu muchiile pe care ele sînt perpendiculare (fig. 3).

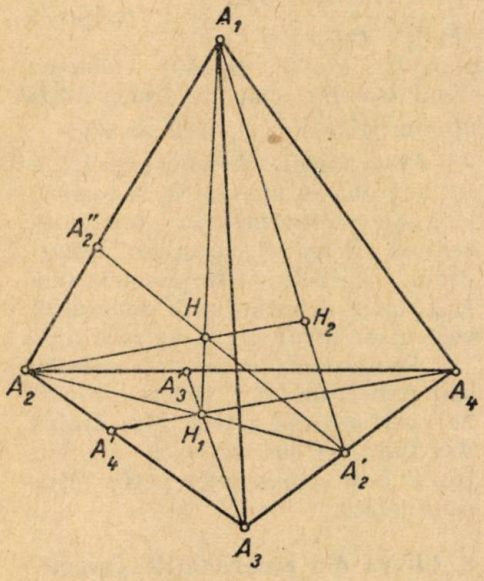


Fig. 3

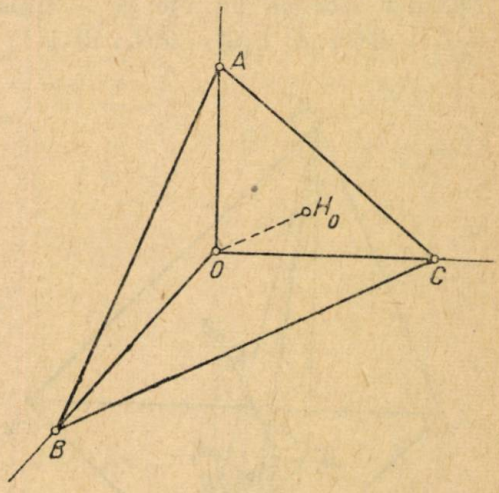


Fig. 4

Se observă că A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4' sînt înălțimi în triunghiul $A_2A_3A_4$ și notînd cu H_1 punctul lor de concurență, rezultă că cele 3 plane considerate au dreapta A_1H_1 comună.

De asemenea, se deduce că A_1H_1 este o înălțime a tetraedrului. Planul dus prin A_1A_2 perpendicular pe muchia A_3A_4 este perpendicular pe orice plan ce trece prin A_3A_4, prin urmare și pe $A_1A_3A_4$. Înălțimea A_2H_2 a tetraedrului este conținută în planul $A_1A_2A_2'$, deci înălțimile A_1H_1 și A_2H_2 se întîlnesc. Se pot face demonstrații analoage pentru orice pereche de înălțimi; prin urmare înălțimile tetraedrului sînt concurente două cîte două și cum nu pot fi conținute în același plan, rezultă că au un punct comun. Punctul lor de concurență se notează cu H și se numește ortocentrul tetraedrului.

Mai rezultă că într-un tetraedru ortocentric vîrfurile se proiectează pe fețele opuse în ortocentrele lor.

Caz particular: Considerăm tetraedrul $OABC$ cu muchiile OA, OB, OC perpendiculare între ele două cîte două și notăm cu H_0 proiecția lui O pe ABC. Punctul H_0 este ortocentrul triunghiului ABC (fig. 4).

e) Fie H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ care formează feţele unui tetraedru.

Planele care proiectează dreptele A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 *respectiv pe feţele opuse vîrfurilor* A_1, A_2, A_3, A_4 *au un punct comun.*

În adevăr, fie O_1 şi G_1 centrul cercului circumscris şi centrul de greutate al triunghiului $A_2A_3A_4$, iar A_1' proiecţia lui A_1 pe faţa opusă. Mai notăm cu P_1 mijlocul lui $A_1'H_1$, iar pe $A_1'G_1$ considerăm punctul G' astfel că $\frac{G_1G'}{G'A_1'} = \frac{1}{3}$ (fig. 5).

Se ştie că punctele O_1, G_1, H_1 sînt coliniare *(dreapta lui Euler a triunghiului* $A_2A_3A_4$*)* şi există relaţia $\frac{O_1G_1}{G_1H_1} = \frac{1}{2}$ iar $\frac{P_1A_1'}{P_1H_1} \cdot \frac{O_1H_1}{O_1G_1} \cdot \frac{G'G_1}{G'A_1'} = 1$ (reciproca teoremei lui Menelaus). Prin urmare punctele P_1, G', O_1 sînt coliniare. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului $O_1P_1H_1$ tăiat de transversala $G_1G'A_1'$ obţinem: $\overline{P_1G'} = \overline{G'O_1}$, deci P_1 este simetricul lui O_1 faţă de G'.

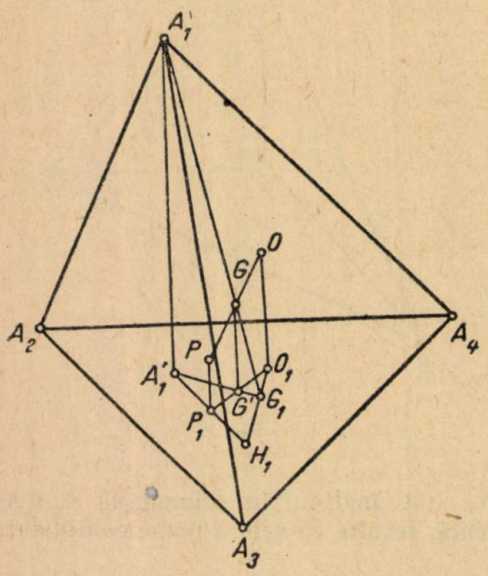


Fig. 5

Perpendicularele ridicate pe feţele tetraedrului în punctul O_1 şi analoagele sale se întîlnesc în punctul O, centrul sferei circumscrise tetraedrului; cele ridicate în punctele analoage lui G' se întîlnesc în punctul G, centrul de greutate al tetraedrului.

Prin urmare P_1 şi analoagele lui sînt proiecţiile lui P, simetricul lui O în raport cu G, pe feţele tetraedrului. Aşa fiind, se observă uşor că punctul P este comun celor patru plane considerate.

2. Cîteva din proprietăţile caracteristice tetraedrului ortocentric

a) *Ortocentrul, centrul de greutate şi centrul sferei circumscrise unui tetraedru ortocentric, sînt trei puncte coliniare.*

Vom adopta notaţiile de la punctul precedent şi vom face observaţia că punctele A_1 şi O se proiectează pe planul $A_2A_3A_4$ în H_1 şi O_1. După cum se ştie, ortocentrul H al tetraedrului se găseşte pe A_1H_1. Deci punctele A_1, G_1, O şi H sînt coplanare; cu alte cuvinte, dreapta HO întîlneşte mediana A_1G_1. La fel se arată că dreapta HO întîlneşte fiecare mediană a tetraedrului şi cum medianele nu aparţin unui acelaşi plan, rezultă că dreapta HO trece prin punctul G, comun medianelor.

b) *Intr-un tetraedru ortocentric suma patratelor muchiilor opuse e aceeaşi pentru orice pereche de muchii opuse.*

În adevăr, ducînd prin fiecare muchie un plan paralel cu muchia opusă obţinem un paralelipiped cu laturile egale (fig. 2). De aici se deduce că suma

patratelor a două muchii opuse este egală cu de patru ori patratul muchiei paralelipipedului astfel construit.

c) *Perpendicularele comune muchiilor opuse într-un tetraedru ortocentric trec prin ortocentrul tetraedrului.*

Pentru aceasta este suficient să arătăm că dreapta $A_2' H A_2''$ este perpendiculara comună muchiilor A_1A_2 și A_3A_4 (fig. 3). În adevăr, H fiind ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_2'$ rezultă că: $A_2'H \perp A_1A_2$. De asemenea, dreapta A_3A_4 fiind perpendiculară pe planul $A_1A_2A_2'$ atrage $A_2'H \perp A_3A_4$.

d) *Într-un tetraedru ortocentric suma unghiurilor diedre și a unghiurilor pe care le fac muchiile cu fețele, este egală cu 12 unghiuri drepte.*

Pentru aceasta să observăm că în triunghiul $A_1A_2A_2'$ (fig. 3), unghiu $A_1A_2'A_2$ este măsura unghiului diedru A_3A_4, iar unghiurile pe care le face A_1A_2 cu fețele sînt tocmai unghiurile $A_1A_2A_2'$ și $A_2A_1A_2'$. Prin urmare, pentru o muchie și unghiul diedru corespunzător, avem două unghiuri drepte; de unde rezultă propoziția enunțată.

3. Cîteva relații metrice în legătură cu un tetraedru [1])

a) Fie B_2, B_2, B_3, B_4 punctele unde muchiile A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 ale unui tetraedru înțeapă un plan oarecare (P). Există relația (lui Menelaus):

$$\frac{B_1A_1}{B_1A_2} \cdot \frac{B_2A_2}{B_2A_3} \cdot \frac{B_3A_3}{B_3A_4} \cdot \frac{B_4A_4}{B_4A_1} = 1$$

Pentru a o dovedi, să notăm cu d_1, d_2, d_3, d_4 distanțele vîrfurilor tetraedrului la planul (P). Se observă că:

$$\frac{B_1A_1}{B_1A_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad \frac{B_2A_2}{B_2A_3} = \frac{d_2}{d_3}, \quad \frac{B_3A_3}{B_3A_4} = \frac{d_3}{d_4}, \quad \frac{B_4A_4}{B_4A_1} = \frac{d_4}{d_1}$$

și justificarea este imediată.

Să presupunem acum că fiind date punctele B_1, B_2, B_3, B_4 situate respectiv pe muchiile A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 ale unui tetraedru, există relația de mai sus. În acest caz, vom proba că punctele B_1, B_2, B_3, B_4 sînt coplanare.

În adevăr, scriind relația lui Menelaus pentru planul $B_1B_2B_3$ și comparînd-o cu cea dată, căpătăm $\frac{B_4A_4}{B_4A_1} = \frac{B_4'A_4}{B_4'A_1}$ (B' fiind punctul unde A_1A_4 înțeapă planul $B_1B_2B_3$). Deci $B_4' \equiv B_4$.

Așa fiind, putem conchide că relația lui Menelaus este condiția necesară și suficientă ca patru puncte situate pe muchiile unui teraedru (ce închid un patrulater strîmb) să fie coplanare.

b) Să notăm cu m_1, m_2, m_3, m_4 lungimile medianelor tetraedrului. Aplicăm relația lui Stewart în triunghiul A_1A_2N (fig. 1) și avem:

$$\overline{A_1A_2^2} \cdot \overline{G_1N} + \overline{A_1N^2} \cdot \overline{G_1A_2} = \overline{A_1G_1^2} \cdot \overline{A_2N} + \overline{NG_1} \cdot \overline{G_1A_2} \cdot \overline{A_2N}.$$

---

[1]) N. N. Mihăilanu *Geometria tetraedrului din* «Gazeta Matematică — supliment cu exerciții», Anul XII, Nr. 2, 3, 4, 5.

Ţinînd seamă că:

$$\overline{A_1G_1} = m_1,\quad \overline{G_1A_2} = \frac{2}{3}\overline{A_2N},\quad \overline{G_1N} = \frac{1}{3}\overline{A_2N},\quad \overline{A_1N} = \frac{1}{2}\left(a_{13}^2 + a_{14}^2 - \frac{a_{34}^2}{2}\right),$$

$$\overline{A_2N} = \frac{1}{2}\left(a_{23}^2 + a_{24}^2 - \frac{a_{34}^2}{2}\right)$$

deducem:

$$m_1^2 = \frac{1}{3}(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2) - \frac{1}{9}(a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)$$

relaţie care dă o mediană a nui tetraedru în funcţie de muchiile teraedrului.

Scriind şi celelalte relaţii analoage şi adunîndu-le, obţinem următorul rezultat:

Intr-un tetraedru, suma patratelor medianelor este egală cu $\frac{4}{9}$ *din suma patratelor muchiilor.*

c) Lungimea unei bimediane în funcţie de muchiile teraedrului [1]).

Vom considera tot triunghiul A_1A_2N (fig. 1) şi îi vom aplica relaţia medianei:

$$\overline{MN}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{A_1N}^2 + \overline{A_2N}^2 - \frac{\overline{A_1A_2}^2}{2}\right).$$

Ţinînd şi de data aceasta seamă de relaţiile amintite mai sus, găsim:

$$\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}(a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 - a_{12}^2 - a_{34}^2).$$

Aşa fiind, cu ajutorul proprietăţii (2, b) deducem:

— Într-un teraedru ortocentric bimedianele sînt egale.

— Într-un tetraedru oarecare, suma patratelor bimedianelor este a patra parte din suma patratelor muchiilor.

d) Să notăm cu S_1, S_2, S_3, S_4 ariile feţelor unui tetraedru, iar cu $(\widehat{S_i, S_j})$ unghiul diedru format de feţele cu ariile respectiv S_i, S_j (i, j=1, 2, 3, 4; $j \neq i$).

Aria unei feţe este exprimată prin formula [2])

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2\left[S_2S_3\cos(\widehat{S_2, S_3}) + S_3S_4\cos(\widehat{S_3, S_4}) + S_2S_4\cos(\widehat{S_2, S_4})\right]$$

În adevăr, ţinînd seama că aria proiecţiei ortogonale a unui triunghi pe un plan, este egală cu produsul dintre aria triunghiului şi cosinusul unghiului diedru format de planul triunghiului cu planul considerat, obţinem:

$$S_1 = S_2\cos(\widehat{S_1, S_2}) + S_3\cos(\widehat{S_1, S_3}) + S_4\cos(\widehat{S_1, S_4}) \quad (1)$$

$$S_2 = S_1\cos(\widehat{S_1, S_2}) + S_3\cos(\widehat{S_2, S_3}) + S_4\cos(\widehat{S_2, S_4}) \quad (2)$$

$$S_3 = S_1\cos(\widehat{S_1, S_3}) + S_2\cos(\widehat{S_2, S_3}) + S_4\cos(\widehat{S_3, S_4}) \quad (3)$$

$$S_4 = S_1\cos(\widehat{S_1, S_4}) + S_2\cos(\widehat{S_2, S_4}) + S_3\cos(\widehat{S_3, S_4}). \quad (4)$$

---

[1]) G. Ţiţeica: *Relaţii între elementele unui tetraedru* (Gazeta Matematică Vol. I, (1895) pag. 45.

[2]) Gazeta Matematică şi Fizică — seria B, 1954, Nr. 8, problema 1158.

Inmulțind relațiile (1), 2), (3), (4) respectiv cu S_1, S_2, S_3, S_4 și scăzînd ultimele trei relații din prima, obținem tocmai formula de mai sus.

Cazuri particulare:

— Într-un tetraedru $OABC$ cu muchiile OA, OB, OC perpendiculare între ele două cîte două (fig. 4), există următoarea relație între arii:

$$(OAB)^2 + (OBC)^2 + (OCA)^2 = (ABC)^2$$

— Dacă tetraedrul considerat este echifacial (cu fețele — triunghiuri egale) relația noastră devine:

$$\cos(\widehat{S_1, S_2}) + \cos(\widehat{S_3, S_4}) + \cos(\widehat{S_4, S_2}) = 1.$$

Diedrele muchiilor opuse fiind egale, rezultă că avem și

$$\cos(\widehat{S_1, S_2}) + \cos(\widehat{S_1, S_3}) + \cos(\widehat{S_1, S_4}) = 1.$$

4. **Cîteva considerații de volume privind tetraedul**

a) Să notăm cu M punctul unde muchia A_1A_4 înțeapă un plan (P) dus prin dreapta A_2A_3 (fig. 6). Putem scrie:

$$\frac{(A_1A_2A_3M)}{(A_2A_3A_4M)} = \frac{(MA_2A_3)\cdot A_1A_1'}{(MA_2A_3)\cdot A_4A_4'} = \frac{A_1A_1'}{A_4A_3'} = \frac{A_1M}{A_4M}$$

unde am notat cu A_1', A_4' proiecțiile lui A_1, A_4 pe planul (P). Să însemnăm acum cu M' și M'' punctele de proiecție ale lui M respectiv pe fețele $A_1A_2A_3$ și $A_2A_3A_4$. Avem:

$$\frac{(A_1A_2A_3M)}{(A_2A_3A_4M)} = \frac{(A_1A_2A_3)\cdot MM'}{(A_2A_3A_4)\,MM''}.$$

În cazul cînd (P) este un plan bisector al diedrului de muchie A_1A_3, rezultă $MM' = MM''$, iar relațiile scrise mai sus ne conduc la egalitatea:

$$\frac{A_1M}{A_4M} = \frac{(A_1A_2A_3)}{(A_2A_3A_4)}.$$

Deci, într-un tetraedru, planul bisector (interior sau exterior) al unui diedru împarte muchia opusă în părți proporționale cu ariile fețelor ce pleacă din aceeași muchie.

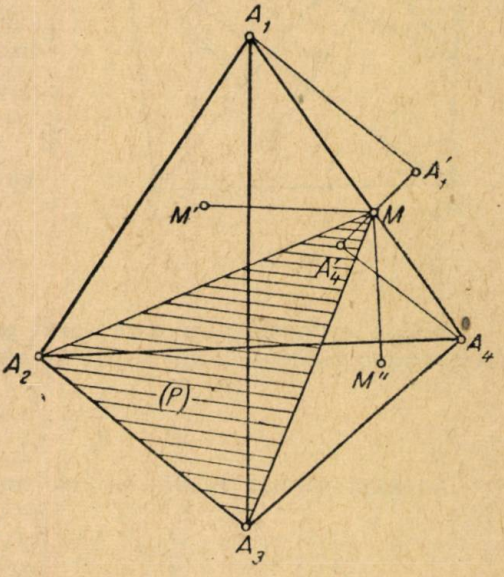


Fig. 6

b) Fie A_2', A_3', A_4' trei puncte situate respectiv pe muchiile A_1A_2 A_1A_3, A_1A_4 ale unui tetraedru.

Vom stabili următoarea relație între volume:

$$\frac{(A_1A_2'A_3'A_4')}{(A_1A_2A_3A_4)} = \frac{\overline{A_1A_2'}\cdot\overline{A_1A_3'}\cdot\overline{A_1A_3'}}{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}.$$

Să considerăm proiecțiile M și N ale punctelor A_2 și A_2' pe planul $A_1A_3A_4$ (fig. 7). Avem relațiile:

$$\frac{A_1A_2'}{A_1A_2} = \frac{A_2'N}{A_2M} \quad \text{și} \quad \frac{(A_1A_3'A_4')}{(A_1A_3A_4)} = \frac{\overline{A_1A_3'} \cdot \overline{A_1A_4'}}{\overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}}.$$

Acum putem scrie următoarele egalități succesive:

$$\frac{(A_1A_2'A_3'A_4')}{(A_1A_2A_3A_4)} = \frac{(A_1A_3'A_4')}{(A_1A_3A_4)} \cdot \frac{\overline{A_2'N}}{\overline{A_2M}} = \frac{\overline{A_1A_2'} \cdot \overline{A_1A_3'} \cdot \overline{A_1A_4'}}{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}}$$

c) P fiind un punct al spațiului, există relația:

$$(A_1A_2A_3A_4) = (PA_1A_2A_3) + (PA_1A_2A_4) + (PA_2A_3A_4) \pm (PA_2A_3A_4)$$

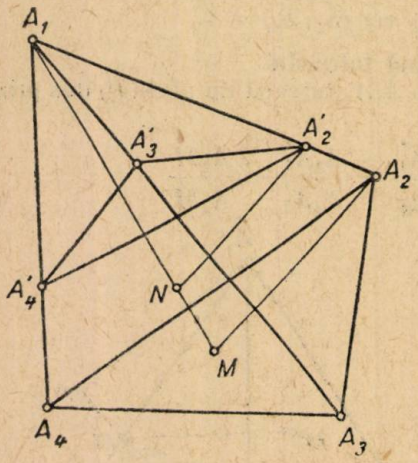


Fig. 7

după cum P este interior sau exterior (anume în triedrul de vîrf A_1) tetraedrului considerat.

Așa fiind, să notăm în tetraedrul considerat prin: h_1, h_2, h_3, h_4 — înălțimile iar R_1, R_2, R_3, R_4 — razele sferelor exînscrise, iar R — raza sferei înscrise.

Aplicînd relația de mai sus pentru punctul I (centrul sferei înscrise tetraedrului) și ținînd seamă că:

$$S_1h_1 = S_2h_2 = S_3h_3 = S_4h_4 = 3(A_1A_2A_3A_4)$$

și

$$(PA_2A_3A_4) = \frac{1}{3}S_1R, \text{ etc., deducem:}^{1})$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}.$$

Același raționament pentru cazul punctului I_p centrul sferei exînscrisă tetraedrului, relativă la vîrful A_1, ne conduce la relația:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_1}.$$

Adunînd această relație cu cele analoage, obținem:[2])

$$2\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2}{R}.$$

În tertaedru mai sunt multe proprietăți, unele din ele fiind analoage cu proprietăți ale triunghiului.

---

[1]) Revista Matematică și Fizică, 1952, nr. 12, problema nr. 715.
[2]) Gazeta Matematică și Fizică — seri B, 1954, nr. 9, pag. 340, problema nr. 1059.

MONTAJ PENTRU DEMONSTRAREA PROPRIETĂȚILOR TUBURILOR ELECTRONICE

LASZLO TIHOMIR

PENTRU pregătirea practică a elevilor, pentru măsurători, precum și la prezentarea experiențelor în timpul lecțiilor este necesar un astfel de montaj cu ajutorul căruia se pot arăta în modul cel mai simplu și cel mai clar proprietățile fundamentale ale tuburilor electronice. În cursul mediu nu poate fi vorba decît de prezentarea modului în care funcționează dioda și trioda, ceea ce simplifică în mod esențial aparatura.

Pentru atingerea acestui scop, s-a observat că este suficient un montaj simplu care poate fi confecționat ușor și acasă (fig. 1).

Pe o planșetă de lemn tare, de mărime aproximativă de 25×30 cm², este schițat montajul alăturat în așa fel ca elementele de montare și capetele de contact să ocupe locurile indicate. Tubul electronic — care este mai convenabil să fie o triodă — avînd un soclu cu picioare, cu factor de amplificare mic și încălzire directă (de exemplu: Tungsram G 407, HR 406, HR 410 sau Philips A 425, A 415, A 409) este susținut de un sistem de cleme de tip vechi. Filamentul este legat de acumulatorul de încălzire prin intermediul unei rezistențe de filament ($R = 30$ Ohm); pentru măsurarea tensiunii de încălzire, respectiv a curentului de încălzire, servesc două banane. Tensiunea anodică

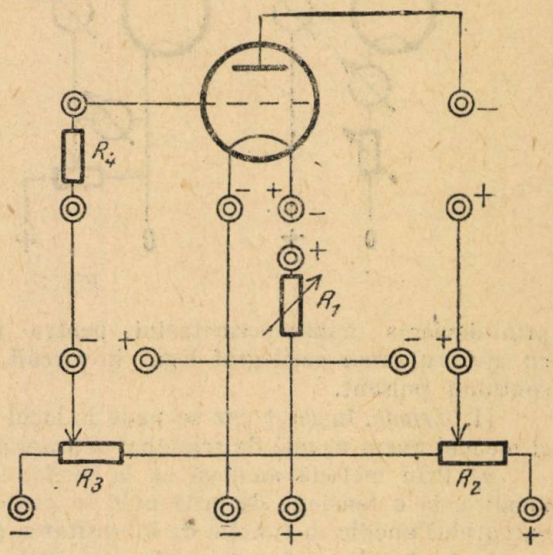


Fig. 1

și cea de grilă necesară, apare pe două potențiometre de sîrmă al căror punct comun se leagă de catodă (la un capăt arbitrar al filamentului), punctele exterioare legîndu-se de o baterie anodică sau un redresor anodic. Tensiunea anodică, variabilă prin intermediul potențiometrului ($R_2 = 30\,000$ Ohmi) și tensiunea de grilă, reglabilă de asemenea cu ajutorul unui potențiometru ($R = 5\,000$ Ohmi) se poate măsura la fel pe cîte două banane. Măsurarea curentului anodic se face la cele două puncte de întrerupere ale circuitului anodic. Tensiunea de comandă necesară folosirii tubului se introduce la cele două contacte ale rezistenței de grilă ($R = 10\,000$ Ohm), care este așezată într-un suport de silită fixat pe planșetă ca să poată fi îndepărtat în caz de nevoie. Aparatul poate fi folosit în următoarele cazuri:

I. — *Dioda*: Dacă unim grila triodei cu anoda printr-o bucată de sîrmă și îndepărtăm rezistența de grilă, trioda joacă rolul diodei (fig. 2).

a) Menținînd la valoare constantă tensiunea anodică și reglînd rezistența de filament pe miliampermetrul legat în circuitul anodic se poate urmări bine,

dependența emisiunii de electroni de temperatura filamentului; pe baza acestuia se poate construi curba ce reprezintă variația curentului anodic în funcție de curentul de filament.

b) Păstrînd constantă intensitatea curentului de filament și mișcînd cursorul potențiometrului care reglează tensiunea anodică se poate domonstra simplu cum crește intensitatea curentului anodic odată cu creșterea tensiunii anodice: astfel se poate construi curba care exprimă dependența curentului anodic de tensiunea anodică.

c) Aplicația practică a diodei se demonstrează prin experiența următoare: tubul primește o tensiune alternativă de circa 110 V între catodă și anodă; dioda se comportă în acest caz, ca redresor de curent; acest lucru se arată

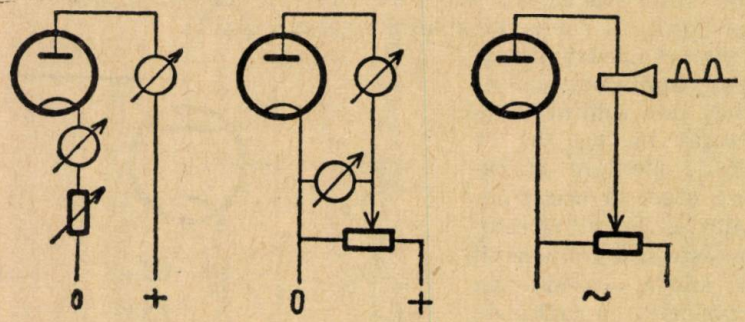


Fig. 2

prin devierea miliampermetrului pentru curent continuu sau mai bine, cu ajutorul unui oscilograf legat în circuit, care descrie graficul curentului continuu pulsant.

II. *Trioda.* în acest caz se pune la locul fixat anterior, rezistența de grilă și nu mai avem nevoie de schimbarea anterioară la tubul electronic (fig. 3).

a) Prin metodă analogă ca la diodă, la valoarea constantă a tensiunii anodice, la o tensiune de grilă nulă se poate construi curba reprezentativă a curentului anodic în funcție de intensitatea curentului de filament.

b) La trioda cu tensiunea de grilă nulă se poate determina graficul variației curentului anodic în funcție de variațiile tensiunii anodice.

c) Avînd tensiunea anodică fixă și schimbînd tensiunea de grilă se poate trasa curba reprezentînd legătura între tensiunea de grilă și curentul anodic (aceasta este o curbă caracteristică a triodei și determină aplicațiile practice ale ei). Mișcînd lent cursorul potențiometrului care reglează tensiunea de grilă, în vecinătatea unei valori determinate a tensiunii de negativare pe miliampermetrul montat în circuitul anodic se pot urmări bine variațiile curentului anodic și astfel se demonstrează efectul de ventil al tensiunii de comandă.

d) Aplicarea triodei ca amplificator de tensiune, adică, ca amplificator de oscilații, se poate demonstra experimental foarte simplu în felul următor: cu tensiunea alternativă de 3—5 V furnizată de un reductor de sonerie, facem să funcționeze mai întîi un oscilograf, apoi aplicăm tensiunea alternativă pe grila triodei la care s-a aplicat o tensiune mică de negativare și aducem în stare de funcțiune oscilografui cu ajutorul curentului anodic; diferența între cele două grafice de undă arată clar rolul de amplificator al triodei. Este util să producem sunet la un difuzor cu ajutorul tensiunii inițiale și apoi cu cel amplificat, în vederea demonstrării amplificării și pe cale acustică. Experiența se

poate efectua şi mai frumos dacă, de exemplu, tubul amplifică oscilaţiile de frecvenţă joasă furnizate de o doză de reproducere.

e) Avînd montajul analog, dacă dăm tubului o tensiune de grilă negativă ceva mai ridicată decît în cazul precedent, oscilograful arată deformarea provo-

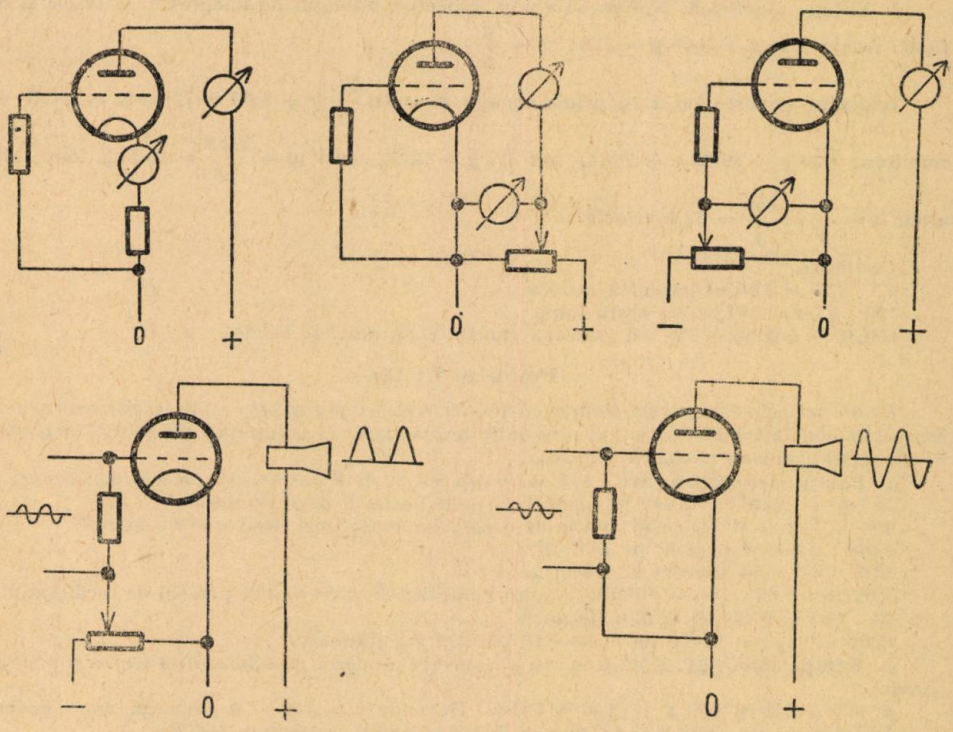


Fig. 3

cată de neliniaritatea cotului inferior al caracteristicei triodei (partea inferioară a sinusoidei se deformează); iar dacă aplicăm o tensiune de negativare şi mai ridicată la grilă observăm efectul de redresare (partea inferioară a sinusoidei lipseşte); în acest caz, tubul joacă rol de redresor anodic.

Acest mic aparat poate fi confecţionat uşor de către elevi, iar învăţămintele experienţelor merită oboseala depusă.

PROBLEME REZOLVATE

Problema E: 587

S-a vîndut fasole 3,20 lei un kg. şi făină cu 3,60 *lei un kg şi s-au încasat* 728 *lei. Să se calculeze ce cantităţi s-au vîndut ştiind că s-a vîndut de trei ori mai multă făină decît fasole.* Verificare.

1. Soluţie aritmetică. Ştiind că s-a vîndut de trei ori mai multă făină decît fasole, înseamnă că la trei kg de făină se ia unul de fasole, deci, cînd voi da 10,80 lei pe făină, dau 3,20 lei pe fasole. Cu totul dau 14 lei. Dar de cîte ori trebuie să iau cîte un kg de fasole şi trei de făină ca să dau 728 lei? Împărţind suma totală de 728 lei la 14 lei voi răspunde şi la

întrebarea de mai sus. Vom afla totodată cîte kg de fasole s-au vîndut. Numărul de kilograme de fasole îl înmulțesc cu trei și vom obține cîte kg de făină s-au vîndut, Astfel avem:

3,60 . 3 = 10,80 lei costul a 3 kg făină

3,20 + 10,80 = 14 lei costa 1 kg de fasole și 3 kg făină

728; 14 = 52 kg fasole

52 . 3 = 156 kg făină.

2. Soluție algebrică. Notăm cu x și y respectiv, numărul de kilograme de fasole și de făină. Avem $3{,}20\,x + 3{,}60\,y = 728$; $x = \frac{y}{3}$.

Înlocuim valoarea lui x în prima ecuație și avem $\frac{3{,}2}{3}\,y + 3{,}60 = 728$ sau scăpînd de numitori, $3{,}20\,y + 10{,}80\,y = 2184$, sau $14\,y = 2184$, deci $y = \frac{2184}{14} = 156$ kg. făină. Mai avem $x = \frac{y}{3} = \frac{156}{3} = 52$ kg fasole.

Verificare.

52 . 3,20 = 166,40 lei costa fasolea

156 . 3,60 = 561,60 lei costa făina

166,40 + 561,60 = 728 lei întreaga cantitate de făină și fasole.

Problema E: 588

La un magazin s-au vîndut bocanci cu 180 lei perechea și pantofi cu 140 lei perechea și s-au încasat în total 18 400 lei pentru 116 perechi de încălțăminte. Să se calculeze cîte perechi de pantofi și cîte de bocanci s-au vîndut. Verificare.

1. Soluție aritmetică. 180 . 116 = 20 880 lei cît ar fi costat 116 perechi de bocanci.

20 880 — 18 400 = 2 480 lei costă mai mult bocancii decît pantofii

180 — 140 = 40 lei costă mai mult o pereche de bocanci decît una de pantofi

2480 : 40 = 62 perechi de pantofi

116 — 62 = 54 perechi de bocanci.

Verificare: 62 . 140 = 8680 lei costau pantofii; 62 + 54 = 116 perechi de încălțăminte.

54 . 180 = 9720 lei costau bocancii

8680 + 9720 = 18400 lei costă 116 perechi încălțăminte.

2. Soluție algebrică. Notăm cu x și y respectiv numărul perechilor de bocanci și pantofi. Avem:

$x + y = 116$ și $180\,x + y140 = 18400$. De unde $x = 116 - y$. Ecuația doua devine, $180\,(116 - y) + 140\,y = 18400$ sau $20880 - 180\,y + 140\,y = 18400$

de unde $40\,y = 2480$, deci $y = \frac{2480}{40} = 62$ perechi de pantofi. Înlocuind în valoarea lui x avem: $x = 116 - y = 116 - 62 = 54$ perechi de bocanci.

Problema E: 620

La proba de germinație a semințelor, prevăzută de «Directivele Congresului al II-lea al Partidului» din 100 boabe de grîu, unui țăran individual i-a răsărit numai 80 fire.

Cît grîu va semăna el la hectar dacă gospodăria agricolă colectivă din localitate căreia i-a răsărit sută la sută grîul la proba de germinație, însămînțează cîte 180 kg. grîu la hectar?

I. N. Munteanu, Zăpodeni

Soluția. I. Dacă răsar 100 fire trebuie 180 kg la ha.

Dacă răsar 80 fire trebuie x kg la ha. pentruca să avem un grîu răsărit normal, x va fi mai mare ca 180 kg, deci mărimile variază invers proporțional și atunci putem scrie

$$\frac{100}{80} = \frac{x}{180} \text{ de unde } x = 225 \text{ kg grîu.}$$

Soluția II-a. Dacă 80 fire au răsărit din 100 boabe rezultă că 100 fire vor răsări din $\frac{100 \times 100}{80} = 125$ boabe. Mai departe judecăm astfel: dacă pentru 100 boabe răsărite toate, a trebuit 180 kg grîu la hectar, pentru 125 boabe va fi necesar $\frac{180 \times 125}{100} = 225$ kg. grîu.

Problema 1395

Fie β, γ *unghiurile făcute de medianele* BB' *și* CC' *ale triunghiului oarecare* ABC, *cu latura* BC. *Să se arate că*

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(C-C)}{\sin(B-C)}$$

Florin Torjescu, student, București

Soluție dată de **I. I. Cristea**, *Constanța.* În triunghiul ABC avem

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c} \text{ și } 2ac\cos B=a^2+c^2-b^2;\quad 2ab\cos C=a^2+b^2-c^2a^2$$

de unde

$$\frac{c}{b}\cdot\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}$$

sau

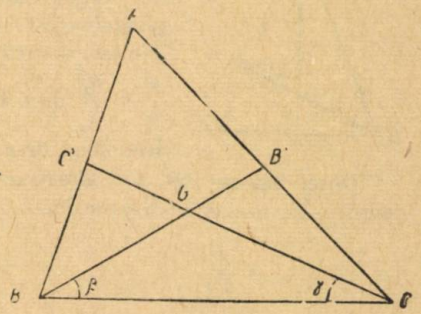
$$\frac{\sin C}{\sin B}\cdot\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}$$

sau încă

$$\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\sin C\cos C+\cos B\sin C}=\frac{b^2-c^2}{a^2};\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b^2-c^2}{a^2} \tag{1}$$

Analog pentru triunghiul GBC avem

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}=\frac{\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2-\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2}{a^2}$$



însă

$$(2m_c)^2-(2m_b)^2=[2(a^2+b^2)-c^2]-[2(a^2+c^2)-$$
$$-b^2]=3(b^2-c^2).$$

Deci,

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{b^2-c^2}{3a^2}$$

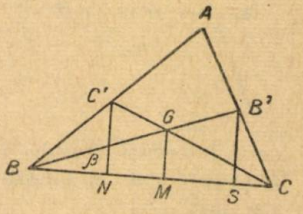
Comparînd (1) cu (2) rezultă relația din enunț.

Soluție dată de **Oprea Berechet**, *București.* — Notăm $GM=m$ și $B'S=C'N=n$. Avem $\sin\beta=\frac{m}{BG}$; $\cos\beta=\frac{BM}{BG}$; $\sin\gamma=\frac{m}{CG}$; $\cos\gamma=\frac{MC}{CG}$; $\sin B=\frac{n}{BC'}$;

$\cos B=\frac{BN}{BC'}$; $\sin C=\frac{n}{B'C'}$; $\cos C=\frac{SC}{B'C}$.

Cu acestea, relația de demonstrat devine

$$\frac{\frac{m(MC-MB)}{BC\cdot CG}}{\frac{mMC+MB)}{BC\cdot CB}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{n(SC-BN)}{BC'B'C}}{\frac{n(SC+BN)}{BC'B'C}},\text{ sau}$$



$$\frac{MC-MB}{MC\cdot MB}=\frac{1}{3}\frac{SC-BN}{SC+BN}.$$

Însă, $\frac{BM}{MS}=2$ deci $MS=\frac{MB}{2}$. Deci, $SC=MC-MS=\frac{2MC-MS}{2}$.

Analog, $NB = \frac{2MB - MC}{2}$ Deci, $\frac{1}{3} \cdot \frac{SC - BN}{SC + BN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2MC - BM - 2MB + MC}{2MC - BM + 2MB - MC} =$

$= \frac{MC - BM}{MC + BM}$.

Relația este deci, adevărată.

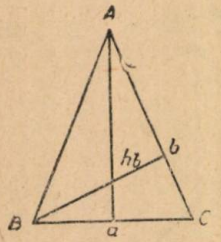
Problema 1396

Să se construiască triunghiul isoscel ABC, $(AB = AC)$ cunoscîndu-se $a + b = m$, $h_a + h_b = n$; m, n fiind mărimi date.

Matei I. Nazarie, București

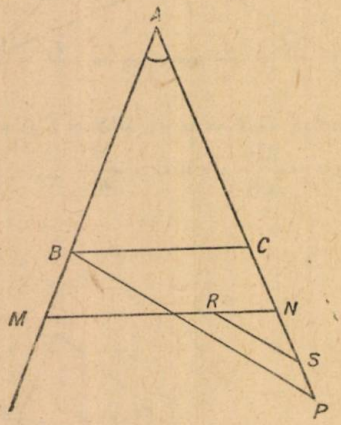
Soluția I dată de **Oprea Berechet**, *București.* — Presupunem un triunghi isoscel. Avem $h_a = b \sin C$ și $h_b = a \sin C$. Prin adunare $h_a + h_b = \sin C\,(a + b)$. Cum $h_a + h_b = n$ și $a + b = m$, deci $\sin C = \frac{n}{m}$; unghiul C poate fi ușor construit. Cunoscînd unghiul C, rezultă unghiul A. Construim mai întîi unghiul $A = 180 - 2C$.

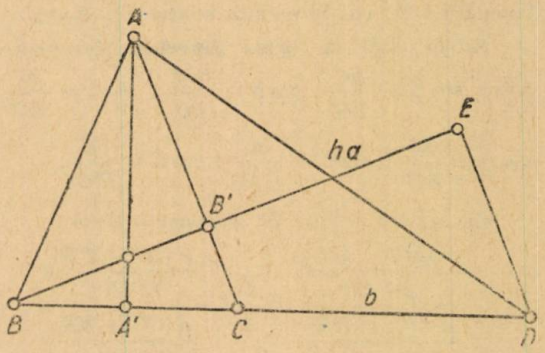
Luăm $AP = m$ și apoi ducem o dreaptă MN care face cu AP, unghiul C cunoscut. Apoi luăm $NR = NS$ iar din P ducem o paralelă la RS care taie pe AM în B. Punctul C se obține ducînd paralela la MN din B.



Soluția II-a, (a autorului). — Presupunem problema rezolvată; introducem segmentele m, n în figură, luînd punctele D, E respectiv pe prelungirile segmentelor BC, BB' astfel că $CD = b$ și $B'E = h_a$. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $AA'C$, $BB'C$, deducem $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ deci, în triunghiul BDE, $B'C \| ED$; se poate deci construi triunghiul dreptunghic BED.

Observînd ca AD este bisectoarea unghiului BDE, construcția este următoarea: se construiește triunghiul dreptunghic BED avînd ipotenuza $BD = a + b$ și cateta $BE = h_b + h_a$;





fie A intersecția bisectoarei interioare a unghiului BDE cu simetria dreptei ce trece prin D și E față de mediatoarea segmentului BD; iar C este intersecția cu BD a paralelei la DE dusă prin A.

Triunghiul se poate construi cînd $m > n$.

PROBLEME PROPUSE

1804. Într-un triunghi oarecare ABC sînt duse înălțimea din A și bisectoarea interioară a unghiului A pînă întîlnesc cercul circumscris respectiv în A_1 și A_2. Cunoscînd pozițiile punctelor A, A_1 A_2 să se arate dacă se poate determina triunghiul ABC și calcula unghiurile triunghiului ABC (cunoscînd unghiurile triunghiului AA_1A_2.)

Caz particular: $\sphericalangle A_1AA_2 = 20°$, $\sphericalangle AA_2A_1 = 50°$ și $\sphericalangle AA_1A_2 = 110°$

C. Ionescu-Țiu

1805. Considerăm triunghiul ABC cu ortocentrul H. Prin punctele A și H trec două drepte paralele, iar prin B și C, o altă pereche de drepte paralele, perpendiculare pe primele. Se formează astfel dreptunghiul $MNPQ$ căruia îi circumscriem cercul (O). Să se demonstreze că:

1° Diagonalele dreptunghiului $MNPQ$ trec prin picioarele înălțimilor BH și CH.

2° Cercul (O) trece printr-un punct fix.

3° Locul punctului O este cercul lui Euler al triunghiului ABC.

Mihai I. Popescu, student, București

1806. Un electromotor de curent alternativ dezvoltă sub o tensiune de 2500 volți o putere în plină sarcină de 170 C. P. Știind că randamentul electromotorului este 80% și factorul de putere 0,85, să se calculeze cît timp trebuie să treacă printr-o soluție de sulfat de nichel, un curent de intensitate egală cu cea a curentului absorbit de electromotor, pentru ca la catod să se depună 6,624 grame nichel.

Tiberiu Colibaba, elev, Galați

1807. Să se demonstreze că pentru $0 < x < 45°$ expresiile $\sin x$; $\cos x$ și $\cos 2x$ pot fi laturile unui triunghi. Să se calculeze apoi unghiurile acestui triunghi cînd laturile sînt în progresie aritmetică.

C. Ionescu-Țiu

1808. Să se demonstreze că pentru $45° < x < 90°$ expresiile $a = \sin x - \cos x$ $b = \sin x + \cos x$ și $c = \sqrt{2}$. $\sin 2x$ pot fi laturile unui triunghi. Să se cerceteze dacă un astfel de triunghi poate avea laturile în progresie aritmetică.

C. Ionescu-Țiu

1809. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd: vîrful A, mijlocul laturii BC și punctul de intersecție al tangentelor în B și C la cercul circumscris.

Nicolae St. Alexandru, student, București

1810. O rază monocromatică de lumină cade pe fața unei prisme sub un unghi de incidență de 60° și iese din prismă tot sub un unghi de 60°. Știind că indicele de refracție al materialului din care e făcută prisma este $\sqrt{3}$ să se afle unghiul de refringență al prismei.

Virgil Atanasiu

1811. Să se afle temperatura la care oxigenul sub presiunea de 20 cm, va avea aceeași densitate ca azotul la 0° și la presiune de 300 cm. Densitatea oxigenului este 1,105 iar a azotului 0,967 (în condiții normale).

Virgil Atanasiu

1812. Să se determine a astfel ca numărul $a\,3^{3k-1} + 1$ să fie divizibil cu 26.

I. Lupuțiu, elev, Ploiești

1813. Să se demonstreze că dacă un număr de mai multe cifre este despărțit în grupe, apoi din numărul inițial să scădem grupele formate, obținem ca rezultat un multiplu de 9. În cazul că numărul este scris în baza a, facem aceleași operații și obținem ca rezultat un multiplu de $(a-1)$.

Ioan Gottlieb, Iași

1814. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor exterioare ale unui patrulater convex formează un patrulater înscriptibil.

(Matematica v școle)

1815. Dacă ecuația $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ de gradul n are coeficienții $a_1, a_2 \ldots, a_n$ numere întregi și dacă admite o rădăcină rațională, atunci această rădăcină este un număr întreg.

1816. Să se rezolve ecuația

$$\frac{x-2a}{x+a-b}+\frac{x-2b}{x-a+b}+2=\frac{2x}{a+b}$$

N. Mihăileanu

1817. Să se găsească maximul funcției $u = x - y$ dacă $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y$, unde

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ și } 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

C. Barcoleico (Trubcevsk)
Mat matica v Şcole)

1818. — *a)* Dece pentru a se opri, patinatorul pune patinele în unghi una față de alta? *b)* La sortarea grăunțelor într-n curent de aer, cele mai grele se separă de cele ușoare? Pe ce fenomen fizic se bazează această separare? *c)* Dece nicovalele se fac cît mai masive?

1819. Se încălzește o tonă de ghiață la temperatura de $-8°C$ pînă se obține o tonă de apă la temperatura de $3°C$ Ce cantitate de lemne este necesară dacă randamentul instalației este de 30 %, iar puterea calorifică a lemnului este de 30000 Kcal/kg. Se dă căldura specifică a gheții 0,5 Kcal/kg. grad și căldura de topire a gheții 80 Kcal/kg.

(clasa IX-a, Olimpiada de Fizică, 10 aprilie 1955)

1820. In partea de jos a unui plan lung de 10 metri și înclinat cu 30° față de orizontală se găsește un corp greu de 50 kg. Ce forță minimă este necesară pentru a ridica corpul pe plan în partea de sus a planului, coeficientul de frecare fiind 0,2? Lăsat liber de sus pe plan, cu ce viteza va ajunge în partea de jos a planului?

(Clasa VIII-a, Olimpiada de Fizică, 10 aprilie 1955)

1821. Zece elemente cu forțe electromotoare de 1,1 volți și rezistența interioară de 4 ohmi fiecare se leagă în două ramuri paralele în fiecare ramura fiind legate cîte 5 elemente în serie. Rezistența circuitului exterior fiind de 5 ohmi, se cere: *a)* intensitatea curentului principal; *b)* timpul în care s-ar depune la catod 0,216 grame de cupru dintr-o soluție de sulfat de cupru prin care ar trece curentul principal; *c)* timpul în care se dezvoltă în rezistența exterioară a bateri i, 0, 283 KCal.
Se dă echivalentul electrochimic al cuprului de 0,33.

(Clasa X și an. II școli tehnice. Olimpiada de Fizică, 10 aprilie 1955)

1822. Un tren cu greutatea de 784 tone se mișcă cu viteza de 36 km/h. și la frînare se oprește după ce mai străbate distanța de 200 m. Se cere: forța de frînare a trenului; *b)* lucrul mecanic al acestei forțe; *c)* cantitatea de căldură echivalentă cu acest lucru.

(anul II școli tehnice, Olimpiada de Fizică 10 aprilie 1955)

1823. Să se construiască un triunghi cu unghiurile date și cu vîrfurile pe trei cercuri concentrice date.

* * *

1842. Pe muchiile unui triedru dreptunghic ABC se ia $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$. Să se arate că înălțimea h a piramidei $VABC$ este dată de relația

$$h=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}.$$

S. V. Ionescu, elev, Pitești

1825. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned}(xy)^{\log z}+(xz)^{\log y}&=a\\(yz)^{\log x}+(yx)^{\log z}&=b\\(zx)^{\log y}+(zy)^{\log x}&=c\end{aligned}$$

Ion I. Cristea, elev, Constanța

1826. Se dau cercurile ortogonale O_1, O_2 de raze R și $R\sqrt{3}$. Cercurile O'_1, O_2' din care cercurile date se văd respectiv, sub unghiuri drepte, se taie în M și N.
Să se arate că MN trece prin punctul O_1.

N. C. Ciomu

1827. Dacă punctul C este mijlocul unui arc de cerc AB, iar D un punct pe acest arc diferit de punctul C, să se arate că $AC + BD < AD + BD$.

* * *

1828. — Fiind date în spațiu două segmente egale AB și $A'B'$ să se găsească o axă astfel încît printr-o rotație în jurul ei, segmentele date să se suprapună: A' în A și B' în B, apoi o altă axă de rotație pentru a se suprapune A' în B și B' în A.

* * *

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE *)
PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: 693. Într-un atelier mecanic se execută 148 piese în 8 ore. Știind că atelierul poate să execute sau 16 piese mari sau 26 piese mici într-o oră, se întreabă cîte piese mici și cîte piese mari s-au executat în acest atelier în 16 ore?

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 694. Praful de lapte are 26,5 procente grăsime. Pentru a obține lapte normal, la 1 litru de apă trebuie să adăugăm 130 g praf de lapte. Cîte procente de grăsime are laptele astfel preparat?

N. Zimmermann, Sibiu

E: 695. O cooperativă a vîndut la un tîrg anual, pînzeturi și stofe în felul următor: 2/5 pînză «muncitorul» a 8 lei metrul; 5/12 barchet a 14 lei metrul; iar restul din totalul metrajului aflat în cooperativă l-a vîndut cu 25 lei metrul.

Știind că la încheerea tîrgului casierul a găsit după bonurile de vînzare în casă, suma de lei 6536, să se afle:

a) cît metraj s-a vîndut în total la acel tîrg;

b) cît metraj s-a vîndut pe categorii.

Se cere verificarea aritmetică.

B. I. Baieră

E: 696. La o cooperativă s-au vîndut fructe după calități: jumătate din fructe, care constituie prima calitate, s-a vîndut cu 6 lei kg; $\frac{1}{3}$ din fructe, care constituie calitate, II-a, s-a vîndut cu 4 lei kg; $\frac{1}{10}$ din fructe care constituie calitatea III-a s-a vîndut cu 2,50 lei kg.

Știind că cooperativa a cumpărat fructele cu 3 lei kg, iar după vînzarea lor a adus Statului un venit de 3300 lei, să se afle cîte quintale de fructe a cumpărat cooperativa pentru vînzare.

* * *

E: 697. Printr-un punct al bazei mici a unui trapez oarecare s duc paralelele la laturile neparalele ale trapezului, care determină pe baza mare, a un segment egal cu $2a$.

Să se determine mărimea bazelor tapezului știind că lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu m cm.

Aplicație: $a = 2{,}5$ cm, $m = 5{,}05$ cm.

Gh. Călugăriță

E: 698. O diagonală a unui patrulater convex oarecare fiind a, să se determine lungimea celeilalte diagonale pentru ca patrulaterul obținut prin unirea succesivă a mijloacelor laturilor patrulaterului mare, să aibă perimetrul egal cu cinci treimi din a.

Gh. Călugăriță

E: 699. Bisectoarele triunghiului ABC taie cercul circumscris respectiv în A_1, B_1, C_1 iar înălțimil taie cercul circumscris respectiv în punctele A_2, B_2, C_2.

a) Să s exprime unghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ în funcție de unghiurile A, B, C.

C.I.Ț.

*) V: 693, 695, 696, 700, 703; VI: 694. 697, 698, 701, 704; VII: 699, 702, 705, 706, 707.

E: 700. După vînzarea mărfii, o cooperativă a avut un venit a de 20%. Știind că în numerar s-a încasat suma de lei 6536, să se afle cît venit a avut.

E: 701. Să se arate că

* * *

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} = 1$$

unde x, y, z sînt numere diferite între ele.

C. Rotaru, Suceava

E: 702. În triunghiul ABC, înălțimea și bisectoarea vîrfului A taie cercul circumscris în A_1 și A_2. Se duc și diametrele BB_1 și CC_1. Să se exprime unghiurile patrulaterului $A_1A_2B_1C_1$ în funcție de unghiurile triunghiului ABC.

C.I.Ț.

E: 703. Numărul băieților din clasa VII-a este de $\frac{6}{5}$ ori mai mare ca numărul fetelor și întrece numărul fetelor cu 2. Cîți elevi sînt în clasa VII-a?

C. D. Hodor, elev, Roznov

E: 704. Să se determine bazele unui trapez oarecare știind că segmentul a care unește mijloacle diagonalelor, întrece cu 1 cm a treia parte din lungimea m a segmentului care unește mijloacele laturilor n paralele ale trapezului.

Aplicație: $m = 9$ cm; $a = 4$ cm.

E 705. Să se arate că dacă:

$$a(2x + ay^2) + b(2y + bx^2) = a^2x^2 + b^2y^2 + 1$$

iar m este întreg și pozitiv și:

$$(a + b)^4(x+y)^4 + (a - b)^4(x-y)^4 = (a^2 - b^2)^4(x^2 - y^2)^4 + 1$$

Șerb Gabriel Adrian, elev, Pitești

E 706. În triunghiul ABC se duce din vîrful A înălțimea și bisectoarea care taie cercul circumscris respectiv în A_1 și A_2. Să se exprime unghiurile triunghiului OA_1A_2 în funcție de unghiurile triunghiului ABC, unde s-a notat cu O centrul cercului circumscris.

C.I.Ț

E: 707. Cu ocazia zilei minierului, la o întreprindere minieră se acordă premii în valoarea de 9000 lei. Înaintea distribuirii, numărul premianților se mărește cu unul, astfel că partea fiecărui premiant socotită înainte se micșorează cu 750 lei. Care este numărul premiaților?

Leonid Domide

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI.

In cursul lunii aprilie 1955 s-au evidențiat următorii rezolvitori de probleme din «Gazeta Matematică și Fizică» seria B, din localitățile care încep cu literele A-F, după cum urmează:

Cristea I. Ion (clasa X-a, Constanța), *Donescu St. Dragomir* (absolvent, Focșani), *Cristea Aurel* (clasa IX-a, Focșani), *Vaida Alexandru* (clasa X-a, Brad), *Dumitrescu I. Aurel* (clasa X-a, Curtea de Argeș), *Mocanu Gheorghe* (clasa X-a, Brăila), *Lupei Voicu* (clasa X-a, Brad), *Popa Gh. Stancu* (clasa X-a, Corabia), *Dumitrescu Badea Ovidiu* (clasa X-a, s.m. 4

---

*) Evidențiații pe luna aprilie din localitățile care încep cu inițialele F-Z, se vor publica ulterior.

București), *Drăghicescu Ioncențiu* (clasa X-a, Curtea de Argeș), *Opriș A. Ion* (absolvent, Cîmpulung Mușcel), *Torjescu Florin* (student, București) *Lambă Stelian* (anul IV, școala hidrotehnică, Constanța), *Mitrofan I. Gheorghe* (absolvent,) Caransebeș), *Stăncescu Mihail* (clasa X-a s.m. 11, București), *Sălăgeanu Adriana* (clasa X-a, s.m. fete nr. 10 București), *Gagu R. Valeriu* (clasa X-a, Brăila), *Grigore I. Viorel* (absolvent, Suceava), *Vasilescu Aurel* (clasa X-a, Călărași), *Bădescu Marcel* (clasa X-a, s.m. 4 București), *Cuperman Vladimir* (clasa X-a, s.m. 20 București), *Gurman Gabriel* (clasa X-a, s.m. 20 București), *Trifan Vasile* (clasa X-a s.m. 2, Craiova), *Filipoiu Gh Miu* (student, București), *Ioniță Aurelia* (clasa X-a, Buzău), *Mihalache Gheorge* (clasa X-a, s.m. 1, Craiova), *Draica Constantin* (clasa VIII-a, s.m. 4 București), *Vrăjitoru Mihai* (clasa VII-a Aiud), *Caraman M. Alexandru* (clasa X-a Brăila).

Pînă la 1 mai 1955 s-au mai primit soluții bune la cîte cel puțin zece probleme publicate în ultimele patru numere ale G.M.F.—B, note (N), articole propuse (P) de la:

AIUD. Clasa VII. *Vrăjitoru Mihai* (E: 565, 569, 591, 592, 593, 594, 597, 600 601, 602, 604, 606, 607, 608, 609, 611, 612, 619, 620, 621); Clasa IX. Pop Al xandru (1418, 419, 424, 449, E: 563, 565, 569, 574, 588, 591); clasa X. Vrăjitoru Dan (1439, 440, 441, 442, 443, 448, 449, 453, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 466, 468). clasa IX. *Ocna Mureș:* Duca Vasil (1442, 456, 474, 475, 478, 485, 486, 491, 493, 499, 508, 511, 517, 518, 522, 524, 526, 527, 528, 532, 536, 558). Suciu Aurle (1416, 427, 437, 449, 518. E: 563, 565, 567, 568, 569, 574, 575, 576).

ALBA-IULIA. Clasa IX-a. Berciu Ioan (1449, 475, 493, 495, 516, 522, 540, E. 577, 588, 600, 6089), Torsan Ilie (1451, 481, 482, 486, 487, 497, 499, 502, 525, 528, 535, 540, 555, 58, E: 59', 615, 619, 620).

ALEXANDRIA. Clasa VIII-a. Ploeșteanu Ion (1479, 493, 496, 5 8, E: 563, 565, 568, 569, 571, 596, 601, 603, 606, 608), absolvent Desculțu Traian (1413, 446, 461, 485, 512, 518, 521, 525, 530, 536, 539, E: 580 601, 603, 606, 608).

ARAD. *Școala pedagogică*, anul IV. Grama Dumitru (1403, 442, 449, 460, 493, E: 558, 559, 561, 587, 588); clasa VIII-a. Ghilezan Doina (1443, 449, 455, 458, 460, 528, 529, E: 558, 559, 561); clasa X-a. Brenac Doina (1513, 516, 522, 526, 531, 553, 554, 593, 599, E: 603, 606). Pelău Maria (1383, 472, 473, 474, 475, 483, 498, 506, 513, 531), Herșcovici Heinrich (1412, 449, 455, 456, 460, 461, E: 570, 575, 580, 582), Fătu Sanda (1382, 885, 473, 474, 482, 483, 499, 528, 533, E: 580); clasa X-a *Mureșel. Marc Aurora* (1408, 410, 411, 412, 413, 416, 436,, 440, 469, 472, 473, 474, 475, 476, 482, 483, 485, 486, 516, 518, 526), *Trif Miron, Gurahonț.* (1406, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 424, 431, 432, 433, 434, 436, 453), absolvent *Vlagiu Ion* (1372, 373, 376, 377, 378, 386, 419, 421, 423, 424, 427, 428, 431, 432, 452, 520, 522, 524, 530, 535).

BACĂU. Clasa IX-a. *Călugăru Gheorghe* (1475, 475, 483, 493, 516, 520, 526, 528, 529, 532), *GrigoriuNicolai* (1516, 520, 528, 529, 555, E: 592, 597, 603, 608, 618, 620), *Vasiliu Monica* (1474, 475, 484, 486, 493, 518, 520, 520, 540, E: 529, 593); clasa X-a, *Vasilache Mihai* (1442, 457, 459, 470, 474, 480, 481, 512, 513, 515, 521, 522, 526, 532, 533, 534, 540, 546), *Zilberman Mircea* (1516, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 535, 558, 585, E: 592, 593, 597, 599, 601, 602, 603, 609, 608, 610, 612, 614, 615, 618, 620, 621), *Simion I. Emil* (1423, 434, 486, 443, 449, 453, 456, 459, 462, 465, 467, 472, 480, 482, 483, 486, 498, 499).

BEIUȘ *(Oradea).* ClasaIX-a. *Scurtu Lucian* (1516, 520, 524, 526, 528, 532, 540, 558, E: 593, 608), Ușvat Cornel (E: 563, 565, 566, 567, 568, 572, 573, 574, 577, 578).

BÎRLAD. Clasa V-a. *Novac G. Gheorghe* (E: 563, 566, 568, 573, 574, 575, 580, 582, 586, 588); clasa VI-a. *Stoica V. Neculai* (E: 563, 566, 567, 568, 573, 574, 581, 582, 584, 586, 588, 589, 595, 603, 604, 608). *Apostu Ioana* (E: 566, 567, 573, 574, 575, 580, 581, 582, 584, 588, 589); clasa VII-a. *Punești (Adjud). Ciorbanu C. Artur* (E: 563, 565, 566, 568, 574. 576, 577, 578, 580, 582, 584, 586, 588), 589, *Avădanei Steliana* 563, 565, 566' 567, 568, 571, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 582, 587, 588), *Popa Sava* (E: 556, 563, 568, 578, 579, 580, 582, 584, 588,

589); clasa X-a *Pavel N. Constantin* (1461, 462, 464, 473, 454, 475, 479, 494, 520, 522, 524, 526, 528, 532, 534, 554, 555, 558, 589, 590), *Rossi Doina* (1472, 474, 475, 479, 483, 486, 513, 520, 526, 527, 532), Gologan Liliana (1472, 474, 475, 479, 483, 485, 486, E: 597, 600, 608), *Tudor Ecaterina* (1472, 473, 474, 475, 479, 481, 483, 486, 520, 522, 526, 527, 528, 529, E: 592, 600, 607).

BALŞ *(Craiova)*. Clasa IX-a. *Nicolescu Marilena* (1486 493, 514, 516, 518, 520, 527, 533, E': 597, 600, 601, 602, 603, 608).

BĂLTENI *(Tg. Jiu)*. Practicant *Enăchescu T. Stoian* (1286—295, 302, 307, 310, 316, 321, 326, 338, 339, 342, 347, 349, 354, 358, 370, 372—384, 385, 392, 395, 396, 402, 403).

BOLINTINUL DE VALE *(Bucureşti)*. Clasa X-a *Martin Stoian* (1413, 443, 486, 494, 497, 516, 520, 524, 531, 532).

BOTOŞANI. Clasa IX-a. *Davidson Pesa* (1474, 475, 478, 518, 509, 532, E: 592, 597, 600, 602, 608), *Mozes Etty* (1474 475, 478, E: 562, 527, 532, 592, 597, 602, 608), *Fraiberg Ela* (1474, 475, 478, 526, 527, 532, E: 592, 597, 600, 603, 608), *Tudose Maria* (1478, 494, 495, 516, 524, 526, 528, 532, E: 602, 608); clasa X-a. Ciupercă Th. (1409 410, 436, 442, 449, 472, 474, 475, 481, 482, 486, 499, 520, 521, 526, 531, 532), *Ene Mihai* (1409, 410, 412, 415, 416, 418, 424, 434, 436, 441, 442, 443, 449, 453, 457, 459, 460, 461, 465, 467, 468, 471, 472, 473, 474), *Andriescu Lili* (1409, 411, 413, 416, 436, 441, 465, 472, 474, 483, E': 578, 579, 584, 586, 587, 588). *Cuprian Ioan* (1472, 476, 524, 525, 526, 530, 534, 540, E: 599, 602), *Iacobsohn Clara* (1414, 472, 473, 513, 526, 531, 546, 554, E: 595, 606, 608), *Dumitru Zamfir* (1472, 479, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 529, 531, 532) *Herşcovici Iancu* (1472, 473, 474, 475, 479, 482, 483, 486, 493, 495, 497, 498, 491, 517, 521, 522, 523, 524, 526, 528, 529, 532, 540), *Lupu Mihai* (1412, 416, 436, 442 449, 465, 474, 475, 481, 482, 483, 486, 495), *Lelescu Nicolae* (1405, 449 472, 486, 493, 515, 520, 534, E' 567, 571, 583, 597, 603, 608), *Sin Hoişie* (1494, 498, 499, 513, 516, 520, 522, 526, 528, 529, 531, 532, 543, E: 592, 595, 600, 603), *Schwart Mina* (1412, 414, 472, 473, 474, 483, 493, 523, 526, 527, 528, 546, 554, E: 592, 596, 597, 600, 612, 604, 606, 608, P), *Vamanu Elena* (1476, 479, 480, 491, 495, 513, 515, 520, 521, 522, 526, 528, 532, 533, 534), *Vieru Tatiana* (1474, 475, 478, 518, 526, 527, 529, 532, E: 592, 597, 600, 603, 608), *Sahor Gabriela* (1408, 413, 414, 416, 436, 441, 442, 449, 528, E: 582, 599).

BRAD. *Scoala medie tehnică de minereuri*, anul II. Iu-Ben-Hu (1416, 436, 474, 475, 477, 480, 481, 482, 493, 516, 520, 521, 526, 527, 529, 532, 536). *Tudoran Ioan* (1409, 413, 416, 436, 437, 449, 453, 461, 452, 465, 472, 474, 475, 477, 480, 481, 482, 493, 498, 489, 516, 520, 521, 526, 527, 529, 532, 536); anul III. *Papăi Ana* (1416, 461, 462, 465, 472, 474, 477, 480, 48 ', 493, 498, 499, 520, 526, 532, 536), *Trifu Florin* (1411, 416, 436, 437, 449, 472, 474, 477, 480, 485, 493, 499, 516, 520, 526, 532, 533); clasa VI-a. *Curabarza. Maşek Corneliu* (E: 591, 592, 593, 594, 595, 597, 600, 601, 602, 603, 604, 607, 608, 609); clasa X-a. *Lupei Voicu* (1408, 409, 411, 413, 414, 415, 416, 423, 425, 434, 436, 437, 442, 443, 449, 453, 454, 455, 456, 458, 460, 461, 462, 465, 470, 472, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 482, 483, 485, 486, 491, 493, 498, 499 511, 513,, 516, 520, 522, 523, 525, 526, 527, 529, 532, 534), *Vaida Alexandru* (1409, 413, 415, 416, 427, 432, 434, 436, 437, 438, 440, 443, 449, 451, 453, 454, 456, 458, 459, 461, 462, 465, 469, 470, 47 —483, 485, 486, 491, 493, 494, 497, 498, 499, 510, 511, 516, 520, 522, 524—527, 529, 532, 534, 536, 539, 550 (62 probleme).

BRĂILA. Şcoala medie nr. 2, băieţi, clasa IX-a. *Iordache G. Vasile* (1474, 493, 494, 495, 520, 522, 524, 526,527, 528, 529, 532); clasa X-a. *Buzea Oancea* (1442, 449, 472, 474, 475, 480, 481, 482, 513, 515, 520, 521, 524, 526, 532), *Buzea N. Radu* (1408, 409, 410, 411, 419, 423, 432, 437, 438, 441, 442, 443, 449, 453, 554, 456, 458, 459, 460, 461, 462, 465, 468), *Caraman M. Alexandru* (1408, 1409, 410, 413, 416, 423, 441, 442, 443, 449, 453, 456, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 468, 472, 473, 475 479, 480, 481, 482, 483, 486, 499, 508, 511, 532, E: 563, 568, 570. 571, 574, 578, 483), *Chiaia R. Ştefan* (1409, 410, 411, 413, 416, 418, 419, 423, 430, 432, 436, 437, 440), *Costin Vasile* (1442, 459, 460, 465, 472, 473, 475, 480, 482, 513, 515 516, 520, 521, 524, 526, 529, 531, 532, 553), *Danciu O. Victor* (1410, 411, 414,

433, 436, 437, 465, 487, 493, 494, 495, 499, 513, 515, 516, 520, 521, 522, 526, 527, 528, 529, 532, 536, 555, 558), *Doniga Viorica* (1326, 472, 475, 481, 487, 483, 486, 521, 522, 524, 532), *Gagu R. Valeriu* (1442, 443, 453, 459, 460, 461, 465, 472, 473, 474, 475, 481, 482, 483, 485, 487, 493, 494, 495, 498, 513, 515, 516, 520, 522, 524, 525, 526, 527, 529, 531, 532, 533, 536, 555), *Galea St. Mihai* (1442, 449, 453, 459, 460, 461, 465, 472, 473, 474, 475, 481, 482, 483, 485, 487, 494, 498, 513, 515, 516, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 523, 553, 555), *Mocanu Gheorghe* (1408, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 423, 426, 436, 437, 440, 442, 449, 452, 453, 454, 456, 459, 461, 462, 465, 472, 473, 474, 475, 477, 480, 481, 482, 483, 486, 487, 493, 494, 495, 498, 499, 516, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 536, 553, 555, 558, *Melica George* (1408, 409, 410, 411, 412, 416, 417, 418, 423, 424, 426, 436, 437, 440, 443, 449, 453, 454, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 467, 468), *Năstase Culiță* (1443, 449, 472, 474, 478, 480, 481, 482, 483, 484, 486, 493, 494, 498, 513, 515, 520, 524, 525, 526, 528, 529, 532, 536, 552, 553, 555), *Rarica I. Gabriela* (1472, 475, 481, 483, 486, 521, 522, 526, 528, 531, 532), *Sișman Nicolae* (1442, 443, 449, 456, 459, 460, 465, 472, 474, 475, 481, 482, 486).

BUCUREȘTI, Studenții: *Filipoiu Gh. Miu* (1457, 459, 513, 516, 517, 518, 520, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 534, 536, 540, 546, 550, 553, 554, 588, 589, 591, 592, 601, 612, P), *Trojescu Florin* (1452—466, 468—499, P) (47 probleme), Pandele C. (1408, 410, 411, 412, 413, 414, 416, 434, 436, E: 563, 574), absolvent *Sevaste I. Gheorge* (1472, 475, 476, 478, 481, 482, 486, 493, 494, 495, 498, 516, 522, 523, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 534, 602, 603)..

Școala medie de băieți nr. 1. « N. Bălcescu », clasa V-a. Zamfirescu Tudor (E: 550, 552, 561, 563, 566, 568, 571, 574, 575, 581, 586, 588, P);clasa IX-a. Basarab Șerban (141, 3, 419, 442, 449, 453, 456, 458, 469, 470, 471, 472, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 490, 493, 494, E: 572), Cernica Radu (1408, 409, 411, 410, 416, 436, 472, 474, 475, 476, 493, E: 563), Schileru I. Dinu (1588, 589, 591, 602, E: 596, 599, 601, 602, 607, 608, 610, 614, 615, 616, 618, 619); clasa X-a; Constantin Ion (1409, 410, 411, 412, 413, 416, 419, 421, 423, 436, 472, 475, 478, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 493, 499), Ignătescu N. Constantin (1480, 532, 534, 536, 538, 546, 588, 585, 589, 590, 592, 595, 596, 597, E: 602, 603, 606, 608, 610, 614, 615, 610, 618), Lupaș Tiberiu (1409, 410, 412, 422, 432, 436, 459, 472, 473, 479, 480, 481, 483, 485, 486).

Școala medie de băieți nr 4 « Aurel Vlaicu » — Griviția Roșie. Clasa VIII-a B. *Draica Constantin* (1374, 377, 383, 386, 389, 390, 413, 432, 433, 452, 493, 494, 495, 513, 516, 524, 527, 534, 536, 540, E: 585, 591, 592, 593, 596, 597, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 608, 614, P), Stamatoiu Petre (1393—408, 416, E: 611, 612, 614, 615, 616, 618, 620, 621), Vasilescu Gheorghe (1528, 534, E: 582, 592, 597, 600, 602, 603, 612, 614, 616), Zvorișteanu Alexandru (1534, 571, E: 582, 592, 597, 602, 612, 615, 616, 621); clasa IX-a. Cristache Aurel (1486, 51a, 515, 522, 528, 529, 532, E: 598, 599, 600, 601, 602), Nistreanu N. Valeriu (1513, 516, 518, 520, 522, 524, 525, E: 612, 614, 620, 621); clasa X-a *Dumitrescu Badea Ovidiu* (1372, 373, 376, 378, 379, 381, 385, 392, 397, 401, 408, 415, 423, 427, 442, 449, 452, 461, 462, 479, 480, 481, 483, 491, 503, 522, 524, 531, 532, 533, 534, 560, 562, 563, 565, 566, 568, 569, 574, 580, 582, 585, 588, 589, 590, E: 592, 596), *Bădescu Marcel* (1385 392, 405, 408, 410, 411, 413, 414, 416, 426, 457, 461, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 575, 579, 580, 581, 582, P). Ghițescu Liviu (1461, 493, 513, 515, 519, 526, 529, 536, 553, 585, E: 546, 601, 608), *Rădoi, D. Mircea* (1379, 409, 513, 520, 522, 524, E: 578, 592, 603, 607, 608), *Spătaru Ion* (1470, 488, 489, 491, 497, 498, 517, 522, 530, 542, 544, 545, 552, 585, 589, 590, 596, 601, 606, 607), *Stănășilă Octavian* (1469, 470, 471, 477, 478, 481, 491, 498, 501, 505, 524, 529, 533, 583 585, 587, 588, 594, 602, 604, 606, P).

Școala medie de fete nr 5. clasa IX-a. Cîmpu Demetra (1442, 472, 474, 475, 480, 481, 484, 486, 520, 513, 522, 526, 529, 532, 538).

Școala medie nr. 6. Absolvent Vîrgolici V. Virgil (1408—413, 416, 419, 432, 424, 436, 438, 451, E: 563—575).

Şcoala medie nr. 7. Clasa X-a Feinblatt Horia (1449, 472, 475, 536, 585, 589, 590, 599, 600, E: 546).

Şcoala medie de fete nr. 8. Clasa V-a *Mazilu G. Luminiţă* (E: 571, 580, 587, 593, 594, 595, 601, 603, 604, 608, 609).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa VIII-a. *Pătraşcu Ioana* (1449, 471, 473, 474, 476, 493, 494, 495, E: 614, 615, 621); clasa IX-a. *Nicoara Nirvana* (1408, 411, 412, 413, 416, 418, 434, 436, 437, E: 564, 565,) *Matheescu Anca* (1408, 409, 411, 412, 413, 416, 419, 424, 434, 436, 442, 443, 449, 456, 460, 465, 467, E: 564, 565, 567, 572, 576, 577, 585), *Nicolaescu Silvia* (1408, 409, 411, 412, 413, 416, 418, 419, 424, 436, 437, 442, 443, 449, 456, 460, 465, 466, 467, E: 564, 565, 570, 577, 585), *Wagenberg Fania* (1449, 513, 524, 534, 536, E: 568, 571, 574, 586, 588, 592, 600, 601, 602); clasa X-a. *Bână Ileana* (1471, 472, 473, 476, 478, 480, 484, 485, 489, 490, 512, 515, 517, 518, 520, 528, 537, 538, 551, 554, 560, 561, 562, 564, 565, 567, 590, 594, 599), *Sălăgeanu Adriana* (1442, 443, 449, 453, 454, 468, 469, 472, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 490, 518, 520, 522, 526, 529, 532, 533, 536, 551, 552, 555, 566, 567, 568, 569, 574, 575, 590, 594, 606) (39 probleme).

Şcoala medie de băieţi nr. 11. Clasa IX-a. *Corbu Ion* (1520, 526, 528, 532, 536, E: 572, 595, 597, 600, 601, 603, 608), *Voiculescu Al. Silviu* (1516, 622, 523, 526, 528, 532, 540, 545, 558, E: 592, 597, 599, 604, 607, 608): clasa XI-a *Donciu Mihai* (1410, 413, 423, 473, 476, 477, 478, 479, 480, 482, 483, 484, 513, 515, 516, 518, 520 ,521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 534), *Oancea A. Florin* (1372, 416, 436, 442, 449, 465, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 486, 513, 522, 5 6, 532, E: 564, 592, 597, 600, 602), *Mihăilescu Constantin* (1409, 410, 412, 413, 423, 436, 441, 468, E: 580, 582), *Sârbu Anton* (1413, 423, 425, 432, 440, 442, 443, 449, 451, 453, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 465, 467, 468, E: 570, 571, 577, 578, 579, 580, 582, 584, 586, 587, 588), *Stăncescu Mihai* (1413, 423, 425, 440, 441, 442, 443, 449, 451, 453, 457, 459, 460, 461, 462, 465, 468, 470, 472, 473, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 513, 515, 516, 518, 520, 522, 523, 524, 526, 528, 532), *Tamaş Gh.* (1409, 416, 432, 433, 436, 442, 443, 449, 453, 468, 472).

Şcoala medie de băieţi, nr, 12. Clasa IX-a. *Zisu Liviu* (1409, 436, 449, 526, 528, 532, E: 571, 586, 587, 588); clasa X-a. *Cavadia Bogdan* (1408, 436, 441, 472, 476, 482, 498, 536, 538, 545, 456, 555).

Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa IX-a. *Dobre Ion* (1472, 474, 475, 481, 493, 494, 495, 510, 516' 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 529, 531, 532, 533, 536, E: 592, 593, 594, 598, 600, 601, 602, 603, 607, 608, 609), *Gagelea Marin* (1436, 520, 522, 526, 532, E: 563, 568, 574, 592, 600, 602, P), *Saganai A Nusfet* (1475, 481, 482, 486, 490, 516, 517, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, E: 592, 593, 598, 599, 600, 601, 602, 605, 606, 607, 608); clasa X-a. *Manea I. Mihai* (1408, 414, 434, 440, 459, 460, 473, 474, 475, 478, 480, 481, 482, 483, 486, E: 592, 596, 497, 598, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa VI-a. *Popa D. Doina* E: 563, 574, 587, 588, 591, 592, 600, 602, 603, 604); clasa VII-a. *Enescu Cornelia* (1434, E: 563, 564, 568, 569, 574, 587, 588, 591, 593, 600); clasa IX-a. *Decescu Rodica* (1513, 518, 522, 524, 525, 526, 529, 532), *Ianopol Corina* (1409, 423, 436, 453, 465, 467, 474, 475, 486, 520, 522, 524, 532), *Teodorescu Viorica* (1409, 423, 466, 465, 474, 486, 522, 526. 528); clasa X-a. *Arsenescu Jeana* (1416, 430, 436, 472, 475, 482, 483, 524. 526, 532), *Mihăilescu Lenny* (1486, 430, 436, 472, 482, 483, 486, 526, 527), *Tipa Irina* (1441, 442, 449, 461, 472, 473, 475, 481, 482, 486).

Şcoala medie nr. 17. Clasa IX-a. *Iosif Gheorghe* (1474, 475. 476, 478, 485, 486, 493, 494, 495, 497, 504, 508, 511, 513, 516, 517, 518, 520, 522, 523, 524, 526, 528, 529, 532, 534, 536, 542, 558, E: 602), *Nacev Ion* (1472, 474, 475, 478, 480, 482, 486, 493, 494, 520, 526, 527, E: 597, 600, 608), *Papaianu Nicolae* (1475, 486, 493, 494, 495, 496, 502, 516, 527, 529, E: 608) *Peresecenschi Gari* (1471, 472, 475, 478, 482, 483, 486, 493, 494), *Popa Adrian* 1471, 472, 475, 478, 480, 482, 483, 486, 490, 493, 494, 495, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 558); clasa X-a. *Asnaş Dan* (1459, 472, 474, 475, 478, 479, 480, 481,

482, 483, 486, 493, 494, 495), *Ghisibel Adrian* (1441, 442, 453, 459, 460, 461, 462, 47[illegible], 474, 475, 479, 480, 481, 493, 498, 513) E: 576), *Marinescu Nicolae* (1412, 416, 419, 436, 441, 449, 453, 456, 472, 475, 478, 481, 486), *Marinescu V. Ion* (1439, 441, 483 513, 516, 521, 523, 525, 526, 590).

Şcoala medie de băieţi nr. 18. Clasa X-a. *Popovici I. Radu* (1454, 521, 523, 587. 589, 602, E: 593, 594, 698, 612, 614, 615, 616, 618, 620).

Şcoala medie de fete nr. 19. Clasa X-a. *Ivăceanu Tatiana* (1o19, 520, 521, 526, 528, 529, E: 590, 592, 597, 602, 608), *Nicolau Ileana* (1471, E: 591, 592, 595, 596, 597, 599, 501, 504, 606. 608).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. clasa VII-a. *Bogdan Alecu* (E: 563, 568, 569, 571, 574, 575, 578, 582, 585, 587, 588); clasa VIII-a. *Mustăţea Aurel* (1434, 449, 486, 493, 494, E: 569, 575, 578, 579, 580, 586), *Zaharopol Tiberiu* (1449, 458, 474, 486. 493, 494, 495, 504, 516, 529, E: 568, P); clasa X-a *Cuperman Vladimir* (1441, 442, 443, 459, 470, 483, 491, 498, 499, 508, 509, 510, 512, 513, 518, 520, 522, 527, 528, 529, 532, 533, 534, 542, 550, 552, 555, 558, 583, 585, 588, 591, 594, 600, 602), *Drăgoi St. Gheorghe* (13380, 449, 465, 472, 474, 475, 481, 482, 483, 486, 524, 526, 258, 532, 546, 578, 589, 592, 597, 608, 621), *Drăghicescu C. Ionocenţiu* (1472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 489, 491, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 506, 512, 513, 514, 515, 516, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 533, 542, 546, 550, 551, 553, 554, 555), *Gurman Gabriel* (1472, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 486, 491, 493, 499, 518, 520, 524, 525, 5 6, 527, 528, 532, 552, 558, 583, 585, 588, 589. 590. 591, 594, 603, 606), *Moloc I. Ion* (1413, 414, 423, 426, 437, 432, 440, 441, 442, 443, 446. 453, 458, 459, 460, 468), *Sava Ionel* (1410, 412, 413, 416, 436, 442, 451, 472, 473, 475, 476, 477, 478, 479, 481, 482, 483, 486, 489, 491, 493, 494, 496 498, 499).

Şcoala de băieţi nr. 23. Clasa VIII-a. *Diaconu Voicu* (E: 559, 561, 563, 564, 565, 566, 568, 571, 572, 574, 580, 584, 587, 588); clasa IX-a *Pătraşcu Emil* (1474, 475, 478, 482, 486, 520, 522, 526, 532, 536)

Şcoala de fete nr. 24. Carp Silvia (E: 592, 593, 597, 600, 601, 602, 603, 604, 606, 607, 608).

Şcoala de 7 ani nr. 171. clasa VII-a. *Nicolau Virgil* (1458, E: 578 579, 580, 585, 590, 615, 616., 617, 618).

Şcoala medie tehnică de construcţii, anul IV. *Fomov Mihai* (1521, 528, 529, 545, E: 592, 593, 594, 595, 601, 603, 604, 608, 609).

Şcoala medie de măsurători terestre, anul II, *Popescu Paul* (1494, 497, E: 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608); anul III, *Maftei Nicolae* (1474, 475, 476, 481, 486, 516, 520, 521, 522, 527, 528, 531, E: 592, 496, 597, 598, 600, 601, 60 , 606, 608).

Şcoala de 7 ani nr. 185 clasa VII-a. *Oprică I. Mihai* (1403, 493, 495, 513, 551, 552, 563, 568, 583, 588).

Şcoala de 7 ani nr. 148, CHITILA . Clasa VII-a *Chisaru V. Ion* (1426 432, 434, E: 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 877, 578, 579), *Constantinescu Remus* (E: 563, 564, 566, 567, 568, 572, 573, 576, 577, 578, 587, 588), *Ionescu V. Ion* (1426, E: 563. 564, 566 , 567, 568, 573, 574, 576, 578).

BUZĂU. Clasa IX-a. *Toia Georgeta* (1474, 475, 517, 520, 524, 526, 527, 531, E: 588, 618, 619); clasa X-a. *Boerescu Dragoş* (1416, 436, 472, 474, 475, 476, 478, 479, 481, 483, 486, 541, 542, 546, E: 592, 596), *Ioniţă Aurelia* (1370, 376, 377, 378, 409 411, 416, 436, 442, 458, 465, 472, 474, 475, 479, 48 , 483, 485, 486, 491, 493, 494, 513, 520, 522, 526, 532, 536).

CALAFAT. Clasa VIII-a. *Ghinea I. Petre* (1432, 495, E: 563, 574, 580, 586, 587, 592, 601, 608); clasa X-a. *Caraş Nicolae* (1416, 442, 465, 479, 480, 482, 484, 493, 516, 520, 521, 522, 526, 528, 529, 531, 532, 539, 555), *Ispir Ştefan* (1484, 509, 513, 516, 518, 520, 521, 523, 526, 529, 531, 532, 534, 539, 542, 541, 548, 551), *Pleniceanu Ion* (1478, 479, 509, 526, 527, 540, 541, 548, E: 586, 596), *Petcu M. Stelian* (1413, 472, 474, 475, 486, 516, 529, 530, 563, 574), absolvent *Mitroaica I. Gheorghe* (1536, 538, 539, 540, E: 592, 595, 599, 610, 613, 616).

CALARAŞI. Clasa VIII-a. *Onuţa N. Ion* (1449, 474, 493, 494, E: 587, 588, 592, 597, 600, 602); clasa IX-a. *Belciu Adriana* (1449, 493, 496, 516, 520, 526, E: 586, 587, 588, 600, 608), *Bragadiru Lascăr* (1442, 443, 458, 464, 475, 482, 493, 494, 509, 516, 520, 521, 524, 526, 528, 532, 541, 548); Clasa X-a. *Dascălina Ion* (1472, 483, 486, 520, 521, 522, 524, 525, 527, 528, 531, 532, 533), *Pană Gheorghe* (1472, 475, 483, 486, 489, 516, 520, 523, 527, 528, 530, 531, 533), *Vasilescu Aurel* (1480, 485, 489, 512, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 534, 536, 546, 553, 554, 555, 594, 602, 603, 606).

CARACAL. Clasa X-a. *Gheorghievici Ada* (1441, 442, 443, 449, 456, 466, 467, 468, E: 578, 584), absolvent Popescu Lică (1441, 442, 449, 458, 459, 461, 462, E: 590, 603, 606).

CARANSEBEŞ Clasa VIII-a. *Haţegan Cornel* (1446, 460, 464, 478, 493, 495, 502, 508, 517, 525, 527, 534, 542, 586, 587, 588); clasa X-a. *Tomescu Petru* (1472, 474, 475, 486, 493, 494, 513, 516, 521, 525, 526, 527, 530, 531, 532, E: 592, 593, 594 596, 600, 601, 602, 603, 604, 606, 607, 608), absolvent *Mitrofan I. Gheorghe* (1469—476, 478—482, 484—491, 493, 494, 495, 498, 499, 501, 503, 508, 509, 511, 512, 513, 515, 516, 517, 518, 520—534, 536, P) (42 probleme).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa X-a *Bera Dan* (1408, 409, 410, 411, 412, 412, 413, 415, 416, 442, 449, 451, 456 471, 473), absolvent *Opriş A. Ioan* (1373, 407, 408, 410, 411 412, 414, 423, 425, 430, 431, 432, 433, 434, 440, 442, 443, 449, 455, 457, 465, 472, 474, 476, 479, 480, 482, 483, 485, 486, 489, 493, 494, 495, 497, 498, 515, 516, 518, 517, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 545, 547, 555, 558, 588, 589, 591, E: 552, 558, 559, 560, 561, 576, 577, 578, 579, 581, 582, 583, 584, 589, 595, 596, P),

CÎMPINA. Clasa X-a. *Cord N. Ioan* (1442, 472, 474, 475, 480, 483, 483, 486, 493, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 555).

CERNAVODA. Clasa IX-a. *Tănase Vasile* (1474, 478, 480, 486, 493, 525, 526, 540, E: 608, 618).

CLUJ. Şcoala m die nr. 4 clasa X-a. *Golgoţin Eneea* (1472, 474, 479, 481, 482, 483, 485, 486, 528, 531); clasa VIII-a. *Nicula Iosif* (1443, 460, 474, 493, 495, E: 578., 579, 580, 586, 587, 588). *Şcoala tehnică de exploatare c.f.r., Satu Mare*, anul I. *Szasz Carol* (1474, 476, 482, 486, 497, 516, 524, 527, 528, 534, 538, 540, 542, 588, 591, 592, 598); anul II. *Pop V. Ion* (1472, 474, 475, 476, 481, 482, 486, 493, 494, 497, 516, 520, 521, 522, 526, 527, 531, 532, 533, 588, 589, 591, 603, P). *Popovici Ştefan* (1476, 486, 493, 494, 515, 521, 526, 527, 531, 532, 533,). *Şcoala medie de energie electrică*, anu' II. *Butnaru Damian* (1410, 411, 413, 415, 436, 485, E: 571, 586, 587, 588). Facultatea muncitorească. *Aldea Florea* (1471, 475, 479, 480, 481, 482, 484 485, 490, 493, 494, 495), *Coţea Nicoale* (1470, 478, 490, 499, 511, 522, 525, 526, 528, 532, 555, E: 599), *Chelemen Mihai* (1472, 474, 475, 478, 480, 481, 483, 485, 486, 493 495, 499), *Pop Ludovic* (1472, 475, 478, 481, 486, 498, 506, 513, 521, 522, 524, 528), *Pîrlu Ştefan Nicolae* (1471, 477, 478, 481, 482, 498, 499, 511, 516, 518, 522, 523, 525, 528, 532, 555), *Sângerean Gheorghe* (1470, 471, 474, 475, 479, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 495, 496, 497, 506, 511, 513, 522, 526, 529, 532, 534, 558).

CONSTANŢA. Şcoala hidrotehnică, anul II. *Ghencea Adrian* (1436, 472, 474 475, 476, 480, 493, 494, 495, 521, 529, 532, 542, 555, 585, 587, 588, E: 597, 598, 600, 602, 603, 605, 606, 607), *Nazim Salim* (1416, 436, 472, 480, 529, 542, 587, 588, 590, E: 597 598, 600, 602, 603, 606, 608, 612, 610, 611, 615, 616, 619); anul III. *Stepan Ionel* (1436, 471, 529, 532, 585, 587, 588, 590, 591, 592, 600, 602, 604, 606, 612, 613, 615, 616, 619, 620, P); anul IV. *Lambă Stelian* (1471, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 485, 486, 490, 492, 493, 494, 495, 498, 499, 502, 513, 574, 515, 616, 518, 522, 526, 529, 531, 532, 558, 583, 588, 589, 590, 591, 592, 603, 606, 607, P).

Şcoala de construcţii, anul II. *Lehghel Silvia* (E: 592, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 606, 607, 608).

Şcoala medie nr. 1 « Mircea cel Bătrîn ». Clasa VIII-a. *Anghel Constantin* (E: 591, 593, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 605, 607, 608), *Cornea Gheorghe* (1408, 409, 410, 411, 416, 436, 442, 449, 465, 467), *Fichiert I Ghenişa* (1474, 485, 494, E: 592, 597, 598, 600, 601, 602, 605, 607, 608), *Ianuş I, Stere* (E: 563, 567, 569, 570, 571, 574, 575, 586, 587, 588, 600), *Mazilu C. Leontin* (1493, 527, E: 563, 568, 571, 574, 592, 597, 600, 608); clasa X-a. *Cristea I. Ion* (1445, 451, 462, 469, 470—506, 508—534, 536, 557, 543, 544, 550—555, 558, P): *absolvent Andreşoiu Glauco* (1471, 473, 474, 475, 479, 480, 481, 485, 486, 493, 494, 495, 498).

CORABIA. Clasa X-a. *Popa Gh. Stancu* (1453, 459, 460, 461, 462, 463, 481, 484, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 509, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 534, 536, 537, 538, 540, 542, 543, 544, 545, 546, 550, 554, 558, P).

CRAIOVA. *Şcoala medie 1 fete*. Clasa IX-a. *Georgescu Ileana* (1474, 475, 493, 495, 522, 523, 524, 525, 526, 529, 532).

Şcoala medie de drumuri şi poduri, anul II. Răducanu V. *Gheorghe* (1516, 520, 524, 526, 527, 529, 531, 533, E: 592, 597, 600, 601, 602, 603, 606, 607, 608); Şcoala pedagogică mixtă, anu II. *Georgescu M. Ion* (1443, 496, E: 568, 574, 580, 586, 587, 597, 60 , 603, 608). *Şcoala medie nr. 1 « N. Bălcescu »*, clasa IX-a. *Sandu Gh.* (1373, 375, 377, 379, 380, 408, 409, 410, 411, 416, 447, P); clasa IX-a. Voinea P. *Alex.* (1416, 442, 460, 461, 471, 472, 474, 475, 482, 483, 485, 486, 502, 516, 520, 522, 526, 529, 532, 536, 540, 545, 555, P); clasa X-a. Basarab *Alexandru* (1441, 442, 449, 459, 465, 472, 474, 475, 482, 526), *Mihalache Gheorghe* (1475, 478, 481, 482, 483, 485, 486, 489, 490, 493, 494, 495, 501, 503, 511, 515, 516, 521, 522, 524, 527, 528, 529, 531, 532, 536, 539, 548, 554, 555). *Şcoala medie de băieţi nr. 2*. Clasa IX *Climov Victor* (1524, 531, E: 592, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 607, 608), *Voinea C. Dorin* (1411, 413, 416, 436, 439, 442, 449, 453, 459, 460, E': 532, 563, 564, 565, 566, 568, 571, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, *Lăban Mircea* (1461, 181, 482, 483, 516, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 532, 536); clasa X *Clim Lorin* (1408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 421, 423, 426, 434, 436, 439, E: 563, 564, 568, 569, 571), *Ghenea Constantin* (1521, 524, 536, E: 563, 564, 565, 568, 571, 573, 575), *Radu Marin* (1472 475, 482, 486, 494, 513, 516, 520, 521, 526, 528, 529, 532, E: 594, 596, 603, 608, 612, 614, 615, 618), *Trifan Vasile* (1472, 474—486, 490, 492, 508, 516, 521, 522, 524, 529,531, 532, 533, 555).

Şcoala de 7 ani, Locusteni. Clasa V-a *Bran N. Valeria* (E: 586, 587, 594, 600, 601, 603 604, 608, 609).

CURTEA DE ARGEŞ. Şcoala tehnică de industria lemnului, anul IV. *Petre I. Titus* (1475, 476, 480, 485, 486, 493, 494, 495, 498, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 526, 523, 531, 532, 533, 534, 536); clasa IX-a. *Ene St Aurel* (1441, 442, 443, 444, 448, 449, 453, 455, 456, 458, 589, 460, 441, 462, 465, 467, 472, 486, E: 576, 577, 578, 579, 581, 582, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, *Neagoe Laurenţu* (1517, 520, 523, 524, 525, 529, 534, 550, E: 593, 596, 597, 600, 601, 603, 506, 608), *Simion Gheorghe* (1520, 524, 526, 527, 532, 534, E: 597, 600, 601, 608, 612, 614, 619, 620, 621); clasa X-a. *Dumitrescu I. Aurel* (1441, 458, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 489, 490, 491, 493, 494, 495, 497, 498, 499, 503, 503, 504, 506, 508, 509, 511, 513, 515, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 552, 553, 554, 555, 558).

DEJ. Clasa IX-a. *Ciobănescu Lucia* (1378, 436, E: 546, 563, 564, 586, 571, 574, 586, 587, 588), Vermeşan *Gheorghe* (1459, 461, 528, 532, 590, 589, E: 563, 574, 592, 600, 602, 608).

Darabani (Suceava). Absolvent *Grigore I. Viorel.* (1471, 472, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 483, 485, 486, 493, 494, 495, 499, 505, 509, 511, 512, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 523, 524, 425, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 534, E: 551, 553, 558, 559, 560, 561, 562, 565, 566, 658, 568, 570, 571, P).

FĂGĂRAŞI. Clasa X-a. *Dragotă Cornel* (1512, 514, 516, 520, 521, 526, 527, 529, 531, 532, 534, 537, 540, 546), *Frîncu Nicolae* (1512, 513, 514, 520, 521, 523, 526, 529, 530, 531, 532, 536, 538, 545, 547, 554).

FOCŞANI. Clasa IX-a. *Cristea Aurel* (1409, 410, 412—416, 418, 419, 421, 423, 425, 434, 442, 442, 448, 449, 451, 453, 456, 458—468, 470—475, 484, 486, 490, 493, 494, 495, 518. 526, 536, 552, E: 597,601, 602, 606), Rotaru Ion (1443, 449, 478, 486, 513, 521, 522, 526, 527, 531, E: 581, 582, 586, 587, 588), *Stoica N. Constantin* (1475, 493, 494, 516, 517, 518, 520) 521 522, 523, 524, 526, 528, 529, 531, 532, E: 593, 603, 608); clasa X-a. *Teodorescu Laurenţiu* (1474 475, 477, 480, 481, 482, 485, 486, 491, 493, 495, 513, 516, 517, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 538, 532, 546, 552, 553, 554, 558), absolvent *Dănescu St. Dragomir* (1467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481—506, 508—518, 520,—525, 527. 529—534, 536, 537, 540, 542, 543, 544, 545, 546, 548, 550—555, 558, 583, 585, 586, 587 588—594, 601—607, P) (98 probleme).

ERATĂ

— La problema E: 605 în loc de $-2x^2$ se va scrie $-2x^3$
— La problema E: 649, penultimul rînd, ultima paranteză este $(-a+b+c)$
— La problema 1613 în loc de MD se va citi CD.
— La problema 1766 în loc de « extremitatea » se va citi « extremităţile ».

OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1955—1956

În atenţia tineretului din şcoli

— Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. organizează „Olimpiadele de Matematică şi Fizică 1955—1956", la care pot participa elevii şcolilor medii de zi şi serale, ai şcolilor pedagogice de învăţători, profesionale şi tehnice.

— Olimpiadele se vor desfăşura în patru etape:

— Etapa I-a organizată pe şcoli va avea loc pentru matematică şi pentru fizică între 10—30 noiembrie 1955.

— Etapa II-a locală, va avea loc pentru matematică la 19 februarie şi pentru fizică la 26 februarie 1956.

— Etapa III-a regională va avea loc pentru matematică la 1 aprilie, iar pentru fizică la 8 aprilie 1956.

— Etapa IV-a finală pe ţară, va avea loc în Bucureşti, elevii admişi se pot prezenta fie numai pentru matematică fie numai pentru fizică, la probele scrise şi orale care au loc între 29 aprilie şi 3 mai 1956.

— Elevii evidenţiaţi în ultimile două etape vor primi diplome, premii în cărţi, etc.

Elevi şi eleve participaţi cu tot entuziasmul vostru la aceste „Olimpiade de matematică şi fizică"!

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDON

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, oar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F. — seria B.*

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele *trei* numere apărute.

— Rezolvitorii pot trimite *într-un plic*, francat după greutate, toate rezolvările făcute timp de una dau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1955, se vor socoti la premiera colaboratorilor pe anul* 1955.

— *Pentru anul* 1955, *G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic decît zece, sau necorect redactate.

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *În redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile pincipale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceeași problemă sau au dat generalizări și observații interesante sub formă de note.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a « Olimpiadei matematice și fizice »*, pentru ca apoi, prin revistă, să se poate realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Centrului de difuzare a presei București str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90. *Procurarea* contra cost a unor numere vechi din anii 1953—1955 se poate face de la Oficiul remitent din București, Strada Academiei Nr. 2.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat să *facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— *Cititorii și colaboratorii revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care doresc să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15—18, miercuri între orele 10—13 și simbătă între orele 15—18 la sediul redacției din strada Academiei 14, București — Telefon 4.46.58.*

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi de* **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **S. Şklovski** (lei 6,85)
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu** (lei 6,55).
15. *Soarele şi observarea lui* de **V. V. Şaronov** (lei 7,10)

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII. TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI TEHNICIENI, ELEVI LEI 5, PENTRU ŞASE NUMERE.

c. 1043 — Intreprinderea Poligrafică nr. 4

Preţul **Lei 1** exemplarul

E 14,06
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Trăiască în veci prietenia romîno-sovietică!

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VI — Octombrie 1955

10

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 10 — octombrie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Academicianul profesor Ştefan Vencov*	437
2.	*«Elementele» lui Euclid de D. Rimer, Iaşi*....	438
3.	*Difracţia luminii de Achim Marinescu*	448
4.	*Construirea prin mijloace proprii a unei lunete astronomice Kepler de A. Bordeianu, Rădăuţi*	458
5.	*Note matematice*.....	463
6.	*Chestiuni de examen*.....	464
7.	*Probleme rezolvate (1398, 1399, 1418, 1441, 1457, 1467, 1489, 1491, 1492, E: 538, 1496, 1497, 1498).*	466
8.	*Probleme propuse (1844—1873)*.....	475
9.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 687*, 708—722)*	478
10.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	479

ANUL VI 10 OCTOMBRIE

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Mászolt Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 10 Octombrie 1955

ACADEMICIANUL PROFESOR ŞTEFAN VENCOV

În ziua de 8 septembrie 1955 s-a stins din viaţă în R.D.G., unde lua parte la «Zilele Păcii» organizate de Comitetul German al Păcii, acad. prof. Ştefan Vencov.

Prin moartea acad. prof. Ştefan Vencov, ştiinţa fizicii din ţara noastră, Academia R.P.R. şi învăţământul superior au suferit o grea şi dureroasă pierdere.

Născut la 17 noiembrie 1899 în oraşul Buzău, acad. prof. Ştefan Vencov şi-a făcut studiile universitare la Bucureşti, absolvindu-le în 1922.

După ce şi-a susţinut teza de doctorat cu mare succes, a lucrat mai mulţi ani în domeniul spectroscopiei la Universitatea din Bucureşti şi apoi la Institutul Politehnic din Bucureşti.

În 1947 a fost chemat ca profesor-şef pe catedră, conducător al Laboratorului de fizică al Institutului Politehnic.

De la înfiinţarea Institutului de fizică al Academiei R.P.R. a condus o serie de lucrări din domeniul spectroscopiei şi al electroopticei, s'rîns legate de nevoile ţării şi care au deschis perspectivele unor noi cercetări în acest domeniu.

Seriozitatea şi modestia sa, cît şi bogata sa activitate ştiinţifică pe care a depus-o au determinat în anul 1951 numirea sa ca rector al Institutului Politehnic.

Valoarea activităţii sale ştiinţifice a fost recunoscută prin alegerea sa ca membru corespondent al Academiei R.P.R. în 1949 şi apoi ca membru activ în 1952.

Datorită activităţii sale ştiinţifice deosebite a fost ales membru în Prezidiul Academiei R.P.R., primind şi sarcina conducerii Secretariatului Ştiinţific al Academiei R.P.R., muncă pe care a desfăşurat-o mai mulţi ani.

Singur sau în colaborare cu alți cercetători, el este autorul a numeroase lucrări originale științifice care au fost publicate în diferite reviste de specialitate din țară și străinătate. Cea mai mare parte a lucrărilor sale se referă la probleme din domeniul opticii.

S-a preocupat în deosebi de studierea diferitelor moduri de excitații și de descompunere ale moleculei de hidrogen, analizînd spectrele caracteristice care se produc. El a izbutit să arate legătura între spectrul secundar și cel continuu al moleculei de hidrogen.

Într-o lucrare de ansamblu, acad. Ștefan Vencov a analizat evoluția diferitelor spectre ale hidrogenului, stabilind rolul ce-l pot avea procesele secundare în funcție de variația curentului electronic și de presiunea gazului.

Urmărind stabilirea unor metode de analize spectroscopice sensibile, acad. Ștefan Vencov a reușit să stabilească pentru prima oară, că în anumite condiții experimentale, descărcarea fără electrozi, deși disociază molecula, este totuși metoda cea mai indicată.

Preocupat permanent de legarea teoriei de practică, acad. Ștefan Vencov a întreprins cercetări prin metoda fotometriei fotografice pentru înlocuirea cuarțului în cercetări spectroscopice în ultraviolet.

Sînt de asemenea merituoase lucrările sale asupra spectrelor de absorbție ale unei serii de molecule organice poliatomice, precum și cercetările asupra formelor moleculelor.

Acad. Ștefan Vencov a fost întotdeauna alături de năzuințele poporului. Democrat convins, el a fost unul dintre semnatarii memoriului din 1944 pentru încetarea războiului criminal împotriva Uniunii Sovietice.

După eliberarea țării, paralel cu activitatea sa științifică și didactică, acad. Ștefan Vencov a desfășurat o bogată și susținută activitate pe tărîm obștesc, fiind ales și deputat în marea Adunare Națională a Republicii Populare Romîne.

Participant activ la lupta pentru pace, pe care oamenii de știință din patria noastră o duc împreună cu întregul popor, acad. Ștefan Vencov a fost ales în Comitetul Național pentru Apărarea Păcii din R.P.R.

Pentru multilaterala și merituoasa sa activitate, acad. Ștefan Vencov a fost distins cu numeroase ordine ale Republicii Populare Romîne.

Numele acad. Ștefan Vencov, care prin munca sa neobosită de peste 30 de ani a contribuit la dezvoltarea științei fizice din patria noastră și la îndrumarea a numeroase promoții de fizicieni, se înscrie pentru totdeauna în cartea de aur a celor care și-au închinat viața pentru progresul științei, slujind cauza construirii socialismului și a păcii.

ELEMENTELE LUI EUCLID

D. RIMER
lector, Iași

ÎNCEPUTURILE geometriei trebuie căutate în Egiptul antic, în problema remăsurării pămînturilor ce se făcea anual începînd din epoca în care regele Sesostris a făcut o împărțire generală a pămînturilor.

Dezvoltarea treptată a relațiilor dintre oameni, creșterea standardului lor de viață, a ridicat probleme noi: confecționarea uneltelor, construirea adăposturilor etc. ceea ce a impus studiul figurilor geometrice.

De la egipteni ne-au rămas două documente foarte importante, din care se vede stadiul cunoștințelor de geometrie la acea dată:

a) Papirusul Rhind, scris de un matematician Ahmes, cu 1800 de ani înaintea erei noastre, și

b) Papirusul din Moscova, descoperit și comentat de un matematician sovietic în 1930. Acest papirus, care se află la Moscova, este mai complet decît papirusul Rhind.

Multe din cunoștințele acelei epoci erau empirice; astfel, aria unui triunghi isoscel se afla prin semiprodusul dintre bază și una din laturile egale; raportul între lungimea cercului și diametrul său era socotit 3 sau $3\frac{1}{7}$, $3\frac{10}{71}$ ș.a.

De la egipteni știința geometriei a trecut la greci. După anumite documente se pare că primul matematician grec vestit a fost Thales din Milet, circa 624—548 î.e.n. Școala ioniană creată de el, a contribuit mult la răspîndirea cunoștințelor de geometrie. După școala lui Thales întîlnim la Athena pe Hippocrate (aproximativ 450 î.e.n.), Platon (428—348 î.e.n.) și Pitagora.

După moartea lui Pericle, Athena pierde hegemonia culturală și științifică și geometria revine în țara de origină — Egiptul. Centrul culturii grecești se mută astfel în Alexandria, capitala lui Ptolomeu Soter.

Cu școala din Alexandria începe epoca de aur a geometriei grecești care devine o știință independentă. Conducătorul școlii matematice este Euclid, cel mai vestit matematician al epocii sale.

Din viața lui știm prea puțin. A trăit cam între anii 330 și 275 î.e.n.; și-a făcut pregătirea științifică la Athena. A dus o viață liniștită, închinată cercetărilor științifice.

Proclus Diadochus (410—485), un comentator al lui Euclid, relatează: « Se povestește că Ptolomeu l-ar fi întrebat odată, pe Euclid, dacă în geometrie nu există un drum mai scurt pentru a o învăța; iar acesta i-a răspuns că în geometrie nu există drumuri regale ».

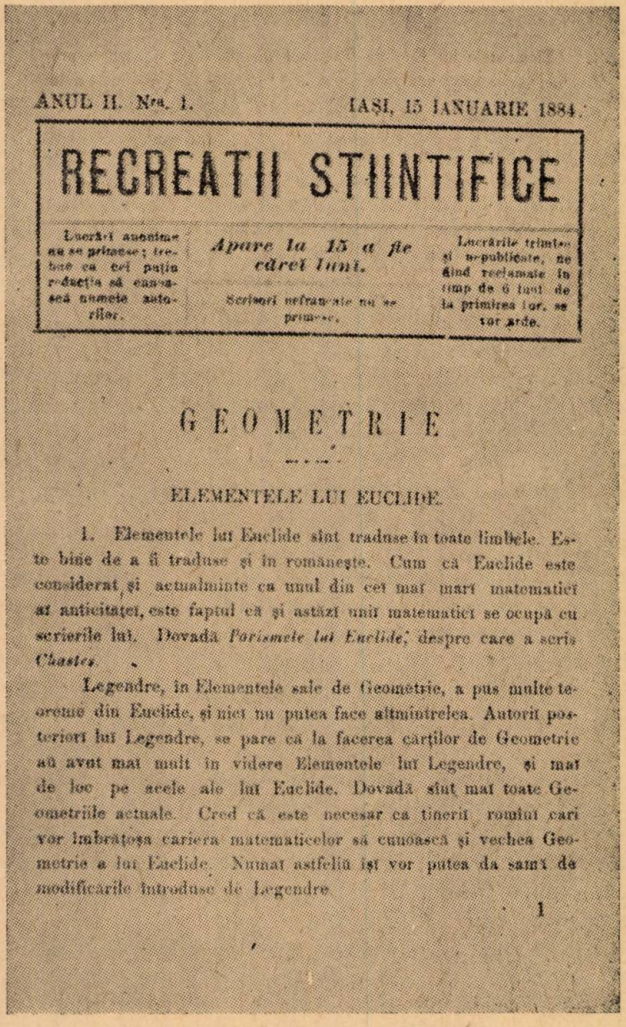
Pappus din Alexandria, un alt comentator al lui Euclid, care a trăit în sec. III, îl prezintă pe Euclid ca pe un om modest, de un caracter blînd, plin de bună voință pentru toți acei ce voiesc să contribuie la propășirea matematicilor.

Euclid a scris lucrări de matematici. Citățm astfel: « Diviziunea figurilor. Fenomenele (operă de astronomie), Optica, Secțiuni conice, Data (o culegere de 100 probleme) ». Cea mai importantă operă prin care Euclid și-a asigurat un loc în frunte în istoria matematicilor, o constituie « Elementele » — în grecește « Stoicheia », care înseamnă « elemente » (ce pot sluji ca temelie științei) sau mai înseamnă, literele alfabetului.

În această operă, Euclid a adunat într-un tot, cele mai multe din cunoștințele de matematici pe care le aveau grecii, la care a adăugat multe lucruri proprii. Dacă Euclid s-ar fi rezumat doar la atît, ar fi binemeritat din partea omenirii chiar și pentru activitatea de colecționar harnic. Marele său merit rezidă însă, în faptul de a fi expus materialul într-un sistem propriu considerat mult timp, drept model de claritate și rigurozitate. După această carte au învățat geometria unii din cei mai iluștri matematicieni ai omenirii: Copernic, Galilei, Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, Lobacevschi, ș.a.

În cele 22 veacuri de cînd dăinuie, « Elementele » au fost traduse în mai toate limbile pămîntului, publicîndu-se peste 1700 ediții. Prima traducere românească, necompletă însă, o datorăm profesorului ieșean Gheorghe Roșiu,

fost profesor de matematici la Liceul Național și a fost publicată în revista ieșană « Recreații științifice », anul II (1884). Traducerea completă în romînește a « Elementelor » a fost făcută de prof. Victor Marian de la Cluj, și a fost publicată în colecția « Gazeta Matematică » în anii 1939—41 (trei volume). Reproducem în fotografia alăturată, pagina I din « Recreații Stiințifice » cu prefața profesorului Gh. Roșiu la traducerea « Elementelor ».



ANUL II. Nr. 1. IAȘI, 15 IANUARIE 1884.

RECREATII STIINTIFICE

Lucrări anonime nu se primesc; trebue ca cei puțin redacția să cunoască numele autorilor.

Apare la 15 a fie cărei luni.

Scrisori nefrancate nu se primesc.

Lucrările trimise și nepublicate, ne fiind reclamate în timp de 6 luni de la primirea lor, se vor arde.

GEOMETRIE

ELEMENTELE LUI EUCLIDE.

1. Elementele lui Euclide sînt traduse în toate limbele. Este bine de a fi traduse și în românește. Cum că Euclide este considerat și actualminte cu unul din cei mai mari matematici ai anticităței, este faptul că și astăzi unii matematici se ocupă cu scrierile lui. Dovadă *Porismele lui Euclide*, despre care a scris *Chasles*.

Legendre, în Elementele sale de Geometrie, a pus multe teoreme din Euclide, și nici nu putea face altmintrelea. Autorii posteriori lui Legendre, se pare că la facerea cărților de Geometrie au avut mai mult în videre Elementele lui Legendre, și mai de loc pe acele ale lui Euclide. Dovadă sînt mai toate Geometriile actuale. Cred că este necesar ca tinerii români cari vor îmbrățoșa cariera matematicelor să cunoască și vechea Geometrie a lui Euclide. Numai astfelia își vor putea da samă de modificările introduse de Legendre.

1

Fig. 1

Citățm de asemenea, o lucrare documentată de informare a publicului romînesc în această problemă, « Elementele lui Euclid » de Ilie I. Popa, profesor la Universitatea din Iași, publicată în 1936 în « Atheneum ».

În Editura Tehnică a apărut lucrarea « Geometria lui Lobacevschi și bazele geometriei » de Cutuzov, traducere din limba rusă, în care un întreg capitol este consacrat « Elementelor » lui Euclid.

Trebuie subliniat că toate Universităţile europene au introdus de la înfiinţarea lor, « Elementele » ca manual de bază pentru studiul geometriei. Aşa de exemplu, Universitatea din Cambridge le-a introdus din anul 1200, cea din Paris la 1336, cea din Praga în 1350, cea din Viena în 1364, ş.a.m.d. În Anglia « Elementele » lui Euclid au constituit punctul central în studiul geometriei pînă la 1903, iar în celelalte ţări de pe continent, pînă în jurul anului 1800. La 1784 Legendre, un mare matematician francez, publică un tratat de geometrie care ameliorează mult din punct de vedere didactic, « Elementele » lui Euclid. La noi, Gheorghe Asachi, Gheorghe Lazăr, Eliade Rădulescu, traducînd manualele didactice franceze rup cu tradiţia învăţămîntului lui Euclid încetăţenită pînă atunci, în şcolile noastre.

« Elementele » lui Euclid se compun din 13 capitole denumite « Cărţi ». Cărţile 1 — VII conţin geometria plană: triunghiuri, teoria paralelelor, patrulaterele (în cartea I); condiţiile echivalenţei poligoanelor (cartea a II-a), circumferinţa (cartea a III-a), poligoane înscrise şi circumscrise (cartea a IV-a), teoria mărimilor proporţionale (cartea a V-a), asemănarea şi teoria ariilor figurilor plane (cartea a VI-a).

Cărţile VII, VIII, IX sînt consacrate aritmeticii în expunere geometrică; cartea X-a teoriei numerelor iraţionale, iar cărţile XI, XII, XIII expun geometria în spaţiu (teoria volumelor, a poliedrelor, a corpurilor principale de rotaţie şi studiul poliedrelor regulate).

★

« Elementele » lui Euclid s-au impus nu atît ca o enciclopedie a matematicilor cunoscute în antichitate, cît prin sistemul de expunere a materialului. Astfel, fiecare carte începe cu definirea noţiunilor cuprinse în ea, după care urmează postulate, axiome şi apoi propoziţiile (teoremele) demonstrate aproape pînă în cele mai mici detalii. Prin aceasta, expunerea lui Euclid a servit multe veacuri ca model neîntrecut de precizie, ireproşabilitate şi rigurozitate. Dăm aci primele 8 definiţii din Cartea I-a spre a exemplifica modul cum a definit Euclid noţiunile:

1. « Punctul este ceea ce nu are părţi »;
2. « Linia este lungime fără lăţime »;
3. « Iar extremităţile unei linii sînt puncte »;
4. « Linia dreaptă este aceea care este situată la fel faţă de toate punctele sale ». Această definiţie a fost neclară multe veacuri. Matematicianul francez Paul Tannery, presupune că expresia este luată din limbajul cioplitorilor în piatră şi a lemnarilor, iar înţelesul definiţiei dreptei este: linia dreaptă este aceea ale cărei puncte ajung toate la acelaşi nivel, la cumpănă.
5. « Suprafaţa este ceea ce are numai lungime şi lăţime »;
6. « Iar extremităţile suprafeţei sînt linii »;
7. « Suprafaţa plană este aceea care este situată la fel faţă de toate dreptele conţinute »;
8. « Unghiul plan este înclinarea reciprocă a două linii concurente situate într-un plan ».

Toate adevărurile în geometrie au fost împărţite de Euclid în trei categorii: postulate, axiome şi teoreme. Iată cele 5 postulate din Cartea I-a:

« Se cere ca:

1. de la orice punct să se poată duce o linie dreaptă la orice alt punct; (aceasta corespunde ideii că două puncte determină o dreaptă);

2. și că orice dreaptă limitată să poată fi prelungită indefinit;

3. și că dintr-un centru oarecare să se poată descri o circumferință cu o rază oarecare;

4. și că toate unghiurile drepte să fie egale între ele;

5. și că de fiecare dată cînd o dreaptă formează la intersecția ei cu alte 2 drepte unghiuri interne și de aceeași parte, a căror sumă este diferită de două unghiuri drepte, aceste drepte să se întîlnească în acea parte în care se află unghiurile a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte ». Acest postulat a fost obiectul discuțiilor, veacuri de-arîndul fiind denumit și « scandalul geometriei ». Despre el ne vom ocupa mai jos.

Se constată lesne, că postulatele au un caracter pur geometric.

Dăm acum, și primele 9 axiome pentru ca cititorul să-și poată face o părere asupra caracterului lor:

1. Două cantități egale cu a treia sînt egale între ele; adică din $a = b$; $a = c$ urmează: $b = c$.

2. Și dacă la egale se adună egale cele căpătate sînt egale; adică din $a = b$ și $c = d$ urmează: $a + c = b + d$.

3. Și dacă din egale se scad egale, cele rămase sînt egale; adică din $a = b$ și $c = d$, urmează: $a - c = b - d$.

4. Și dacă la inegale adunăm egale căpătăm neegale; adică din $a < b$ și $c = d$ urmează: $a + c < b + d$.

5. Și dacă dublăm egale căpătăm egale: adică din $a = b$ urmează $2a = 2b$.

6. Și jumătățile de egale sînt egale: adică din $a = b$ urmează $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$.

7. Și care se suprapun sînt egale;

8. Și întregul este mai mare decît partea;

9. Și două drepte nu pot închide un spațiu ».

Se crede că axiomele IV, V, VI, IX au fost intercalate de comentatorii lui Euclid.

Axiomele — se constată — au un caracter mai general; în particular ele se aplică și mărimilor geometrice.

Propozițiile (teoremele) enunțate de Euclid se demonstrează complet. Fiecare demostrație are următoarele 6 etape:

— Proteza (expunerea enunțului în general fără a face apel la figură);

— Ecteza (expunerea datelor îndeosebi la probleme);

— Condiția sau delimitarea problemei; (condițiile la care trebuie să satisfacă datele ca problema să fie posibilă);

— Construcția figurilor auxiliare;

— Demonstrația teoremei;

— Concluzia: se repetă proteza, iar la probleme se repetă și ecteza.

Orice demonstrație se încheie cu « *c.c.t.d.* », iar problemele cu « *c.c.t.f.* » (ceea ce trebuia făcut).

Peste tot în opera lui Euclid, se vede preocuparea ca noțiunea fiecărui termen întîlnit pentru prima oară să fie definită cu ajutorul definițiilor de bază, iar fiecare propoziție care nu este axiomă sau postulat, să fie demonstrată oricît de evidentă ar părea.

Acest ideal nu a fost atins peste tot. Astfel, definiția punctului — « ceea ce nu are părți » — nu ne spune nimic; iar definiția liniei — « o lungime fără lățime » — este de asemenea nesatisfăcătoare, întrucît Euclid nu a definit lungimea și lățimea. Analog pentru suprafață — « ceea ce are numai lungime

și lățime ». Azi s-a renunțat la definirea cîtorva elemente: punctul, dreapta, planul, care sînt denumite noțiuni primitive.

O situație asemănătoare găsim la demonstrații. Chiar construcția din propoziția I din Cartea I-a: « să se construiască un triunghi echilateral pe segmentul AB », Euclid o face construind din A și B ca centre, arce de cerc de rază AB. Intersecția celor 2 arce, punctul C, este al treilea vîrf al triunghiului.

Remarcăm însă, că Euclid se bazează doar pe intuiție cînd afirmă fără rezervă, existența punctului C de intersecție. Ori, nici o axiomă din cele puse de Euclid în fruntea operei sale, nu garantează că cele două arce au în adevăr, un punct de intersecție. S-ar putea presupune că cele două arce să se prezinte ca în figura alăturată.

În alte teoreme Euclid folosește noțiunea de « mijlocul unui segment ». Nicăieri însă, el nu demonstrează că un asemenea punct există. De asemenea,

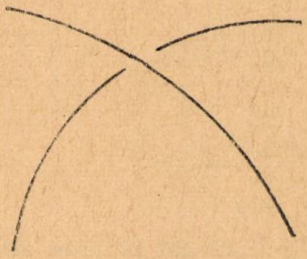


Fig. 2

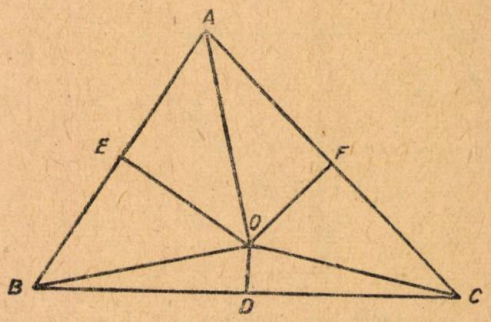


Fig. 3

Euclid folosește termenii « între », « de o parte și de alta », « situat pe », « în interiorul poligonului », « în exteriorul poligonului », dar nicăieri nu definește aceste noțiuni, ci se bazează pe sensul lor unanim acceptat pe baza intuiției.

Ce greșeli putem comite cînd nu ne sînt riguros precizate aceste noțiuni putem vedea din următorul paradox geometric:

Să se dovedească că toate triunghiurile sînt echilaterale.

Fie triunghiul oarecare ABC. Ducem bisectoarea interioară a unghiului A și mediatoarea laturii BC. Putem face următoarele ipoteze:

1. bisectoarea $AO \perp BC$; bisectoarea fiind și înălțime, triunghiul este isoscel, cu vîrful în A;

2. bisectoarea se intersectează cu mediatoarea în D, mijlocul laturii BC; bisectoarea fiind și mediană triunghiul este isoscel cu vîrful în A;

3. bisectoarea se intersectează cu mediatoarea într-un punct O în interiorul triunghiului ABC (fig. 3).

Ducem OB și OC și perpendicularele OE,OF pe laturile AB, respectiv AC. Triunghiul AOE = triunghiul AOF, de unde deducem că $AE = AF$ (1) și $OE = OF$. Triunghiul OBD = tr. OCD, de unde urmează că $OB = OC$. Triunghiul OBE = tr. OCF, de unde urmează $EB = FC$ (2). Adunînd egalitățile (1) și (2) membru cu membru, deducem că $AB = AC$ și deci triunghiul ABC este isoscel, cu vîrful în A.

4. Bisectoarea intersectează mediatoarea într-un punct O din exteriorul triunghiului ABC (fig. 4).

Ducem din nou perpendicularele OE şi OF pe laturile AB respectiv AC ale triunghiului şi dreptele OB şi OC. Vom obţine analog: tr. AOE = tr. AOF, de unde urmează că $AE = AF$ (1) şi $OE = OF$. Triunghiul OBD = tr. OCD, de unde rezultă $OB = OC$. Triunghiul OBE = tr. OCF, deci $BE = CF$ (2). Scăzînd (2) din (1) membru cu membru, obţinem $AB = AC$.

Dacă facem aceleaşi raţionamente pentru bisectoarea unghiului B sau C şi mediatoarea laturii opuse respective, găsim că triunghiul ABC este isoscel cu vîrful în B sau C. Din $AB = AC$ şi $BC = AB$ urmează $AB = BC = CA$,

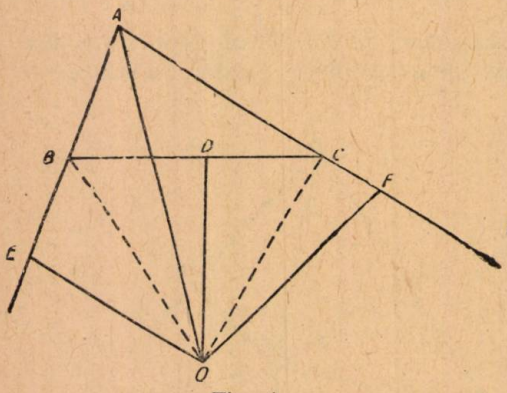


Fig. 4

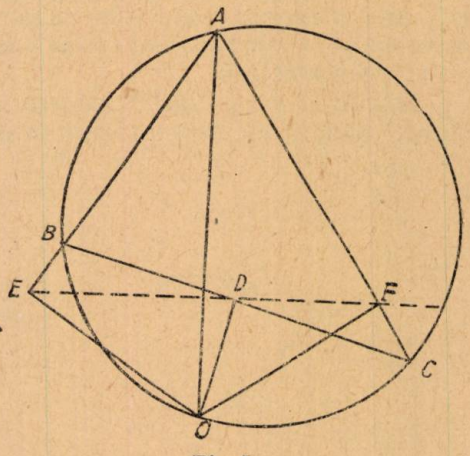


Fig. 5

deci tr. ABC este echilateral. Unde am greşit? O figură făcută judicios, cu instrumentele, ne arată că bisectoarea şi mediatoarea se intersectează într-un punct O în exteriorul triunghiului şi anume, pe cercul circumscris triunghiului, şi că perpendicularele OE şi OF duse din acel punct pe laturile AB şi AC cad, una în interiorul unei laturi, a doua pe prelungirea celeilalte; rezultă că inexactitatea desenului a avut drept urmare, eroarea făcută.

Aceasta nu e deajuns. Ce ne asigură că intersecţia se produce întotdeauna, în exteriorul triunghiului şi că perpendicularele cad ca în figura noastră? Raţionamentul este următorul: bisectoarea unghiului A şi mediatoarea laturii BC împart arcul BC în două părţi egale, deci ele se intersectează în punctul O (fig. 5), mijlocul arcului BC cuprins între laturile unghiului A. Dacă din O coborîm perpendicularele OD, OE, OF pe laturile triunghiului, punctele D. E, F sînt pe aceeaşi dreaptă, dreapta lui Simpson.

O axiomă cunoscută în matematici sub numele de axioma lui Pasch, spune: dacă o dreaptă DEF taie o latură a unui triunghi ea mai taie şi o a doua din laturile triunghiului; se demonstrează apoi, că ea nu poate tăia toate trei laturile. În concluzie, dreapta DEF tăind latura BC în D mai taie pe AB în E, iar pe AC o taie în prelungirea sa, în F. Iată explicaţia riguroasă a faptului că O este în interiorul triunghiului şi că cele două perpendiculare OE şi OF nu pot cădea simultan în interiorul segmentelor AB şi AC sau simultan pe prelungirile lor.

Or, axioma lui Pasch lipseşte în geometria lui Euclid; de asemenea noţiunile « în interior », « în exterior », aşa cum s-a spus şi mai sus.

În schimb, postulatul IV: « se cere ca toate unghiurile drepte să fie egale între ele » este de prisos, întrucît se poate demonstra.

Problema stabilirii minimului de axiome necesare şi suficiente pentru construcţia edificiului solid al geometriei a fost rezolvată abia de matematicianul german David Hilbert, în lucrarea sa « Grundlagen der Geometrie » (Bazele geometriei), apărută în 1899.

Rigurozitatea este împinsă pînă la extrem, nimic nu este acceptat ca evident pe baza intuiţiei. Astfel, se dau unele «axiome de ordonare » ca: fiind date două puncte A şi B există cel puţin un punct C aşa fel ca B este situat între A şi C.

Alt exemplu: fiind date trei puncte A, B, C pe o dreaptă numai unul este cuprins între celelalte două, ş.a.m.d.

Pe baza axiomelor de ordonare se demonstrează că pe o dreaptă ABC există cel puţin un punct C situat între A şi B şi apoi, că există o infinitate de puncte ale dreptei situate între A şi B, lucru care s-a părut totdeauna, atît de evident încît demonstrarea s-a părut inutilă. Se mai demonstrează de asemenea, că orice segment de dreaptă poate fi împărţit în două părţi egale şi că această împărţire este unică. Vom demonstra prima parte:

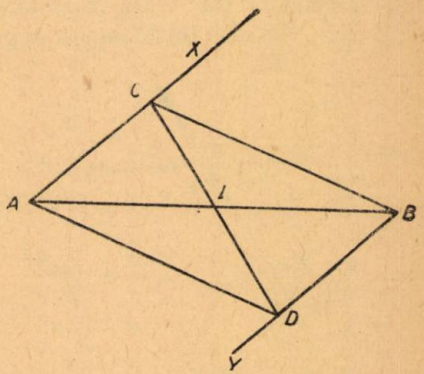


Fig. 6

Fie AB un segment de dreaptă. Ducem semidreptele AX şi BY deoparte şi de alta a segmentului AB încît să formeze cu AB unghiuri egale. (Noţiunile « deoparte » şi « de alta », « unghiuri egale » sînt bine lămurite anterior) *). Luăm pe AX şi BY segmentele AC şi BD egale între ele (fig. 6).

tr ABC = tr ABD ($AC = BD$, $AB = AB$, $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$, urmează $BC = AD$.

tr ACD = tr BCD (toate laturile respectiv egale); deci, $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.

Punctele C şi D fiind de o parte şi de cealaltă a dreptei AB, dreapta CD taie dreapta AB într-un punct I.

Triunghiul ACI = tr. BDI ($AC = BD$ şi unghiurile alăturate respectiv egale). Urmează $AI = BI$, *c.c.t.d.*, adică, segmentul AB are un mijloc I. A doua parte a teoremei, că un segment AB nu are decît un singur mijloc foloseşte în demonstrare axiome pe care nu le-am dat aici.

★

O problemă care a frămîntat mult pe matematicieni a fost postulatul V, care nu li se părea prea evident şi a cărui trecere în rîndul teoremelor a fost încercată veacuri de-a rîndul.

Formularea după Euclid: « dacă două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri interne şi de aceeaşi parte a secantei, a căror sumă este diferită de două unghiuri drepte, atunci aceste drepte prelungite la infinit se întîlnesc şi anume, de acea parte a secantei în care această sumă este mai mică decît două unghiuri drepte ».

*) O dreaptă împarte punctele planului în două clase. Două puncte sînt de aceeaşi clasă cînd segmentul de dreaptă care le uneşte nu taie dreapta AB. Ele sînt de clase diferite cînd segmentul de dreaptă care le uneşte taie dreapta AB. Punctele aceleiaşi clase sînt « de o parte a dreptei AB »; două puncte din clase diferite sînt « de o parte şi de cealaltă » a dreptei AB.

Din $A_1 + B_1 \neq 2dr$; $A_2 + B_2 \neq 2dr$ urmează că a este concurent cu b, (fig. 7), de aci decurge unicitatea paralelei. Fie $b \parallel a$, ambele fiind perpendiculare pe MN (fig. 8). Presupunem că prin M mai putem duce o dreaptă $b_1 \parallel a$; însă $\widehat{bMN} = 1dr$; atunci $\widehat{b_1MN} \neq 1dr$. Deci, $\widehat{bMN} + \widehat{aNM} \neq 2dr$, urmează că b_1 e concurent cu a. Am demonstrat astfel, unicitatea paralelei duse printr-un punct exterior unei drepte la acea dreaptă.

Din unicitatea paralelei dusă printr-un punct exterior acelei drepte urmează că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 2 unghiuri drepte (demonstrația este dată în manual), apoi teorema lui Thales, teoria asemănării figurilor, teorema lui Pitagora și geometria metrică etc. Astfel, postulatul paralelelor stă la baza majorității teoremelor importante din geometria elementară. Reciproc, presupunînd suma unghiurilor unui triunghi egală cu două unghiuri drepte urmează axioma paralelor.

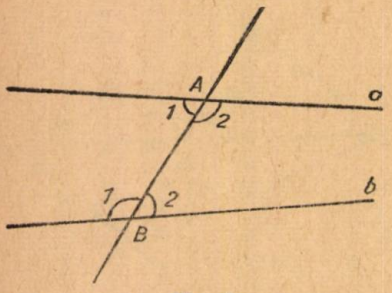


Fig. 7

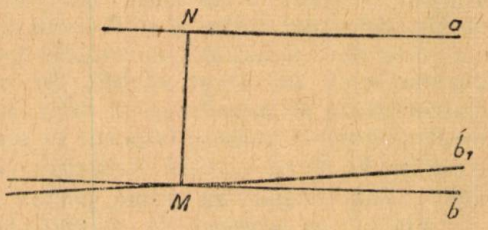


Fig. 8

Din istoria încercărilor de a demonstra postulatul al V-lea se remarcă în deosebi, încercările lui Saccheri (1667—1733) expuse în lucrarea sa « Euclid curățat de orice pată », Lambert (1728—1777) cu lucrarea sa « Teoriile liniilor paralele », Legendre, Lagrange și alții.

Se povestește că Lagrange expunînd la Academie memoriul prin care încerca să demonstreze postulatul lui Euclid a întrerupt expunerea și a părăsit sala cu cuvintele: « trebuie să mă mai gîndesc ». Într-atîta a frămîntat problema postulatului al V-lea pe matematicieni.

Vom înfățișa schema demonstrării postulatului dată de Legendre.

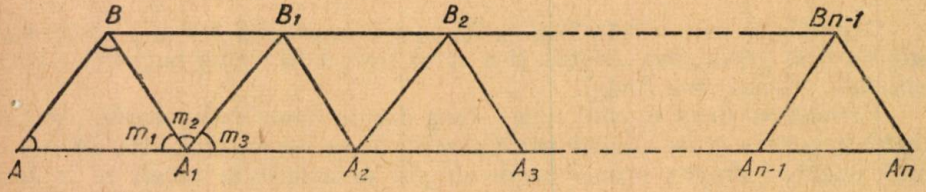


Fig. 9

Acesta a demonstrat că suma unghiurilor unui triunghi nu poate fi mai mare ca două unghiuri drepte, că nu poate fi mai mică decît două unghiuri drepte și ca atare nu rămîne decît că ea este egală cu două unghiuri drepte; ori de aci urmează postulatul lui Euclid.

Socotim că este util pentru cititorii noştri să cunoască demonstraţia teoremei I-a a lui Legendre: « suma unghiurilor unui triunghi nu poate fi mai mare decît două unghiuri drepte ».

Fie triunghiul ABA_1 (fig. 9). Vrem să demonstrăm că $\hat{A}+\hat{B}+\hat{A}_1 \leqslant 2\,dr$. Se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunem contrariul: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{A}_1 > 2dr$.

Construim pe prelungirea lui AA_1 segmentele $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = AA_1$. Pe fiecare din ele construim un triunghi $A_iB_iA_{i+1} = \text{tr. } ABA_1$. Din egalitatea triunghiurilor $BB_1A_1 = B_1B_2A_2$; ($BA_1 = B_1A_2$; $B_1A_1 = B_2A_2$; $\widehat{BA_1B_1} = \widehat{B_1A_2B_2}$), conchidem $BB_1 = B_1B_2$. Relativ la toate triunghiurile obţinem:

$$BB_1 = B_1B_2 = \ldots = B_{n-2}B_{n-1}.$$

Comparînd triunghiurile ABA_1 şi BA_1B_1, constatăm că au două laturi respectiv egale $AB = A_1B_1$ şi AB comună. Cum am presupus $A+B+m_1 > 2dr$ şi cum avem $m_1 + m_2 + m_3 = 2dr$, urmează $B > m_2$.

Triunghiurile ABA_1 şi A_1BB_1 avînd două laturi respectiv egale şi unghiul cuprins între ele neegal ($B > m_2$) urmează $AA_1 > BB_1$.

Comparaţia liniilor ce unesc punctele A şi A_n ne dă

$$AA_n < AB + BB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-2}B_{n-1} + B_{n-1}A_n. \qquad (1)$$

Dar $AA_n = n \cdot AA_1$. Relaţia (1) devine $n \cdot AA_1 < AB + BA_1 + (n-1) \cdot BB_1$ sau $n(AA_1 - BB_1) < AB + BA_1 - BB_1$. Cum $AA_1 > BB_1$, urmează $AA_1 - BB_1 =$ un segment a. Analog, $AB + BA_1 - BB_2 = A_1B_1 + BA_1 - BB_1 =$ un segment b.

Ar însemna să existe două segmente a şi b încît pentru orice n să aibă loc inegalitatea $n \cdot a < b$ (2). Ori există o axiomă a lui Eudoxiu Arhimede, care precizează: « oricare ar fi segmentele a şi b, există totdeauna un număr n încît $n \cdot a > b$, adică mai intuitiv, luînd pe a ca unitate oricît de mic ar fi el putem găsi un număr n încît să putem acoperi în întregime şi depăşi segmentul b, cu n segmente a. Relaţia (2) contrazice axioma lui Eudoxiu Arhimede. Contradicţia la care am ajuns demonstrează teorema.

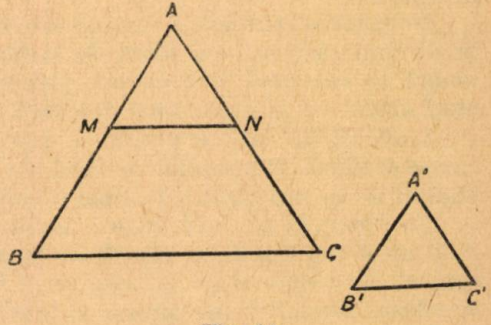


Fig. 10

Dacă această teoremă a fost demonstrată riguros, în schimb teorema lui Legendre, că « suma unghiurilor unui triunghi nu poate fi mai mică decît două unghiuri drepte » foloseşte ca un element în demonstraţie, o propoziţie echivalentă cu postulatul lui Euclid, din care cauză demonstraţia este greşită.

Un alt matematician, Wallis, a demonstrat că dacă există două triunghiuri asemenea dar neegale, urmează de aci postulatul lui Euclid.

Într-adevăr, demonstraţia făcîndu-se cu ajutorul unei paralele recunoaşterea existenţei triunghiurilor asemenea e condiţionată de admiterea postulatului lui Euclid. W. Bolyai a încercat să demonstreze postulatul lui Euclid

arătînd că dacă prin trei puncte necolineare se poate duce un cerc, urmează de aci postulatul lui Euclid.

Am prezentat exemple de încercări pentru demonstrația postulatului lui Euclid, dar toate demonstrațiile foloseau într-o formă sau alta, postulatul lui Euclid. Așa dar postulatul nu poate fi luat ca teoremă.

Lobacevschi a rezolvat problema astfel: « dacă la celelalte axiome adăugăm principiul care neagă postulatul lui Euclid asupra paralelelor atunci pe baza lor se poate construi un sistem logic care nu duce la contradicții ».

În adevăr, el a formulat un postulat: « prin punctul A exterior dreptei a trec cel puțin două drepte b și c care nu au puncte comune cu dreapta a ».

La Lobacevschi, suma unghiurilor unui triunghi este mai mică ca două unghiuri drepte și diferă de la un triunghi la altul; nu există dreptunghi și nici asemănare. Iar prin trei puncte oarecare necolineare nu se poate duce întotdeauna un cerc.

Lobacevschi a dezvoltat geometria sa ajungînd la concluzii foarte depărtate de punctul de plecare. Geometria lui, socotită la început, de cei mai mulți contemporani, ca o ficțiune se aplică în totul în practică.

Mai interesant este faptul că geometria lui Euclid se prezintă ca un caz particular al geometriei lui Lobacevschi, cu aplicații într-un spațiu destul de limitat.

Cititorul, căruia acest articol i-a pus doar problema, este sfătuit să studieze bibliografia enumerată mai sus cu ajutorul căreia va adînci lucrurile și le va vedea mai amplu.

DIFRACȚIA LUMINII

ACHIM MARINESCU

DIN antichitate și pînă la începutul secolului al XIX-lea, dezvoltarea opticii s-a bazat pe ideea că într-un mediu omogen, lumina se propagă în linie dreaptă.

Propagarea rectilinie a luminii este dovedită de faptul că un corp opac ținut în drumul razelor unei surse de lumină punctiformă aruncă pe un ecran o umbră cu conturul bine definit, precum și posibilitatea de a obține imaginea unui obiect cu ajutorul unei deschideri mici.

Articolul de față cuprinde o expunere asupra fenomenelor de difracție cunoscute încă din secolul al XVII-lea, care dovedesc că în realitate există abateri de la propagarea în linie dreaptă a luminii.

S-a observat că dacă între o sursă de lumină monocromatică punctiformă A și un ecran alb E se așează un ecran circular MN de dimensiuni mici, în centrul B al umbrei geometrice se află un punct luminos înconjurat de zone circulare alternativ întunecate și luminate (fig. 1).

Dacă ecranul MN este foarte îngust, un fir de păr sau o sîrmă subțire, în centrul umbrei geometrice se formează o dungă luminoasă înconjurată de dungi întunecate și luminoase. Punînd în locul ecranului MN un ecran cu margini rectilinii bine conturate MD, ar trebui să observăm pe ecranul E două regiuni: una luminată și alta în umbră, în partea de jos a centrului B (fig. 2).

Experienţa arată că lumina pătrunde în umbra geometrică BP şi că în regiunea luminată, în apropiere de B, se observă o serie de franje (benzi luminoase alternînd cu benzi întunecate). De asemenea s-a observat că dacă razele care pleacă din A întîlnesc în drumul lor un ecran MN avînd la mijloc o mică deschidere circulară, se obţine pe ecranul E în punctul B un cerc luminos înconjurat de inele (zone) alternativ întunecate şi luminate (fig. 3).

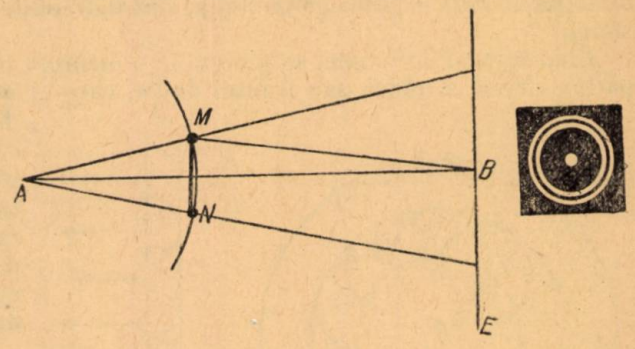


Fig. 1

Fenomenele descrise se petrec aşa ca şi cum lumina nu s-ar propaga în linie dreaptă, ci ar ocoli obstacolele mici. Fenomenul de ocolire a obstacolelor de către razele de lumină se numeşte *difracţie*.

Pentru explicarea difracţiei au fost enunţate diferite teorii; explicaţia justă se sprijină pe concepţia ondulatorie a luminii, schiţată de Huygens în cartea «Tratat despre lumină», care a apărut în 1690.

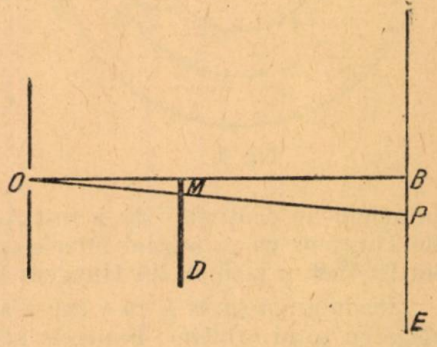


Fig. 2

Pornind de la analogia dintre multe fenomene acustice şi optice, Huygens a presupus că lumina, ca şi sunetul, se propagă prin unde într-un mediu special, eterul, care se găseşte atît în interiorul corpurilor materiale, cît şi în spaţiul dintre ele. Huygens susţine că în jurul unei surse punctiforme de lumină L se răspîndesc unde sferice, care se propagă în toate direcţiile cu aceeaşi viteză C (fig. 4).

Dacă la timpul zero vibraţia pleacă din L, după timpul t ea se va găsi răspîndită pe suprafaţa sferică S, de rază $c.t$. Dacă suprimăm sursa L, vibraţia continuă să se propage mai departe şi la timpul $t + \Delta t$ se va găsi repartizată pe o altă suprafaţă de undă S_1.

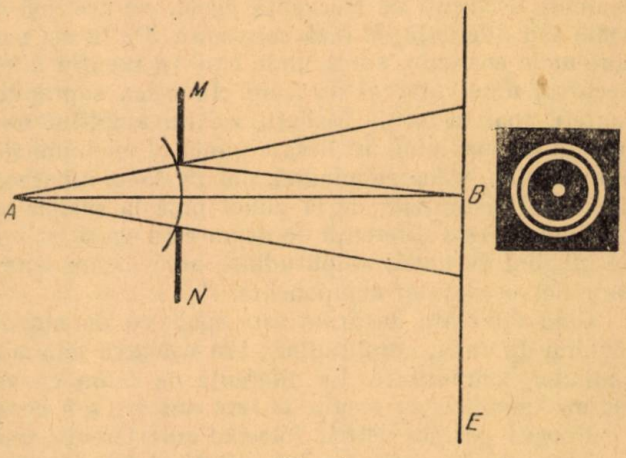


Fig. 3

Huygens consideră suprafaţa de undă S_1 formată dintr-o infinitate de puncte $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$, capabile să înlocuiască pe L.

Vibrațiile care pleacă la timpul t din aceste puncte, numite unde elementare sau unde secundare, se vor găsi după timpul $t+\Delta t$ pe suprafețele $N_1, N_2, N_3, \ldots$ $\ldots N_n$, a căror înfășurare este tocmai suprafața de undă S_2. Razele, adică direcțiile în care se probagă oscilația, sînt îndreptate de la centru spre periferia sferei.

Cînd izvorul de lumină se găsește la o distanță foarte mare de observator, partea sferică a undei, sau frontul undei, care vine în acel loc poate fi considerat plan; se spune atunci că unda este plană. Dacă unda plană se propagă într-un mediu izotrop omogen, razele reprezintă un fascicul de drepte paralele perpendiculare pe planul frontului de undă (fig. 5).

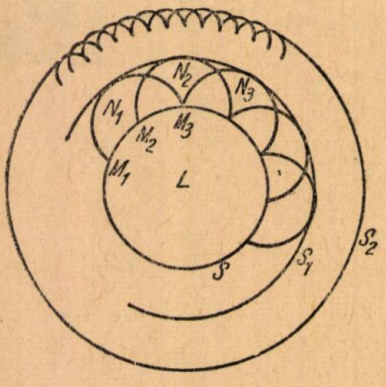


Fig. 4

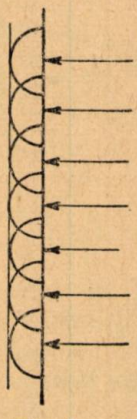


Fig. 5

Principiul lui Huygens în forma inițială, nu presupune periodicitate în fenomenele luminoase; cercetătorul nu întrebuințează nicăieri noțiunea de lungime de undă și nu rezolvă problema propagării rectilinii a luminii.

Cel care a dat acestui principiu un conținut fizic a fost A. Fresnel (1815). El a completat principiul lui Huygens cu principiul interferenței, enunțat de Th. Young. După părerea lui Fresnel, principiul lui Huygens trebuie formulat astfel:

Înconjurăm sursa L cu o suprafață S imaginară și închisă, pe care o putem alege cu totul arbitrar. Punctele acestei suprafețe, pe care le considerăm noi surse de unde, sînt surse coerente, capabile să înlocuiască sursa L. Aceste surse coerente oscilează cu frecvență egală, au aceleași direcții de oscilație, au faze egale sau diferență de fază constantă. De la ele pornesc unde secundare, care sînt unde coerente, adică unde care își mențin diferența de fază constantă în decursul unui interval de timp. În urma suprapunerii acestor unde (interferenței), apar în mediu oscilații a căror amplitudine este deosebită în diferitele puncte ale mediului. În fiecare punct al mediului se obține valoarea maximă a amplitudinii, valoarea minimă, sau o valoare intermediară, în funcție de valoarea diferenței distanțelor de la punct pînă la sursele coerente.

Cînd această diferență de drum este egală cu zero sau cu un număr întreg de lungimi de undă, amplitudinea are valoare maximă, egală cu suma amplitudinilor oscilațiilor componente.

Cînd diferența de drum este egală cu un număr fără soț de jumătăți de lungimi de undă, amplitudinea are valoarea minimă, egală cu diferența amplitudinilor componente. La diferențe de drum cu valori intermediare va avea loc un anumit efect mediu de intensificare sau de slăbire a amplitudinii.

Fresnel găsește astfel, folosind interferența undelor elementare emise de sursele auxiliare, valoarea intensității undei rezultante (intensitatea unei unde este proporțională cu pătratul amplitudinii).

Principiul lui Huygens modificat de Fresnel în felul acesta, devine principiul fundamental al opticii ondulatorii și permite rezolvarea problemei distribuției

intensității luminii, atît în cazul propagării libere a undelor luminoase, cît și în prezența unor corpuri opace, adică în cazul difracției.

Să explicăm cu ajutorul acestui principiu, propagarea rectilinie a luminii, folosind metoda zonelor lui Fresnel.

Să considerăm o suprafață de undă S emisă de o sursă monocromatică și punctiformă L și să vedem ce se întîmplă într-un punct oarecare de observare A (fig. 6). Conform principiului lui Huygens-Fresnel, înlocuim acțiunea sursei L prin acțiunea surselor imaginare M_1, M_2, M_3, ... distribuite pe suprafața S. Punctul P, care este cel mai apropiat de A, se numește polul undei. Undele elementare coerente provenite de la aceste puncte, ajungînd în A, interferă și rezultanta lor dă amplitudinea vibrației punctului A. Să alegem punctele M_1, M_2, M_3 ... ca să difere prin $\lambda/2$. În acest caz undele trimise nu sînt toate în concordanță de fază.

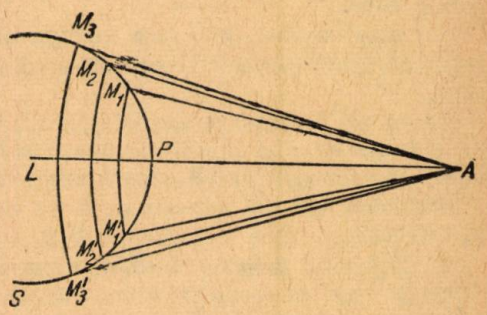


Fig. 6

Cînd între polul undei și aceste puncte există o diferență de drum egală cu un număr par de $\lambda/2$, vibrațiile ajunse în A sînt în concordanță de fază, iar dacă diferența de drum este un număr impar de $\lambda/2$, vibrațiile sînt în discordanță de fază.

Din punctul A, considerat centru, să descriem sfere cu razele $AM_1 = AP + \lambda/2$, $AM_2 = AP + 2\lambda/2$, $AM_3 = AP + 3\lambda/2$, etc; aceste sfere împart suprafața de undă S într-o serie de zone elementare egale, foarte mici și foarte numeroase. Toate punctele unei zone trimit în A vibrații în concordanță de fază, însă două zone alăturate trimit vibrații discordante între ele. Punctele primei zone trimit oscilații care se compun în A și dau lui A o amplitudine rezultantă, pe care o notăm cu $+a_0$. Punctele zonei $M_1M'_1M'_2M_2$ sînt în discordanță față de vibrațiile din prima zonă. Să notăm cu $-a_1$ amplitudinea pe care o crează această zonă în punctul A.

Vibrațiile punctelor din zona $M_2M'_2M'_3M_3$ sînt în concordanță de fază cu acelea din zona centrală și în discordanță cu acelea din zona $M_1M'_1M'_2M_2$. Fie $+a_2$ amplitudinea lui A rezultată prin interferența undelor care vin de la punctele acestei zone.

Extinzînd raționamentul, ajungem la valoarea amplitudinii rezultante în A, dată de relația:

$$a = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$$

În afară de faptul că zonele alăturate se slăbesc reciproc acțiunea lor scade treptat de la zona centrală spre cele periferice. Cu cît zonele sînt mai depărtate de A cu atît punctele aceleași zone sînt mai discordante și undele se anulează între ele. Ținînd seamă de faptul că zonele alăturate se slăbesc reciproc, amplitudinea oscilației în A este dată de relația

$$a = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \ldots,$$

care se mai poate scrie sub forma

$$a = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - (a_5 - a_6) - \ldots$$

Expresiile din paranteză sînt pozitive, fiindcă $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 \ldots$ datorită faptului că acţiunea zonelor scade treptat de la centru spre periferie.

Rezultă că $a < a_0$, adică amplitudinea rezultantă a punctului A ce apare în urma interferenţei luminii care pleacă de la punctele undei sferice S, este mai mică decît amplitudinea oscilaţiei create de acţiunea zonei centrale.

Lăsînd liberă numai prima zonă vom obţine în A o intensitate luminoasă oarecare; dacă lăsăm numai a doua zonă, obţinem o intensitate mai mică decît a primei zone ş.a.m.d. Dacă lăsăm zona întîia şi a doua, intensitatea luminoasă va fi mai mică decît în cazul primei zone singure, iar dacă lăsăm întreaga undă intensitatea luminoasă va fi redusă la jumătatea intensităţii ce revine de la prima zonă.

Cu alte cuvinte, acţiunea întregii unde în punctul A este mai mică decît acţiunea zonei centrale şi pare că se datorează numai acţiunii jumătăţii primei zone.

Deoarece jumătatea acestei prime zone este foarte mică, lumina se propagă de la L spre B ca şi cum fluxul luminos s-ar mişca în interiorul unui canal foarte îngust, astfel încît propagarea luminii este rectilinie.

Folosind metoda zonelor dată de Fresnel, să explicăm două cazuri simple de difracţie, pe care le-am amintit în introducere.

a) *Difracţia printr-o deschidere circulară.* — Să considerăm o sursă L şi la distanţa «a» un ecran MN cu o deschidere circulară. Să studiem fenomenele care au loc în punctul A de pe dreapta care uneşte sursa cu centrul deschiderii. Descompunînd în zone Fresnel unda care ajunge la deschidere, în funcţie de dimensiunile acesteia, vor încăpea mai multe sau mai puţine zone. Dacă deschiderea este mică, aşa încît ecranul cuprinde o singură zonă Fresnel, în punctul

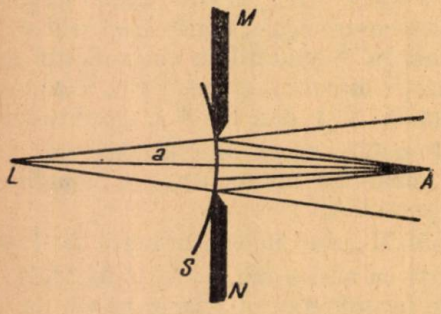


Fig. 7

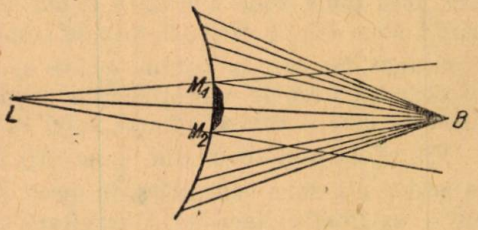


Fig. 8

A vom avea un maxim de intensitate luminoasă, iar dacă el cuprinde două zone, vom avea un minim. În cazul cînd ecranul cuprinde un număr impar de zone, iluminarea în A va fi mai mare decît în lipsa ecranului; ea va fi mai mică, dacă ecranul cuprinde un număr par de zone (fig. 7).

b) *Difracţia la marginile unui ecran circular opac.* — Dacă aşezăm în faţa unei surse L un ecran circular M_1M_2 (fig. 8) vibraţiile în B provin de la unda exterioară ecranului. Repetînd raţionamentul ajungem la concluzia că amplitudinea totală în B «a» este egală cu jumătatea amplitudinii a produsă de prima zonă liberă şi că intensitatea luminoasă în B este aceeaşi ca şi în lipsa ecranului. Punctul luminos din B este înconjurat de inele alternativ întunecate şi luminate, care devin mai puţin vizibile pe măsură ce se depărtează de B.

Un alt caz de difracţie cu care ne vom ocupa în cele ce urmează este difracţia cu raze paralele sau difracţia Frauenhofer, care nu se deosebeşte principial de difracţia explicată mai sus, adică de difracţia lui Fresnel.

Să aşezăm în focarul unei lentile convergente o sursă de lumină. Obţinem un fascicul emergent paralel. Folosind o altă lentilă convergentă, putem să îndreptăm fasciculul de lumină paralel spre un punct oarecare al unui ecran aşezat în planul focal al acestei a doua lentile. Pe acest ecran vom prinde figuri de difracţie, dacă aşezăm între cele două lentile ecrane cu orificii de diferite dimensiuni şi forme.

Să considerăm că fasciculul de lumină paralel cade pe un paravan ce are o fantă îngustă, de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă λ a luminii folosite în experienţă (fig. 9).

Conform principiului lui Huygens, fiecare punct al fantei devine un izvor de lumină secundar de unde coerente, care se propagă în spaţiul din spatele fantei. Pe un alt ecran MM_1 se obţin maxime şi minime. Amplitudinea undelor care ajung pe acest ecran variază cu distanţa razelor, iar variind amplitudinea, va varia şi energia luminoasă pe acest ecran, fiind proporţională cu patratul amplitudinilor undelor luminoase.

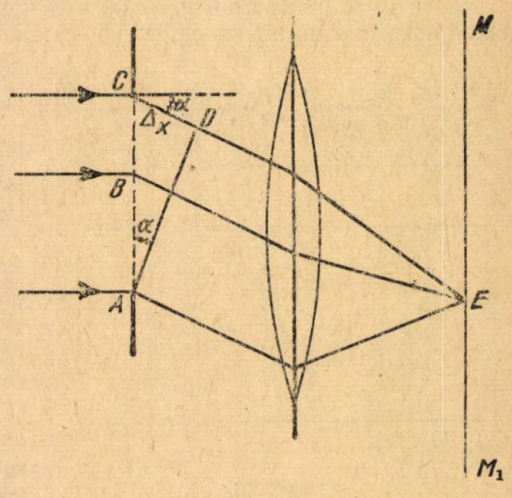


Fig. 9

Să presupunem numai două unde: una care porneşte din zona elementară de la punctul A şi cealaltă, dintr-un punct oarecare B; aceste unde sînt coerente, însă de faze diferite.

Să considerăm direcţia de propagare care face cu normala unghiul α. Prin suprapunere, aceste unde dau naştere fenomenului de interferenţă şi în punctul E al ecranului MM_1 avem fie un maxim, fie un minim de intensitate luminoasă, fie o intensitate intermediară.

Dacă diferenţa de fază dintre unde este egală cu zero sau cu un număr întreg de perioade, amplitudinea undei rezultate din compunerea lor va fi maximă. În acest caz, diferenţa de drum Δx este egală cu zero sau cu un număr întreg de lungimi de undă, adică $\Delta x = k\lambda$, în care $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, şi avem un maxim de intensitate luminoasă. Cînd diferenţa de fază este egală cu un număr impar de perioade sau cînd diferenţa de drum a razelor este egală cu un număr impar de jumătăţi de lungimi de undă, $\Delta x = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, în care din nou $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ avem minim de intensitate luminoasă.

Considerînd diferite direcţii ale razelor de lumină — deci variind unghiul α — vom obţine o serie de maxime şi de minime de intensitate luminoasă. Poziţia acestor maxime şi minime depinde de lungimea de undă λ a luminii şi de lărgimea fantei. Cu cît lungimea de undă este mai mare cu atît distanţele dintre maximele succesive sînt mai mari şi cu cît lărgimea fantei descreşte, cu atît zona centrală (maximul central) se măreşte.

Dacă în loc de o singură fantă, punem două fante apropiate, după cum procedează Young în experienţa lui, se vor produce formele de interferenţă cunoscute. În acest caz maximile de difracţie sînt mai înguste decît în cazul unei singure fante.

Dacă mărim numărul de fante, maximile devin distincte şi înguste, despărţite prin intervale negre.

Un sistem de fante fine rectilinii, egale, paralele şi egal distanţate consituie o reţea optică.

Aceasta se poate realiza trăgînd cu diamantul pe sticlă, trăsături foarte fine, echidistante şi de lăţimi egale. Urma diamantului are rolul ecranului opac, iar părţile nesgîriate sînt regiuni transparente pentru lumină (fig. 10).

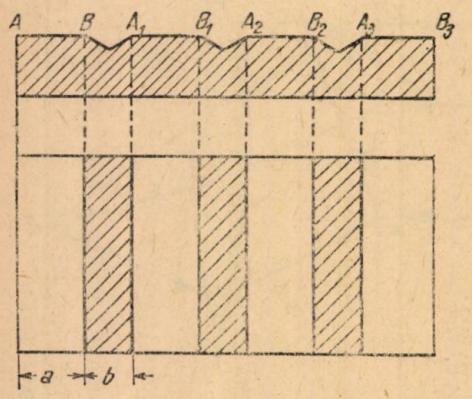


Fig. 10

Dacă notăm cu a distanţa de la A la B, adică lăţimea unei regiuni transparente şi cu b distanţa de la B la A_1 lăţimea regiunii opace, suma $(a + b)$ este o constantă care se numeşte perioada sau constanta reţelei. Dacă numărul de trăsături pe 1 mm este N avem $N(a + b) = 1$. Numărul N este dat de constructor sau se măsoară la microscop cu ajutorul micrometrului ocular.

Primele reţele de difracţie au fost executate de Frauenhofer la începutul secolului trecut, care înfăşurînd o sîrmă între două şuruburi în poziţie paralelă a obţinut reţele cu 40 ... 340 linii pe inch. Un inch (un ţol) = 25, 399956 mm $\approx$ 25,4 mm.

Tot Frauenhofer a obţinut reţele mai perfecţionate trăgînd pe o lamă de sticlă o mulţime de sgîrieturi echidistante cu ajutorul unei maşini de divizat. Prin perfecţionarea ulterioară a tehnicii au fost obţinute reţele avînd pînă la 30000 linii pe inch, adică mai mult de 1000 de trăsături pe 1 mm.

Reţelele obţinute direct sînt foarte scumpe, din care cauză sînt folosite mai mult copiile, care sînt mult mai ieftine.

Pentru obţinerea acestor copii se depune pe reţea o peliculă de colodiu, care se detaşează după uscare şi se lipeşte pe o sticlă plană. Copii se mai pot obţine şi prin reproducere fotografică.

În afară de reţelele prin transmisie, există şi reţele prin reflexie, care se obţin prin executarea unor trăsături fine şi paralele pe o suprafaţă metalică.

Aceste reţele prezintă avantajul că au o singură suprafaţă care trebuie lucrată şi pot fi folosite în ultraviolet şi în infraroşu, deoarece aceste raze nu sînt absorbite, cum se întîmplă în cazul sticlei.

Să studiem fenomenele de difracţie produse de o reţea plană.

Fie un fascicul de raze monocromatice paralele, care cade perpendicular pe planul reţelei de constantă $(a + b)$ (fig. 11). Suprafaţa de undă va fi plană şi paralelă cu planul reţelei. Conform principiului lui Huygens, considerăm punctele m şi m_1 care sînt puncte corespondente sau simetrice, drept centre de vibraţie, care trimit unde în diferite direcţii. Să considerăm una din aceste

direcţii, care face unghiul φ cu direcţia razelor incidente. Diferenţa de drum între cele două raze este m_1k, pe care o notăm cu Δ. Din triunghiul m_1Km dreptunghic în K, avem $\Delta = (a + b) \sin\varphi$.

Dacă am ales pe φ astfel încît diferenţa de drum între raze să fie egală cu un număr par de $\lambda/2$, toate vibraţiile emise de punctele simetrice după această direcţie vor ajunge în concordanţă de fază şi vom avea maxim de intensitate luminoasă. Dacă diferenţa de drum este egală cu un număr impar de $\lambda/2$, avem minime.

Direcţiile după care obţinem maxime sînt date de relaţia $(a + b) \sin\varphi = 2k\frac{\lambda}{2}$; dacă înlocuim pe $a + b = \frac{1}{N}$, ea va avea forma $\sin\varphi = kN\lambda$. Pentru $k = 0$, $\sin\varphi = 0$, $\varphi = 0$, avem maximul central sau maximul zero. Pentru $k = 1$ avem $\sin\varphi = N\lambda$, relaţie care dă direcţia maximului de ordinul prim, iar dacă $k = 2, 3, 4, \ldots$ obţinem $\sin\varphi_2$, $\sin\varphi_3$ care arată direcţia maximelor de ordinul 2, 3, 4, ...

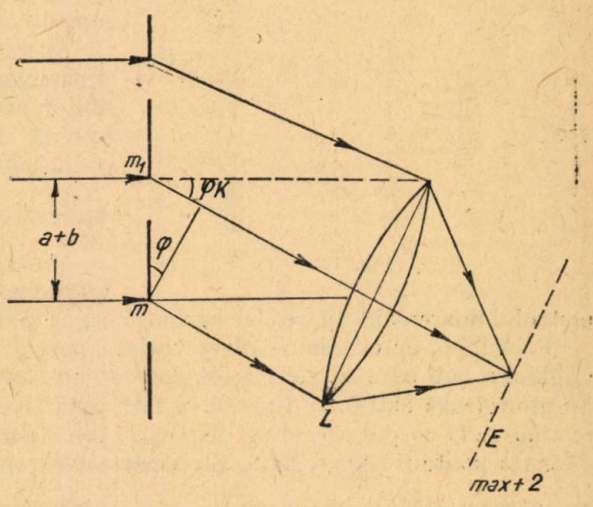


Fig. 11

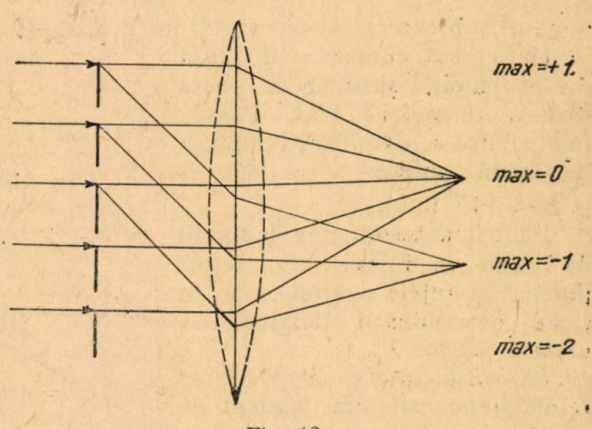


Fig. 12

În rezumat, în fenomenul de difracţie produs de o reţea optică pe care cade un fascicul paralel de lumină monocromatică observăm pe un ecran aşezat de partea opusă o serie de maxime de culoarea cu care lucrăm, separate prin spaţii obscure.

Maximul central este cel mai intens şi pe măsură ce ne depărtăm de acesta maximele sînt mai slabe (fig. 12).

Să revenim la relaţia $\sin\varphi = N\lambda$, care după cum am văzut, dă direcţia maximului de ordinul I. Din aceasta se vede că unghiul φ (adică unghiul format de direcţiile maximului de ordinul zero şi de ordinul unu) depinde de lungimea de undă şi este proporţional cu ea.

Deoarece lungimea de undă a luminii roşii este de 0,76 μ şi mai mare decît λ violet, care este de 0,38 μ, rezultă că φ roşu $> \varphi$ violet, adică maximul de ordinul unu este mai depărtat de maximul de ordinul zero, în lumina roşie decît în lumina violetă.

Luminînd rețeaua cu un fascicul de lumină albă, în planul focal principal al lentilei L, în direcția razelor incidente vom avea maximul de ordinul zero (central) alb, deoarece $k = 0$ și $\varphi = 0$ (fig. 13).

În locul maximelor de ordinul 1, 2, 3,... obținem spectre de ordinul 1, 2, 3,... îndreptate cu violetul spre centru și roșul în afară, adică spectre în care deviația culorilor este proporțională cu lungimea de undă; aceste spectre se mai numesc spectre *normale*.

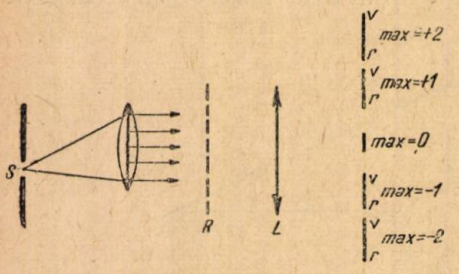


Fig. 13

Spectrele separate nu sînt în număr prea mare. Se disting 3 — 4 spectre. Mai departe ele se suprapun și dau o lumină albă-gris, numită lumină de ordin superior.

Aplicații ale fenomenelor de difracție

Dintre aplicațiile fenomenelor de difracție vom studia numai măsurarea diametrului aparent al diferitelor corpuri cerești și determinarea lungimii de undă.

Principiul determinării diametrului aparent al corpurilor cerești, adică a unghiului sub care se vede acest corp se bazează pe difracția prin două fante. Se procedează astfel: se fixează în fața obiectivului telescopului la care ajunge lumina de la corpul ceresc un dispozitiv prevăzut cu două fante paralele a căror distanță poate fi ușor reglată. Se depărtează treptat fantele pînă dispar franjele de interferență. Teoria prevede că franjele dispar cînd $\alpha = 1{,}22\frac{\lambda}{2}$, α fiind unghiul sub care se vede corpul, iar d distanța dintre fante.

Dacă se cunoaște distanța dintre pămînt și astru se poate deduce diametrul real. Pentru lumina albă se consideră lungimea de undă medie $\lambda = 5600$ Å (1 Å $= 10^{-7}$ mm).

Pentru determinarea lungimii de undă se folosesc fie rețele plane, fie rețele spațiale, ca în cazul determinării lungimii de undă a razelor X.

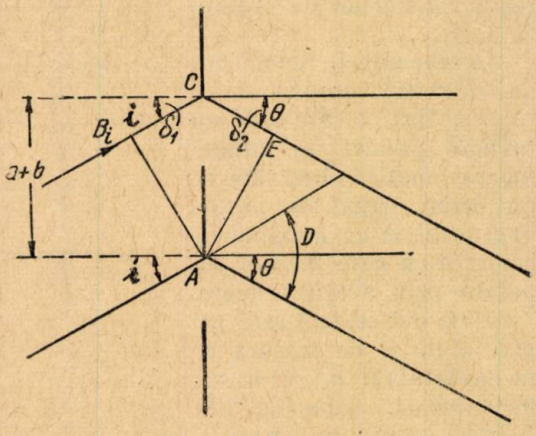


Fig. 14

Să considerăm că asupra unei rețele plane cade un fascicul de raze paralele care nu sînt normale pe rețea, așa încît înainte de a ajunge la rețea ele au o diferență de drum $\delta_1 = BC$, iar după ce au trecut prin rețea, au o diferență de drum $\delta_2 = CE$ (fig. 14). Diferența de drum totală va fi

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Valoarea diferenței de drum δ_1 se găsește din triunghiul ABC, $\delta_1 = (a+b)\sin i$, iar diferența de drum δ_2 din triunghiul AEC, $\delta_2 = (a+b)\sin\theta$. Adunînd δ_1 cu δ_2 obținem $\delta = (a + b)(\sin i + \sin\theta)$.

Cînd această diferență de drum este egală cu un număr întreg de $\lambda/2$ avem maximul adică,

$$(a + b)\ (\sin i + \sin \theta) = 2k\frac{\lambda}{2}.$$

Înlocuind în această relație, pe $a + b = \frac{1}{N}$ obținem

$$\sin i + \sin \theta = kN\lambda.$$

Prelungind raza incidentă observăm că unghiul de deviație D este suma unghiurilor i și θ, adică $D = i + \theta$.

Ca și în cazul prismei, acest unghi de deviație are valoarea minimă atunci cînd $i = \theta$. În acest caz relația $\sin i + \sin \theta = kN\lambda$ devine $2 \sin i = kN\lambda$, astfel încît valoarea lungimii de undă este dată de relația $\lambda = \frac{2 \sin i}{kN}$ unde k este numărul maximului.

Una din metodele mai importante de determinare a lungimii de undă este metoda goniometrului.

Goniometrul este format dintr-un cerc gradat în jumătăți de grad, pe care alunecă un colimator cu fanta C și o lunetă L cu fir reticular și vernier (fig. 15).

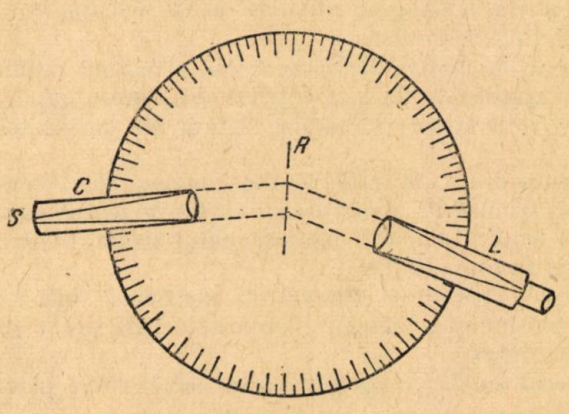


Fig. 15

În centrul măsuței se fixează rețeaua R. Se luminează cu o sursă de lumină monocromatică fanta colimatorului a cărui lungime de undă vrem să o măsurăm. Așezăm rețeaua perpendicular pe planul fantei și măsurăm deviația minimă pentru un maxim de ordinul α, de o parte și de alta a imaginii centrale.

Unghiul măsurat între două maxime de același ordin, la stînga și la dreapta maximului central este $\alpha = 2i$, deci $i = \frac{\alpha}{2}$. Cunoscînd valoarea unghiului i și constanta rețelei, obținem valoarea lungimii de undă din relația $\lambda = \frac{2 \sin i}{kN}$.

În încheiere, menționăm că fenomenul de difracție prezintă o deosebită importanță în natură. Difracția luminii determinată de diferite inomogenități — ceață, picături de ploaie, particele mici suspendate în aer, explică formarea curcubeului, formarea inelelor colorate în jurul soarelui și lunii precum și formarea petelor circulare numite coroană.

CONSTRUIREA PRIN MIJLOACE PROPRII A UNEI LUNETE ASTRONOMICE KEPLER

A. BORDEIANU

Prof. Şcoala medie de băieţi nr. 1 — Rădăuţi

CONSTRUIREA prin mijloace proprii a materialului didactic necesar lecţiilor dă o satisfacţie deosebită atît profesorului, care îndrumează această activitate, cît şi elevilor, care o efectuează.

Este cunoscută bucuria pe care o trăiesc elevii, cînd au ocazia să cerceteze cu luneta Universul nostru nemărginit, precum şi utilitatea acesteia în fixarea cunoştinţelor teoretice predate de profesor. Cu toate acestea puţine sînt şcolile care posedă o lunetă, fie chiar una cu putere de mărire redusă.

Deoarece în ultimii ani Ministerul Învăţămîntului a avut grija să trimită aproape tuturor şcolilor suficient utilaj optic, ne propunem în cele ce urmează să dăm cîteva îndrumări de modul în care se poate construi prin mijloace foarte simple şi folosind materialul optic disponibil în şcoală, o lunetă astronomică cu o putere de mărire de circa 50 de ori.

Se ştie că în principiu o lunetă Kepler este alcătuită dintr-un obiectiv cu distanţa focală şi deschiderea cît mai mari, care concentrează în focarul lui razele paralele venite de la un corp ceresc foarte îndepărtat. O lupă cu distanţa focală cît mai mică şi al cărei focar coincide ca poziţie cu focarul obiectivului măreşte imaginea intermediară şi dă o imagine virtuală finală mărită, care poate fi privită cu ochiul aproape lipit de ocular.

Deoarece obiectivul lunetei are o deschidere destul de mare, el adună multă lumină, pe care o concentrează cu ajutorul ocularului potrivit ales asupra pupilei observatorului, dîndu-i posibilitatea de a observa multe detalii ale corpurilor cereşti.

În cazul lunetei noastre folosim drept obiectiv, lentila convergentă biconvexă cu distanţa focală de 80 cm, trimisă de Minister în colecţia de lentile care însoţeşte bancul optic, iar drept ocular, ocularul microscopului şcolar I.O.R., pe care îl are în prezent aproape fiecare şcoală.

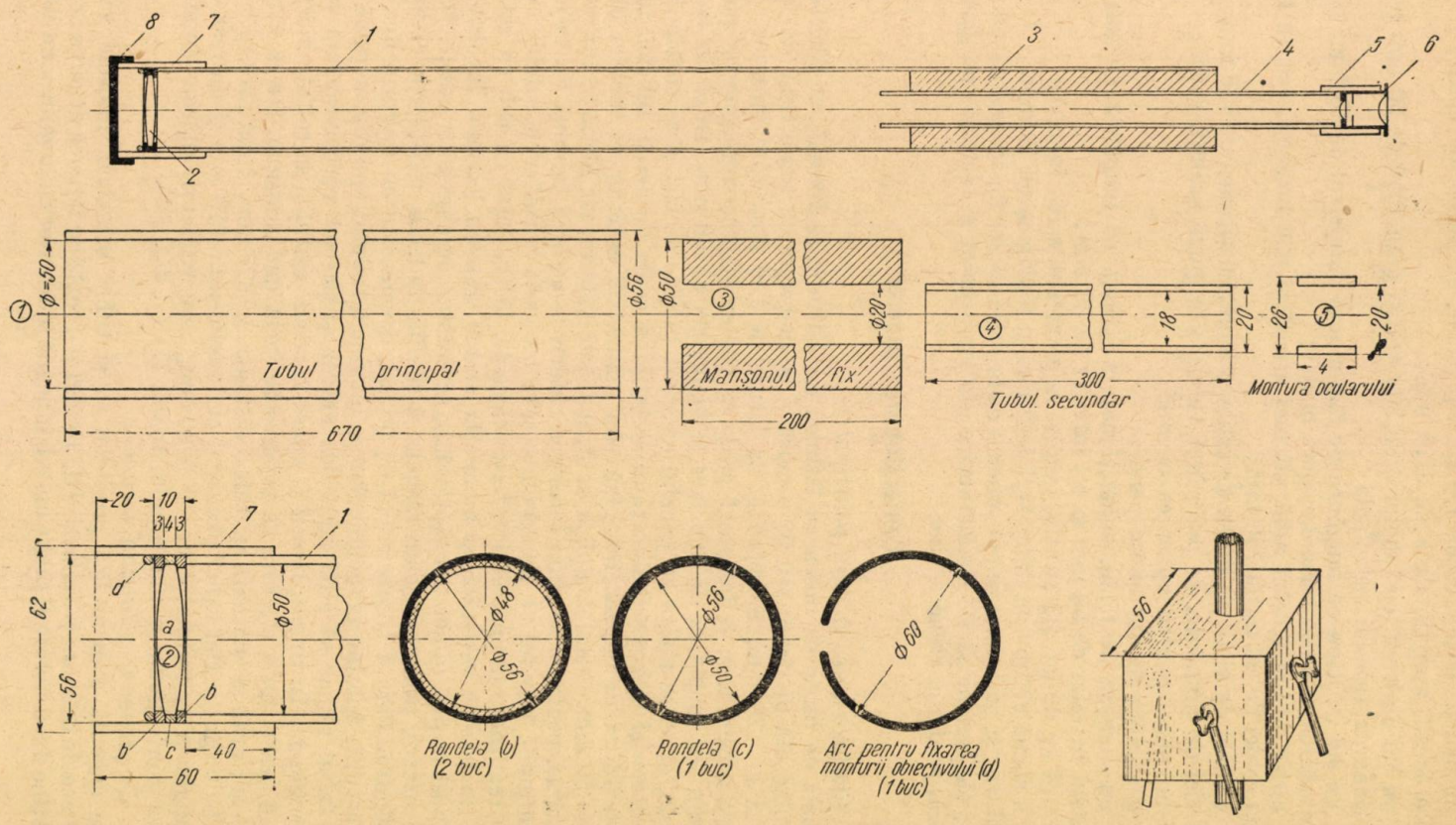
Aşadar aportul constructorului lunetei se rezumă la montarea într-un sistem optic centrat şi bine dimensionat a pieselor menţionate mai sus, ceea ce se poate realiza cu puţină îndemînare.

În ce priveşte aspectul general luneta se compune din următoarele părţi principale:

1. Tubul principal.
2. Port-obiectivul cu obiectivul lunetei.
3. Manşonul fix de călăuzire a tubului ocularului.
4. Tubul secundar, pentru mînuirea ocularului.
5. Montura ocularului.
6. Ocularul microscopului şcolar I.O.R. cu putere de mărire de 15 ×.
7. Manşonul de fixare a obiectivului.
8. Capacul lunetei.

Materiale necesare

a) O lentilă convergentă biconvexă cu diametrul de 50 mm şi distanţa focală 800 mm, din colecţia de lentile a bancului optic şcolar;



8
7
1
3
4
5
6
2
Tubul principal
670
Mansonul fix
200
300
Tubul secundar
Montura ocularului
20
10
3 4 3
62
56
40
60
Rondela (b)
(2 buc)
Rondela (c)
(1 buc)
Arc pentru fixarea monturii obiectivului (d)
(1 buc)

b) un ocular de microscop I.O.R., tip şcolar, cu putere de mărire 15 × şi distanţa focală aproximativă de 16,6 mm;

c) un sul de lemn, cu lungimea de 800 mm şi diametrul de 50 mm pentru confecţionarea tubului principal;

d) un sul de lemn cu lungimea de 320 mm şi diametrul de 18 mm, pentru confecţionarea tubului secundar port ocular;

e) hîrtie de împachetat albă, cît mai groasă şi mai lucioasă, cca 10 m, cu lăţimea coalei de cel puţin 750 mm;

f) o coală de hîrtie de desen de calitate bună, cu lăţimea de 750 mm;

g) clei de tîmplărie, de preferinţă vîscos, sau gumă arabică deasă;

h) un penel pentru aplicarea cleiului;

i) o sticluţă de tuş şi un penel;

j) un manşon de lemn, confecţionat la strung, cu lungimea de 200 mm, diametrul exterior de 50 mm şi cel interior de 20 mm;

k) 1/4 kg de lac alb sicativ, pentru impermeabilizarea lunetei;

l) o sîrmă de oţel cu diametrul de 2 mm şi lungimea de 19 mm.

Sulurile şi manşonul se pot procura de la orice atelier de strungărie din localitate; ele trebuie să fie confecţionate din lemn uscat şi lustruite cu glaspapir şi ceară, pentru a aluneca bine.

Confecţionarea lunetei

1. *Confecţionarea tubului principal*

Coala de hîrtie de desen cu lăţimea de 750 mm se fixează cît mai întins pe o planşetă de desen sau pe o masă şi se înegreşte cu tuş o fîşie din ea cu lăţimea de 170 mm, începînd de la latura de 750 mm, spre interior. După uscarea acestei fîşii, se înfăşoară coala cu partea înegrită spre interior pe sulul de lemn cu lungimea de 800 mm şi diametrul de 50 mm. După înfăşurarea primului strat se aplică cu penelul un strat subţire de clei şi se continuă apoi înfăşurarea şi lipirea tubului. Cînd se termină coala de desen aplicăm în continuare hîrtia de împachetat, pînă cînd diametrul exterior al tubului obţinut este de 56 mm. Cleiul se aplică în strat foarte subţire, iar hîrtia se înfăşură cît mai strîns, pentru a se evita formarea cutelor la uscarea tubului. Se va urmări ca marginile tubului să fie regulate şi se va evita murdărirea sulului cu clei. După realizarea diametrului exterior necesar, lăsăm sulul cu tub cu tot să se usuce în poziţie verticală, şi anume la umbră, într-un loc uşor încălzit şi cît mai încet posibil (două trei săptămîni), schimbînd de cîteva ori poziţia tubului. După uscare, printr-o uşoară răsucire a sulului de lemn, se desprinde tubul de pe cilindru. Fără a scoate tubul de pe sul, îl corectăm cu ajutorul unui cuţit bine ascuţit, apăsînd perpendicular pe lungimea tubului una din margini, astfel încît tubul rămas să aibă marginea netedă şi perfect perpendiculară pe axa longitudinală. În timpul tăierii se apasă uşor cu cuţitul şi se roteşte încet sulul cu tub, astfel încît tăietura să progreseze încet dar continuu. De la marginea astfel obţinută se măsoară pe tub o distanţă de 670 mm, după care se taie din nou. Se obţine astfel tubul principal cu lungimea de 670 mm şi un rest de tub cu lungimea aproximativ de 70 — 80 mm, care va servi ulterior drept tipar pentru confecţionarea manşonului mobil (7) (v. fig. jos).

2. *Confecţionarea tubului secundar*

Se execută prin acelaşi procedeu ca şi tubul principal, folosind sulul cu lungimea de 320 mm şi diametrul de 18 mm şi o coală cu lăţimea de circa 380 mm. Se obţine după uscare şi tăiere un tub înnegrit în interior cu lungimea de 300 mm,

diametrul interior de 18 mm şi cel exterior de 20 mm, cît şi un rest din acelaşi tub, cu lungimea de cca 60 — 70 mm, care serveşte drept tipar (4) (v. fig. sus şi mijloc).

3. *Confecţionarea montării ocularului*

Restul de tub rămas de la confecţionarea tubului secundar se îmbracă din nou pe sulul respectiv şi se înfăşoară pe el prin lipire, dar evitînd lipirea cu tubul suport, un alt tub, cu lungimea de 50 mm şi diametrul exterior de 26 mm; după uscare şi desprinderea de pe tubul tipar, se taie din el un tub cu lungimea de 40 mm, care serveşte drept montură pentru ocular. Montura obţinută se îmbracă pe tubul (4) şi se lipeşte pe o lăţime de 1 cm (5) (v. fig. sus şi mijloc).

4. *Confecţionarea manşonului mobil*

Pe restul tubului rămas de la confecţionarea tubului principal (1) se confecţionează după îndrumările date la montura oculară un tub de hîrtie de cca 70 mm, din care după tăiere şi desprindere de pe tubul suport se obţine un manşon cu diametrul interior de 56 mm şi diametrul exterior de 62 mm, din care se taie prin corectarea marginilor o porţiune cu lungimea de 60 mm, care se înnegreşte în interior (7) (v. fig. sus şi jos).

5. *Confecţionarea capacului*

Capacul se obţine prin înfăşurare pe manşonul mobil al unei fîşii cu lăţimea de 40 mm pînă la realizarea diametrului exterior de 68 mm; pe faţa interioară a inelului astfel obţinut se lipeşte un disc de carton cu diametrul exterior de 68 mm şi grosimea de 2 — 3 mm (8) (v. fig. sus).

6. *Confecţionarea obiectivului*

Din carton cu grosimea de 2 mm se taie două rondele (*c*) trasate cu compasul, cu diametrul interior de 50 mm şi cel exterior de 56 mm, care se lipesc împreună cu clei şi după uscare se înnegresc cu tuş. În inelul astfel format se introduce lentila obiectiv. Pentru a împiedica jocul lentilei se mai confecţionează din carton cu grosimea de 3 mm încă două rondele (*d*) cu diametrul interior de 48 mm şi cel exterior de 56 mm, care după înnegrire cu tuş şi uscare se lipesc unul de o parte şi altul de cealaltă parte a lentilei obiectiv, de inelul port lentilă (*c*), avînd grijă ca marginile tuturor inelelor să fie la acelaşi nivel. După uscarea acestui sistem, presat uşor se curăţă resturile de clei de pe lentilă cu o flanelă muiată în apă caldă şi se spală aceasta cu un tampon de vată muiat în alcool. Obiectivul astfel confecţionat se păstrează într-o cutiuţă, pe vată, pentru a fi ferit de praf (2) (v. fig. sus şi jos).

Montarea lunetei

a) Se introduce cu o uşoară sforţare manşonul fix (3) complet în interiorul tubului principal.

b) Ţinînd tubul principal vertical, cu partea care conţine manşonul fix în jos, se aşază pe cealaltă extremitate a lui obiectivul cu montura sa (2) şi apoi se introduce manşonul mobil (7). Pentru asigurarea lentilei se introduce de la partea anterioară a manşonului (7) montat un arc de oţel (*a*) (v. fig. jos), îndoit pe sulul de lemn şi avînd diametrul de cca 60 mm. Prin răsucirea uşoară a manşonului prevăzut cu arc ne asigurăm că obiectivul nu are joc.

c) Fixăm tubul principal printr-un stativ de laborator prevăzut cu ghiară şi introducem în manşonul fix tubul secundar (4) cu ocularul (6) instalat în montura (5), astfel încît tubul ocular să intre complet.

349, 351, 352, 354, 355, 358, 361, 362, 363, 367), Popescu Al. Dan (1294, 295, 301—304, 306, 309 310, 319, 323, 326, 328, 338, 342, 347, 351, 354, 358, 360, 362, 363, 365, 366, 367 385, 388, 392, 393, 396, 1406) Tofan Liliana (1299, 300, 306, 354, 358, 362 E: 505 511. 515, 519, 520, 521. 535. 537—541, 546), Torjescu Florin (1187, 214, 215, 216, 218, 220, 221, 222, 224, 225, 227, 228. 229, 230. 233, 236, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 261, 263, 265, 266, 267, 268, 271, 272, 273, 275—282, 284—294, 297, 298, 299, 301—307, 310, 312, 314, 320, 323, 326, 328, 333, 338, 339, 343).

Şcoala medie 1 băieţi «N. Bălcescu». Clasa VI-a. Bălăceanu Mihai (E: 406, 409, 411, 412, 415, 418, 419, 422); clasa VII-a. Popescu Călin (E: 412, 414, 418, 419, 422, 443, 454, 457); clasa IX-a. Basarab Şerban (1274, 276, 285, 288, 290, 291, 302, 315, 333, 338, 339, 340, 342, E: 497, 508, 513, 521, 528, 529, 532, 533).

Şcoala medie 2 băieţi. Clasa VIII-a. David Jose (E: 447, 448, 451, 452, 460, 477, 479, 481, 482, 480, 490).

Şcoala medie 4 băieţi «Aurel Vlaicu». Clasa VIII-a. B. Draica Constantin (1254, 294, 316, 317, E: 481, 483, 484, 487, 488, 490, 491, 493, 497, 499, 502, 512, 514, 518, 519), Zvorişteanu C. Alexandru (1310, 336, E: 505, 519, 522, 526, 529, 530, 532, 533, 554, 559, 560); clasa IX-a. Nistreanu N. Valeriu (1340, 374, 378, E: 505, 510, 519, 521, 526, 529, 532, 533, 535, 537, 538, 539, 540, 541, 543, 544, 546, 547, 548, 549, 557, 558, 560, 561); clasa X-a. Maria Pavel (1276, 277, 314, 333, 339, 342, 354, 362, 363, E: 518, 511), Dumitrescu Badea (1272, 273, 288, 304, 315, 316, 317, 227, 375, 377, 380, 386, 404, 405, E: 444, 508, 519, 521, 540, 542, 558, Petre T. Petre (1351, 372, 373, 378, 402, E: 512, 522, 531, 533, 536, 537, 539, 540, 541, 546, 547, 549), Rudnic Marian (1306, 362, 367, E: 537, 539, 540, 541, 544, 547, 549), Spătaru Ion (1339, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 402, 407, E: 505, 510, 513, 544, 547, 549, 558, 559), Viscopoleanu Octavian (1372, 375, 377, 402, 403, E: 505, 539, 540, 541, 546, 547, 558, 559, 560), Voicu Constantin (1372, 375, 378, 392, E: 522, 523, 539, 540, 541, 544, 546, 558, 559), Sandu Gh. Ion (1273, 274, 275, 276, 277, 284, 285, 286, 287, 288, 290, 297, 302, 303, 306, 310, 314, 323, 326, 333, 339, 340, 342, E: 489, 490, 497, 505, 508, 510, 511, 512, 513, 514, 523, 524, 526, 527, 529, 530, 531, 533, P), Gheorghe I. Ion (1227, 261, 306, E: 476, 505, 516, 528, 530, 540, 541), Bonghez Valeriu (1284, E: 478, 481, 496, 499, 505, 508, 510, 512, 524), Vraciu Petre (E: 479, 482, 490, 497, 505, 510, 523, 526, 529, 530), Stănăşilă Octavian (1250, 251, 254, 256, 257, 306, 310, 314, 323, 326, 333), Bădescu Marcel (1292, 296, 312, 372—380).

Şcoala medie 5 fete. Clasa VIII-a. Isac Aurelia (1310, 317, 318, E: 505, 508, 511, 519, 526, 528, 529); clasa IX-a. Cîmpu Demetra (1276, 340, 342, 354, 358, E: 526, 528, 529, 530, 532, 537, 540); clasa X-a. Constantinescu Ioana (1129, 135, 151, 159, 170, 183, 240, E: 505, 508, 511, P).

Şcoala medie 5 băieţi. Clasa VII-a. Bogdan Alecu (E: 483, 494, 496, 497, 505, 508, 510, 511, 519, 526); clasa IX-a. Stanciu Alexandru (1252, 289, 292, 339, 342, 354, 358, 361, 362, 366, E: 540, 546); clasa X-a. Drăghicescu C. Ioncenţiu (1354, 358, 362, 375, 378, E: 540, 541, 546, 547, 558, 559, 560).

Şcoala medie fostă 5-7-8 fete. Clasa IX-a. Nicolau Corina (1273, 276, 277, 278, 284, 288, 289, 291, 292, 297, 302, 303, 306, 307, 310, 320, 322, 323, 333, 338, 342, 351, 353, 354, 358).

Şcoala medie «I. L. Caragiale». Clasa VI-a. Groşforeanu Gelu Tudor (E: 522, 523, 524, 529, 531, 532, 533, 539, 541, 543, 546, 548, 549); clasa VIII-a. Mazilu Nicoară (E: 426, 427, 429, 431, 434, 454, 455, 457, 458, 460, 467, 469).

Şcoala medie 9 fete. Clasa IX-a. Dogaru Viorica (1310, 340, 342, E: 505, 512, 526, 528, 529, 530, 532).

Şcoala medie 12 băieţi. Clasa X-a. Elenberg M. (1179, 183, 204, 228, 274, 275, 277, 287, 280, 283, 286, 288, 291, 292, 297, 303, 313, 316, 326, 336, 342, 349, 351, 354, 362, 363, 366).

Şcoala medie 13 băieţi. Clasa IX-a. Dobre Ion (1342, E: 522, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 546, 547).

Şcoala medie 17 băieţi. Clasa IX-a. Stoicescu Ştefan (1322, 325, 333, 338, 339, 340, 342, 343, 354, 365).

Şcoala medie 22 fete, «Gheorghe Lazăr». Clasa VIII-a. Butoi Mihaela (E: 523, 525, 526, 527, 530, 531, 534, 536, 537, 538, 540, 546, 547, 548, 549), Ivănceanu Tatiana (1325, E: 523, 525, 526, 527, 530, 531, 534, 536, 537, 538, 540, 544, 546, 547, 549).

Şcoala medie mecanică nr. 2. anul IV. Neguţ Nicolae (1274, 276, 277, 278, 285, 288, 289, 290, 292, 293, 296, 306, 312, 313, 315, 316, 317, 318, 326, 331, 334, 335, 336, 337, 342, 346, 354, 358, 360, 361, 370), Vale Vasile (1274, 285, 288, 289, 290, 292, 293, 296, 312, 315, 316, 317, 318, 331, 334, 335, 337, 346, 360, 361, E: 523, 525, 526, 529, 538, 540, 541, 542, 547).

Şcoala medie statistică. Anul I. Marin D. Emilia (E: 522, 524, 528, 529, 533, 538, 539, 541, 543, 545, 546, 547).

Şcoala medie metrologie. Anul IV. Fîntîneanu Mihaela (1306, 310, 315, 316, 317, 318, 319, 323, E: 505, 508).

Şcoala medie clasică mixtă. Clasa VII-a. Rieber Margareta (E: 415, 447, 448, 450, 451, 453, 454, 455, 505, 508).

Şcoala elementară nr. 1. Clasa V-a. Schileru Cristian (E: 425, 426, 427, 428, 429, 432, 450, 451, 453, 470).

Şcoala elementară Chitila. Clasa VII-a. Buţa Rada (E: 406, 411, 412, 442, 443, 444, 445, 446, 505, 508).

BUZĂU. Clasa IX-a. Apostol B. Viorica (1152, 165, E: 380, 381, 407, 412, 429, 434, 454, 505, 508), Milea V. Ioana (1165, 183, E: 411, 412, 426, 429, 431, 441, 447, 505); clasa X-a. Boerescu Dragoş (1315, 316, 317, 318, E: 505, 517, 518, 519, 520, 521, 547, 549), Ioniţă Aurelia (1342, 354, E: 519, 529, 531, 532, 533, 537, 540, 546, 547), Petrache Rodica (1326, 330, 339, 342, E: 499, 510, 523, 540, 547, 548, 550), Zekeru Constantin (1230, 315, 377, 378, 383, E: 488, 505, 511, 518, 519, 540, 558).

CALAFAT. Clasa X-a. Mitroaica I. Gheorghe (1349, 351, 354, 356, 358, 362, 363, 365, 366, 367, 368, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 382, 383, 386, 388, 402, 403, 404, 405, P, E: 551, 526, 552).

CĂLĂRAŞI. Banu Alexandru (1297, 1326, 338, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 382, E: 537).

CÎMPINA. *Şcoala medie de petrol nr. 1.* Anul IV. Robitu Nicolae. (1312, E: 482, 483, 488, 490, 505, 512, 521, 525, 526, 527, 531, 532, 533, 537, 539, 540, 546). Şcoala medie petrol nr. 2. Doboş Maria (1250, 251, 284, 285, 288, 289, 292, 297, 301, 306, 313, 315, 316, 317, 318, 319, 330, 334, 335, 336, 337).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa IX-a. Beloiu Daniel (1274, 286, 306, 315, 354, 358, 360, 361, E: 482, 487, 488, 505, 508, 510, 519, 536, 539, 540, 541, 543, 544, 546, 547, 548, Nicolaescu Ion (1316, 351, E: 481, 482, 499, 505, 510, 515, 519, 540); *Şcoala medie tehnică de cărbuni* anul IV. Opriş A Ioan (1228, 234, 243, 252, 273, 276, 278, 284, 286, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 296, 299, 301, 306, 310, 312, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 335, 336, 342, 346, 354, E: 471, 473, 474, 475, 477, 481, 482, 490, 497, 505, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 525, 526, 538, 540, 544, 546, 549, P), Pop Tiberiu (1243, 296, 312, 319, E: 505, 517, 518, 519, 520, 521, 523, 540, 546, 549), Popescu T. Mihai (1252, 284, 296, 312, 316, 346, E: 472, 481, 505, 517, 518, 519, 520, 521, 523, 540, 544, 546, 549), Ujupan M. Ioan (1252, 273, 288, 290, 292, 293, 296, 310, 312, 316, 317, 318, 319, 335, 336, 337, 342, 354).

CLUJ. Toth Alexandru («Transformare afină»); *Şcoala specială muncitorească.* Chelemen Mihai (1306, 358, 362, E: 505, 507, 510, 511, 534, 544), Coţea Nicolae (1306, 351, 353, 362, E: 488, 522, 534, 539, 540, 544, 546), Pîrîu Ştefan (1306, 333, 339, 340, 342, 346,

354, 358, 362, E: 528, 540, 544), Păun Constantin (1252, 306, 351, 352, 353, 362, E: 473, 479, 482, 493, 505, 508, 511, 534, 535, 540, 544, 546), Pistol Nicolae (1333, 351, 353, 362, E: 521, 534, 535, 539, 540, 544, 546), Singerean Gheorghe (1260, 274, 297, 306, 314, 315, 316, 333, 339, 340, 347, 354, 358, 362, 377, E: 447, 457, 458, 460, 462, 489, 493).

CONSTANȚA. Clasa VIII-a. Marin D. Dinu (1306, 315, 316, 318, 335, 337, 360, E: 505, 508, 510, 513, 526, 535, 536, 537, 540, 545, 546), Iordan Constantin (1316, 360, 361, 364, E: 505, 519, 529, 539, 540, 549); clasa IX a, Stravrositu I. T. (E: 524, 526, 528, 529, 530, 532, 533, 534, 539, 546); clasa X-a. Cristea I. Ion (1295, 297, 299, 301, 303, 304, 305, 311, 315, 317, 320, 322, 323, 325, 326, 328, 330, 332, 333, 338, 339, 340, N, P). Iordache I. Dan Alex (1297, 299, 302, 303, 304, 305, 306, 310 314, 315, 316, 319, 322, 323, 325, 326, 330, 333, 337, 338, 339, 340, 342, 343, 347, 349, 350, 351, 353, 354. 355, 356, 358, 362, 264, 365, 366, 367, 368, 370, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386); Școala medie hidrotehnică, anul II. Alim Ridvan (1303, 304, 312, 315, 340, E: 505, 517, 519. 520, 521), Piron Valentina (1292, E: 481, 482, 483, 487, 489, 491, 505, 537, 540); anul III. Leul V. Roșu (E: 523, 526, 529, 530, 537, 538, 540, 546, 547, 549).

CORABIA. Clasa X a. Popa Stancu (1273, 275, 277, 278, 280, 284, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 309, 316, 320, 349, 351, 354, 362, 363, 365, 366).

CRAIOVA. Școala medie electrotehnică, anul III. Bărbuică Nicolae (1275, 276, 277, 285, 294, 304, 305, 311, 316, 321), Dinu Gh. Gheorghe (1273, 275, 276, 277, 278, 280, 282, 283, 303, 306).

CURTEA DE ARGEȘ. Clasa X a. Dumitrescu I. Aurel (1323. 333, 335, 336, 339, 340, 342, E: 527, 529, 530, 531, 536, 537, 540, 544, 546, 547, E: 526, 527, 529, 530, 531, 536, 537, 540, 544, 546, 547).

DEJ. Clasa X-a. Vermeșan Gh. Gheorghe. (1346, 375, 378, 390, 397, 407, E: 505, 510, 530, 550, 558).

FOCȘANI. Clasa VI-a. Gugești. Brîndușoiu Creața (E: 481, 485, 486, 487, 505, 510, 521, 528, 532, 533); clasa VII-a. Dinulescu Horia (E: 484, 481 482, 487, 488, 505, 510, 519, 523, 524, 532, 533); clasa IX-a. Cristea Aurel (1278, 286, 288, 292, 293, 296, 302, 303, 310, 312, 313, 314).

GHEORGHIENI. Clasa X a. Rosenberg Silvia (1342, 349, E: 524, 528, 529, 530, 532, 535, 536, 539, 540, 541, 546).

GIURGIU. Clasa IX a. Stăncescu S'. Nelu (1366, E: 522, 524, 528, 529 533, 535, 539, 541, 546); clasa X-a Bigan S. (1273, 275, 276, 277, 278, 279. 280, 281, 284, 285. 287, 288, 289, 290. 291, 292 293, 294. 296. 297, 301, 316, 318, 319, 323, 325, 327, 329, 331—343, 346, 347, 350, 356, 358—365, 367, 373—375, 377, 378, 383, E: 525—531, P), absolvent Bătinețu M. Dumitru (1273, 274, 276, 277, 291, 313, E: 481, 482, 490, 505, 507, 508, 513, P).

HÎRLĂU. Clasa VIII-a. Tibuleac Florin (1293, 315, 316, 317, 318, 319, E: 506, 507, 509, 510. 513, 515, 518).

HUNEDOARA. Gheorghe Valer (1062, 68, 79, 102, 167, 172, 191, 207, E: 380, 381, 383, 411, 412, 413, 415, 416, 418, 419, 422, 424, 441, 448, 449).

HUȘI. Vuțcani. Student f. f. Bostan Emil (1273—278, 284, 286—293, 297, 301, 302, 303, 306, 310, 314—320, 326, 335, 336, 337, 340, 342, 347, 358, 360—365).

IAȘI. Profesor Mihai Grădinaru («Figuri geometrice anaglife»); clasa VII-a. Balint Andrei (E: 522—533); clasa X-a. Herșcovici Bruno (1297, 302, 306, 310, 316, E: 505, 508, 519, 526, 531), Leonte N. Ion (1273, 374, 376, 377, 387, 388, 388, 389, 390, 391, 393), Segal Zigu (1349, 354, E: 528, 532, 536, 537, 539, 540, 541, 543, 546, 547), Valache Alexandru (1303, 306, 314, 323, 326, 333, 339, 340, E: 505, 508); Școala pedagogică de învățători, anul IV. Căruntu N. (1289, E: 481, 487, 499, 529, 531, 532, 533, 537, 546, 549), Gafencu Gheorghe (E: 482, 483, 484, 487, 488, 499, 526, 531, 533, 540, 546, 549), Lipșa Const. (1286, E: 482, 484, 487, 488, 499, 526, 535, 549), Tănase Adam (E: 481—484, 487, 488, 497, 499, 523, 526,

529, 532, 533, 537, 540, 546), Tudose Valentin (E: 481, 483, 487, 488, 522, 528, 529, 532, 533, 535, 543).

LUGOJ. Clasa X-a. Popescu Dan (1351, 352, 354, 355, 358, 362, 363, 364, 365, 366, 367),

MIZIL. Absolvent. Parepa Grigore (1276, 286, 287, 289, 290, 301, 303, 306, 314, 315, 316, 317, 325, 333, 339).

ORADEA. Isai Savu (« Rezolvarea trigonometrică a ecuației de gradul al II-lea », « Conul dublu și două pendule verticale »); clasa X-a. Beleneș Alexandru (1275, 284, 310, E: 496, 499, 505, 510, 523, 524, 526), Breban Mircea (1287, 290, 292, 330, 333, 337, 342, 346, 351, 356, 360, 361, 363, 364, 366, 372, 375, 376, 377, 378, 380, 383, 386, 404, 409), Chebeleu Traian (1273, 387, 288, 310, 363, E: 491, 495, 496, 497, 498, 499, 502, 503, 504, 505, 510, 511, 512, 514, 515, 522, 523, 524, 526, 529, 530, 531, 533, 537), Guiașu Silviu (1323, 325, 338, 340, 347, 350, 353, 354, 358, 362, 363, 365, 367, 370,) Rus A. Ioan (1297, 302, 321, 326, 329, 331, 333, 344, 352, 356, 357, 358, 359, 364, 365, 366, 368, 369, 370, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 380, 381, 382, 383, 384, 385, N, P).

ORAȘUL STALIN. Clasa IX-a. Minea Florin (1274, 284, 286, 301, 303, 310, E: 481, 484, 485, 490, 493, 498, 499); *Școala medie tehnică mecanică*, anul III. Teutsch Ulrich (1273, 274, 275, 276, 277, 278, 284, 286, 292, 293); anul IV. Ioniță Tudor (1294, 295, 296, 297, 299, 301, 302, 303, 306, 310, 314, 320, 323, 325, 326, 333, 338, 339, 340, 341, 342).

PIATRA NEAMȚ. Școala elementară Roznov, clasa VII-a. Gervescu M. Ion (433—442), Hodor Constantin (E: 523, 524, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 535, 539, 541, 543, 546, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 535, 539, 541, 543, 546, 547, 548, 549, 554, 561, P), Leaț Gh. Mihai, (E: 522, 523, 526, 529, 530, 532, 533, 535, 539, 540, 541, 546, 547, 549, 554, 559).

PITEȘTI. Clasa X-a. Bogaciu P. Valeriu (1273—282, 284, 286—293), Sămărescu F. Dan (1273—278, 290—297, 302, 303, 306), Șerb Gab. Adrian (1346, 349—356, 358—363, 365—368, 372—388 N, P), Ursu Gh. Mihai (1274, 275, 286, 287, 289, 290, 292, 306, 311, 314, E: 482, 499); Școala medie tehnică de mecanizarea agriculturii, anul II. Sofron Gavril (1312, 314, 342, 354, 358, 363, E: 505, 510, 512, 519, 535, 537, 540, 546, 547).

PLOEȘTI. Clasa VIII-a. Bărbieru Pana (E: 484, 487, 505, 514, 517, 523, 526, 527, 537, 544), Ionescu Lucian (E: 488, 487, 488, 505, 508, 517, 519, 523, 526, 532, 537, 544), Tudorăncescu N. (E: 508, 510, 530, 533, 536, 540, 544, 546, 547), Rusu Dan (E: 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 536, 537, 539, 544, 546); clasa IX-a. Aldea S. Mihai (1273, 274, 276, 277, 278, 284, 286, 287, 291, 292, 310, 316, 319, 321, 322, 326, 339, 340, E: 481, 482, 484, 488, 489, 490, 493, 495, 496, 497, 499, 503, 504, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 519, 522, 523, 524, 526, 527, 528), Bănică I. Ion (1274, 278, 284, 286, 310, 316, 317, 318, 326, 335, 336, E: 481, 482, 484, 487, 490, 491, 515, 518, 519, 524, 528, 532, 539, 546). Arion Dan (1248, 251, 266, 294, 303, 304, 306, E: 473, 477, 505), Chirică Andrei (1273, 274, 276, 277, 278, 284, 285, 288, 290, 291, 292, 293, 309, 310, 314, 316, 321, 322, 326, 340, 342, E: 481, 482, 483, 484, 487, 488, 489, 490, 492, 496, 497, 498, 499, 502, 503, 504, 507, 509, 510, 511, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, Corteanu Sorin (1274, 278, 286, 310, 315, 321, 326, E: 505, 511, 513, 515, 518, 519, 524, 528, 532, 533, 539, 546), Cheșa I. Valentin (1310, E: 504, 521, 524, 528, 529, 530, 531, 533, 540), Dragomir I. Jean (1342, 363, E: 527, 528, 532, 536, 539, 540, 544, 546), Dinescu Sorin (1287, E: 1276, 278, 292, 293, 309, 314, 326, 340, E: 481, 482, 487, 488, 489, 490, 499, 505), Heinrich Paul (1248, 294, 301, 303, E: 475, 478, 479, 505, 512, 521), Drerer Petre (1274, 276, 277, 285, 287, 293, 314, 321, 322, 326), Leonte V. (1273, 276, 277, 278, 284, 287, 290, 291, 292, 293, 309, 321, 322, 326, 340, 342, E: 483, 484, 488, 490, 492, 495, 496, 497, 498, 499, 507, 510, 523, 524, 526, 527, 529, 530, 533), Pătrașcu Emilian (1273, 274, 276, 277, 278, 284, 285, 287, 317, 326, E: 481, 482, 484, 487, 488, 489, 493, 496, 505, 519, 529, 533), Pătrașcu V. Eugen (1273, 274, 316, E: 484, 488, 505, 507, 508, 510, 526, 528, 529, 531, 533), Spătaru Dinu (1273, 276, 277, 278, 284, 291, 292, 293, 309, 310, 321, 322, 326, 340, E: 481, 487, 488, 489, 490, 496, 497, 507, 509, 510, 524, 526, 527, 529, 530, 533), Șerbănescu Victor

(1254, 256, 261, 266, 276, 278, 284, 287, 293, 301, 304, 309, 310, 313, 314, 321, 322, 326, E: 477, 478, 481, 482, 484, 490, 495, 498, 499, 504, 505, 507, 508, 510, 511, 513, 514, 519, 521, 523, 526, 528, 529, 530, 532), Vasilescu E. Leonida (1277, 326, E: 481, 482, 487, 488, 493, 499, 505, 508, 509, 521, 524, 526, 527, 528); clasa X-a. Lupuţiu Ion (1295, 297, 303, 306, 310, 313, 322, 323, 324, 330, 333, 338, 339, 340, 342, 346, 347, 349, 351, 353, 354, 355, 356, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 371, P), Popescu Dumitru (1078, 81, 84, 87, 91, 96, 97, 98, 118, 121, 128, 130, 139, 140, 149, 152, 159, 165, 171, 175, 179, 183, 184, 185, 208, 274, 277, 286, 292, 310, 319, 335, 336, 337, 342), absolvenţi: Busuioc Horia (1084, 85, 88, 98, 112, 124, 126, 127, 128, 143, 149, 152, 157, 162, 163, 165, 166, 175, 180, 185, 201, 208), Ceneti Adrian (1084, 87, 98, 118, 124, 126, 127, 128, 149, 152, 165, 179, 196), Moescu Gabriel (1081, 84, 91, 96, 98, 126, 143, 152, 157, 159, 165, 167, 183, 184, 185, 208); şcoala de 7 ani, clasa VI-a. Ştefan C. Const. (E: 481, 482, 484, 487, 488, 505, 507, 519, 521, 532, 533), Georgescu V. Teodor (E: 481, 482, 484, 487, 488, 505, 519, 521, 532, 533), Tăbuşcă C. Pavel (E: 479, 481, 482, 505, 507, 518, 519, 524, 532, 561); clasa VII-a. Băzăvan Mihai (E: 481, 482, 484, 488, 501, 505, 508, 515, 529, 561), Florian Ştefan (E: 481, 482, 484, 487, 488, 505, 519, 520, 533, 533), Georgescu Ghiocel (E: 481, 488, 493, 519, 523, 526, 527, 528, 531, 561), Pătraşcu Olimpia (E: 481, 482, 484, 487, 488, 489, 491, 494, 505, 519, 528, 529, 533).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa VII-a. Constantinescu B. (E: 505, 508, 519, 521, 528, 529, 532, 533, 536, 554); clasa IX-a. Ţugulea Eugen (1273, 275, 278, 280, 286, 289, 342, E: 482, 499, 546); clasa X-a. Popa N. Emil (1297, 306, 310, 314, 315, 316, 319, 335, E: 505, 508, 511, 513, 518, 519) Olteanu Valter (1273, 274, 275, 277, 278, 280, 284, 290, 291, 432, 354, 363), Rogojanu Z. Ion (1273, 275, 274, 280, 284, 286, E: 491, 505, 508, 530).

ROMAN. Clasa VIII-a. Zaharia Mihai (1284, E: 471, 473, 477, 479, 497, 499, 503, 504, 505, 508, 511, 517); clasa X-a. Stoica C. (1273, 276, 277, 293, E: 526, 531, 540, 541, 543, 547).

SALONTA. (Inad) Clasa VI-a. Baş Floare (E: 505, 515, 519, 521, 522, 523, 528, 529, 532, 533, 541, 548, 549), Gherman Ecaterina (E: 505, 510, 515, 519, 521, 522, 523 528, 529, 532, 533, 541, 548, 549), Roman Ioan E: 505, 510, 515, 519, 521, 522, 523, 528, 529, 532, 533, 541, 543, 548).

SIBIU. Claşa VIII-a. Receanu Victoria (1372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 392, E: 558, 559, 560), absolvent (U. M. 4917) Uţă Marin (1273—294, 297, 299—305, 310, 313—322, 324—326, 330, 333, 336—346, 349—356, 358—370, P).

SLATINA. Clasa IX-a. Constantinescu C. Teodor (1340, 342, 354, 363, 372, 374, 375, 377, 383, E: 527, 559, 561).

TÎRGOVIŞTE. Clasa IX-a. Stănciulescu Mihai (1338, 342, 348, 350, 353, 361, 365, 367, 372, 374, 378, 383, 396, 407, E: 512, 518, 523, 421, 555, 558, 561, P).

TÎRGU—JIU. Clasa IX-a. Amzulescu Liana (1342, 354, 363, 375, 377, 378, E: 540, 544, 545, 546, 547, 559).

TÎRGU—MUREŞ. Clasa VII-a. Fleşeriu Călin (1284, 310, 316, 335, E: 481, 494, 505, 519, 524, 528, 529, 532, 533); clasa X-a. Cătărig Alexandru (1273, 274, 275, 277, 288, E: 481, 482, 483, 484, 489, 490, 495), Manole Nicolae (1273, 274, 275, 277, 278, 282, 284, 286, 306, 310, E: 481, 482, 483, 484, 485, 487, 490, 495, 505, 510), Matei Ioan (1268, 273, 274, 275, 277, 278, 280, 297, 300, 303, 304, 306, 310, 314, E: 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 489, 490, 505, 512), Muji A. Stefan (1273, 274, 275, E: 481, 482, 483, 489, 490, 495, 505), Iaina Adrian, (1274, 275, 276, 277, 278, 280, 282, 284, 306, 210, E: 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 495, 496, 503, 505), Rusnac R. Mihai (1268, 273, 274, 275, 277, 280, 482, 284, 306. 310, E: 481, 482, 483, 484, 485, 486, 488, 489, 490, 495, 505), Ste'anelli C. (Ioan 1268, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 280, 282, 284, 306, 210, E: 481, 482, 483, 484, 486, 487, 298, 489, 490, 492, 496, 503, 505, 510).

TÎRGU—NEAMŢ. Clasa IX-a. Focşăneanu I. Ion (1274, 275, 276, 284, 286, 287, 288, 290, 291, 292, 293, E: 497, 499, 504).

TECUCI. Clasa X-a. Alter Moisă (1273, 274, 276, 284, 283, 288, 292, 310, 316, 354, E: 505, 538, 540), Negoescu Emil (1273, 274, 276, 284, 286, 288, 293, 310, 316, 342, 354, E: 505, 528, 540), Ursulescu Florenţa (1273, 274, 275, 276, 284, 285, 286, 287, 288, 290, 292).

TIMIŞOARA. Clasa VIII-a. Mihăleanu N. Constantin (1386, 322, E: 505, 510, 517, 522, 523, 525, 532, 536, 537, 540, 544, 546, 547, 554, 556, 558, 551 0560); clasa IX-a. Cismariu Ionica (1356, 372, 378, 390, 407, E: 540, 544, 546, 547, 559), Arsenovici Tiberiu (1276, 284, 286, 288, 289, 290, 291, 292, E: 483, 484, 486, 487, 488. 489, 490, 496, 497).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Comana Gheorghe (1337, 360, 361, E: 481, 482, 487, 490, 493, 496, 525, 535, 538, 540).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Tudose G. Constantin (1326, 1339, 342, 374, 375, 378, 379, 382, E: 524, 526, 528, 529, 530, 532, 533, 558).

VASLUI. Benec I. (E: 505, 508, 510, 511, 518, 519, 520, 521, 527, 535).

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)

AU APĂRUT

9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi* de **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)

12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)

• • •

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI

LEI 10 (12 numere)

C. 1569. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul **Lei 1** exemplarul

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEN - CBEBE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VI — februarie 1955

2

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)

Anul VI, Nr. 2 — februarie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Despre numărul π de M. Cotariu*	53
2.	*Cerul în martie de V. Daimaca*	69
3.	*Note matematice*	73
4.	*Caleidoscop fizic*	75
5.	*Chestiuni de examen (1512—1534)*	44
6.	*Probleme rezolvate (E:479; E:508; E:510; E:511; 1096; 1015; 1104; 1105; 1107; 1129; 1135; 1150; 1101)*	81
7.	*Probleme propuse (1535—1559)*	88
8.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E:591—E:609)*	91
9.	*Din experienţa cercului de matematică şi fizică al elevilor din Capitală*	93
10.	*Rubrica rezolvitorilor*	94

ANUL VI — 2 — FEBRUARIE 1955

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 2 Februarie 1955

DESPRE NUMĂRUL π

M. COTARIU

asistent la Institutul Politehnic Bucureşti

1° UNUL din cele mai importante numere care apar în matematici şi în aplicaţiile lor tehnice şi cu care elevii fac cunoştinţă încă din primele clase, este numărul π, care reprezintă raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său.

Numărul acesta apare oridecîte ori este vorba de cercuri, sfere, corpuri rotunde, suprafeţe de rotaţie, etc. şi de aceea îl întîlnim la tot pasul în tehnică unde se lucrează cu roţi, angrenaje, mecanisme, adică elemente circulare, de rotaţie, etc.

Să nu ne închipuim însă, că numărul π apare numai în probleme de geometrie. Acest număr a pătruns în toate ramurile matematicilor şi poate fi găsit în calculul probabilităţilor, analiza matematică, etc. În legătură cu aceasta se povesteşte o anecdotă:

Un matematician făcea un calcul pentru un actuar, căutînd să afle probabilitatea pe care o are o anumită parte dintr-un grup de oameni ca să se găsească încă în viaţă după un interval de timp dat. Matematicianul a scris o formulă în care intervenea şi numărul π. Atunci actuarul foarte mirat, a ripostat că probabil e o greşală în formulă «căci, ce legătură poate avea raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său cu numărul de oameni ce se vor mai afla în viaţă peste un anumit timp?»

Numărul π fiind un număr atît de important, era natural ca el să fie obiect de studiu, încă din cele mai vechi timpuri. Necesităţi de natură practică au făcut ca fiecare popor din antichitate să atribuie lui π o anumită valoare, mai mult sau mai puţin exactă, după gradul de dezvoltare al Matematicii la acel popor. Astfel, Arhimede cunoştea 2 zecimale exacte. 3,14 sub forma $\frac{22}{7}$ şi astronomii indieni, valoarea 3.

Pînă în secolul al 17-lea s-au calculat 37 zecimale exacte ale lui π, cu mijloacele elementare de care se dispunea, ceea ce arată că s-a depus, în acest scop, o muncă uriaşă.

În adevăr, pentru a găsi cele două zecimale exacte, Arhimede a întrebuinţat poligonul cu 36 laturi, ceea ce reclamă calcule destul de migăloase, aşa că cele 37 zecimale exacte de mai tîrziu reprezintă un efort deosebit.

În secolul al 17-lea, apariţia seriilor în Matematici aduce o uşurare considerabilă acestor calcule şi încep să apară din ce în ce mai multe zecimale pentru π.

Cu această ocazie, numeroşi cercetători fac eforturi excepţionale pentru a găsi un număr cît mai mare de zecimale pentru π: Astfel, Richter a calculat 333 zecimale exacte, Rutherford 440 şi Shangks 530 şi apoi, 707 zecimale. Primele 330 zecimale s-au verificat la cei 3 calculatori. Pentru a ne putea da seama ce înseamnă acest număr imens de zecimale, să ne gîndim că aproximaţia ce se face oprindu-ne la 127 zecimale (cît a dat Ludolph von Ceulen) în calculul lungimii unui cerc cu o rază de o mie de milioane de ori mai mare ca distanţa de la Pămînt la Soare este mai mică decît a mia milioana parte din grosimea unui fir de păr.

Ardoarea cu care a fost calculat π are şi o altă explicaţie. Se spera că în acest mod se va putea rezolva vestita problemă a cuadraturii cercului, adică a construirii *numai cu rigla şi compasul* a unui patrat echivalent cu un cerc dat. Cu toate încercările disperate ale multor oameni care şi-au epuizat toate forţele pentru dezlegarea acestei probleme, chestiunea a rămas nerezolvată. Şi era firesc să se întîmple astfel, deoarece, după cum a demonstrat Lindemann *în 1882*, problema e imposibilă. Numărul π este transcendent: el nu poate fi rădăcina niciunei ecuaţii algebrice (a se vedea «Revista Matematică şi Fizică» nr. 2/954, articolul «Cum apar numerele iraţionale ...» de I. Barbălat).

2° *Despre metodele de calcul ale lui* π. Pentru calculul lui π există 3 mari categorii de metode:

1) metode elementare, 2) metode ale matematicilor superioare, 3) metode experimentale.

1. Metodele elementare pornesc de la formula lungimii cercului sau a ariei lui. În ordinea apariţiei lor, avem:

a) Prima metodă e datorită lui Arhimede; ea constă în determinarea lungimii cercului de diametru egal cu unitatea, considerînd-o ca limită a perimetrelor poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise şi ale căror laturi se dublează indefinit. Pentru calculele necesare se întrebuinţează formulele lui Saurin, care stabilesc relaţiile între perimetrele poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise de n şi $2n$ laturi.

b) A doua metodă, a izoperimetrelor, se datoreşte lui Descartes şi constă în determinarea razei unei circumferinţe de lungime cunoscută ca limita comună a razei şi apotemei unor poligoane regulate, cărora li se dublează numărul de laturi indefinit. Relaţiile necesare între razele şi apotemele poligoanelor regulate de n şi $2n$ laturi de perimetru constant, au fost stabilite de Schwab.

c) A treia metodă, datorită lui Gregory, determină aria cercului cu raza egală cu unitatea, ca limită a poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise cercului, cărora li se dublează numărul laturilor indefinit. Tot el stabileşte şi formulele necesare calculului suprafeţelor poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise de n şi $2n$ laturi.

d) A patra metodă elementară se datoreşte lui Legendre, care calculează raza unui cerc de arie dată ca limita comună a razei şi apotemei poligoanelor regulate de arie dată, ale căror număr de laturi se dublează indefinit. Tot el stabileşte şi formulele de calcul ce leagă razele şi apotemele poligoanelor regulate de n şi $2n$ laturi de arie dată.

2. Metodele matematicilor superioare se bazează pe studiul seriilor, al produselor infinite şi în general, pe mijloacele analizei matematice. În cele ce urmează vom arăta metodele elementare demonstrînd formulele respec-

tive pe o cale unitară și anume, prin Trigonometrie. Nu vom face calculele numerice pe care le recomandăm cititorilor ca un bun și util exercițiu de calcul, ci vom da rezultatele. În ceea ce privește metodele moderne, deoarece ele depășesc nivelul cerut pentru cititorul acestui articol, vom da numai rezultatele mai interesante.

3. *Metoda lui* Arhimede (fig. 1). Să notăm cu l_n, a_n, l'_n, a'_n, P_n, P'_n laturile, apotemele și perimetrele poligoanelor regulate de n laturi înscris și circumscris (cu accent). Din triunghiuri dreptunghice rezultă:

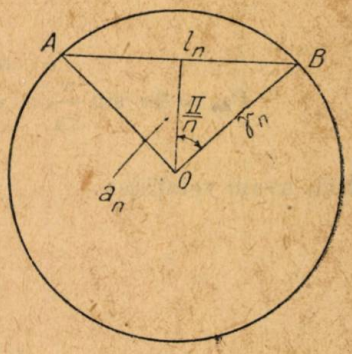


Fig. 1

$$l_n = 2R \sin\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{n} \quad (2R = 1)$$
$$a_n = R\cos\frac{\pi}{n} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (1)$$

Atunci poligonul cu numărul dublu de laturi, va avea:

$$l_{2n} = \sin\frac{\pi}{2n}$$
$$a_{2n} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2n} \qquad (2)$$

deci perimetrele lor vor fi:

$$P_n = n\sin\frac{\pi}{n}$$
$$P_{2n} = 2n\sin\frac{\pi}{2n} \qquad (3)$$

Să considerăm acum, poligoanele circumscrise:
Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\frac{l'_n}{l_n} = \frac{R}{a_n} = \frac{1}{2a_n} \quad \text{deci} \quad l'_n = \frac{l_n}{2a_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \qquad (4)$$

$$a'_n = a'_{2n} = \tfrac{1}{2}\ (\text{raza}) \qquad (5)$$

$$l'_{2n} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \qquad (6)$$

$$P'_n = n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$
$$P'_{2n} = 2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}. \qquad (7)$$

Să căutăm formulele de recurență pentru perimetre cînd numărul laturilor se dublează indefinit.

Notăm cu P_{2n}^{α} şi $P_{2n}^{'\alpha}$ perimetrele poligoanelor înscrise şi circumscrise după a α^{e} dublare.

$$P_n = n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$P_{2n} = 2n \sin \frac{\pi}{2n} = \frac{n \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} = \frac{P_n}{\cos \frac{\pi}{2n}} .$$

Deci, avem relaţiile:

$$P_n = n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$P_{2n} = P_n \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}} \tag{8}$$

$$P_{4n} = P_{2n} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4n}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{2n}^{\alpha} = P_{2^{\alpha-1}n} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{\alpha}n}} .$$

Înmulţim relaţiile şi simplificăm:

$$P_{2n}^{\alpha} = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{\alpha}n}} \tag{8'}$$

însă numitorul poate fi calculat pornind de la $\sin \frac{\pi}{n}$ şi înjumătăţind mereu arcul:

$$\sin \frac{\pi}{n} = 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} = 4 \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} = \cdots$$

$$= 2^{\alpha} \sin \frac{\pi}{2^{\alpha}n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{\alpha}n} \right)$$

deci,

$$\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{\alpha}n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2^{\alpha} \sin \frac{\pi}{2^{\alpha}n}} . \tag{9}$$

Introducînd în (8'), căpătăm:

$$P_{2n}^{\alpha} = 2 \, n \sin \frac{\pi}{2^{\alpha}n} \tag{10}$$

Să calculăm la fel și P'^{α}_{2n}:

$$P'_n = n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{P_n}{\cos\frac{\pi}{n}} \cdot \tag{11}$$

deci,

$$P'^{\alpha}_{2n} = \frac{P_{2^\alpha n}}{\cos\frac{\pi}{2^\alpha n}} \tag{11'}$$

așa că:

$$P'^{\alpha}_{2n} = 2^\alpha n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^\alpha n} \cdot \tag{12}$$

Din punct de vedere geometric e clar că limitele lui $P_{2^\alpha n}$ și $P'_{2^\alpha n}$ sînt comune și egale cu lungimea cercului adică, cu $2\pi R = \pi$. Să verificăm aceste limite și prin calcul.

$$\lim_{\alpha\to\infty} P^{\alpha}_{2n} = \lim_{\alpha\to\infty} 2^\alpha n \sin\frac{\pi}{2^\alpha n} = \pi \lim_{\alpha\to 8} \frac{\sin\frac{\pi}{2^\alpha n}}{\frac{\pi}{2^\alpha n}} = \pi \tag{13}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} P'^{\alpha}_{2n} = \lim_{\alpha\to\infty} 2^\alpha n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^\alpha n} = \pi \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2^\alpha n}}{\frac{\pi}{2^\alpha n}} = \pi \tag{13'}$$

Aceasta înseamnă că dacă am avea posibilitatea practică de a calcula perimetrele P_n, P'_n; P_{2n}, P'_{2n}; ...; $P_{2^\alpha n}$, $P'_{2^\alpha n}$ aceastea ar forma 2 șiruri:

$$\begin{aligned} &P_n, P_{2n}, \ldots, P_{2^\alpha n}, \ldots \\ &P'_n, P'_{2n}, \ldots, P'_{2^\alpha n}, \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

care ar tinde către π. Cifrele comune ambelor șiruri ar fi zecimale exacte ale lui π. Am putea porni de la patratul înscris sau exagonul regulat.

Calculul practic se face cu ajutorul formulelor lui Saurin pe care le vom demonstra și care ne dau din aproape în aproape, perimetrele succesive (prin recurență)

$$P'_{2n} = 2n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = 2n \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}} = n \frac{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} = n \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{2}} =$$

$$= 2n \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} + 1} = 2n \frac{\sin\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} = 2 \frac{\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)}{\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right) + \left(n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{2P_n P'_n}{P_n + P'_n}$$

deci,

$$P'_{2n} = \frac{2P_n P'_n}{P_n + P'_n} \tag{15}$$

$$P_{2n} = 2n \sin\frac{\pi}{2n} = \sqrt{4n^2 \sin^2\frac{\pi}{2n}} = \sqrt{\left(2n \sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(2n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(n \sin\frac{\pi}{n}\right)\left(2n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)} = \sqrt{P_n P'_{2n}}$$

Deci:

$$P_{2n} = \sqrt{P_n P'_{2n}} \tag{16}$$

Formulele (15) şi (16) constituie formulele lui Saurin. Luăm de exemplu $n = 4$, calculăm $P_4 = 2\sqrt{2}$, $P'_4 = 4$, apoi, se calculează cu formulele lui Saurin şi se face un tablou:

n	P_n	P'_n
4		
8		
.		
.		
.		
1024		
.		
.		
.		

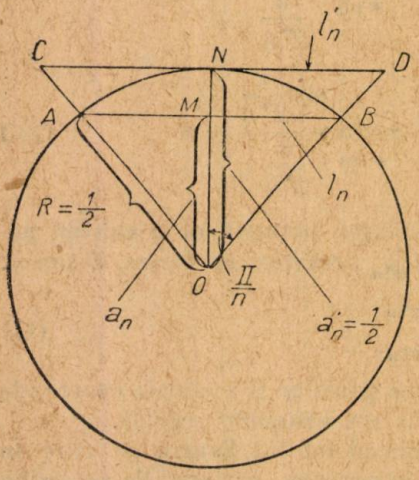


Fig. 2

Oprindu-ne la $n = 1024$ (8 dublări) găsim ca cifre comune pentru P_n şi P'_n 3,1415; luăm media aritmetică a rezultatelor şi găsim $\pi = 3,14159$ cu 5 zecimale exacte.

4°. *Metoda izoperimetrelor* (Descartes) (fig. 2).

Să considerăm laturile şi apotemele poligoanelor regulate de n şi $2n$ laturi de perimetru constant: l_n, a_n, l_{2n}, a_{2n}, razele r_n şi r_{2n} respective. Avem relaţiile:

$$l_n = 2r_n \sin\frac{\pi}{n} \qquad l_{2n} = 2r_{2n} \sin\frac{\pi}{2n} \tag{17}$$

$$a_n = r_n \cos\frac{\pi}{n} \qquad a_{2n} = r_{2n} \cos\frac{\pi}{2n} \tag{17'}$$

însă $P_n = P_{2n}$, deci:

$$nl_n = 2n\, l_{2n} \quad \text{adică:} \quad r_n \sin\frac{\pi}{n} = 2r_{2n} \sin\frac{\pi}{2n} \qquad r_{2n} = r_n \cos\frac{\pi}{2n}. \tag{18}$$

Să căutăm formula de recurență pentru raza poligonului cînd numărul laturilor se dublează nelimitat.

$$r_{2n} = r_n \cos\frac{\pi}{2n}$$

$$r_{4n} = r_{2n} \cos\frac{\pi}{4n}$$

. . . . . .

$$r_{2n}^{\alpha} = r_{2^{\alpha-1}n} \cos\frac{\pi}{2^{\alpha}n} \tag{19}$$

înmulțind,

$$r_{2^{\alpha}n} = r_n \cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}\ldots\cos\frac{\pi}{2^{\alpha}n}$$

însă conform cu (9):

$$r_{2n}^{\alpha} = \frac{r_n \sin\dfrac{\pi}{n}}{2^{\alpha}\sin\dfrac{\pi}{2^{\alpha}n}}. \tag{20}$$

Să calculăm limita acestor raze:

$$\lim_{\alpha\to\infty} r_{2^{\alpha}n} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{r_n \sin\dfrac{\pi}{n}}{2^{\alpha}\sin\dfrac{\pi}{2^{\alpha}n}} = \frac{n}{\pi} r_n \sin\frac{\pi}{n} \lim \frac{\dfrac{\pi}{2^{\alpha}n}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{\alpha}n}} = \frac{n}{\pi} r_n \sin\frac{\pi}{n}$$

deci,

$$\lim_{\alpha\to\infty} r_{2n}^{\alpha} = \frac{n}{\pi} r_n \sin\frac{\pi}{n}. \tag{21}$$

În cazul $n = 6$ și $r_n = 1$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} r_{2^{\alpha}\cdot 6} = \frac{3}{\pi} \quad \text{sau} \quad \pi = \frac{3}{\lim\limits_{\alpha\to\infty} r_{2^{\alpha}\cdot 6}}. \tag{22}$$

În cazul general,

$$\pi = \frac{n \sin\dfrac{\pi}{n}}{\lim\limits_{\alpha\to\infty} r_{2^{\alpha}n}} \tag{23}$$

însă, $n \sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{P_n}{2}$ (perimetrul poligonului regulat de n laturi înscris în cercul de rază $= 1$), deci

$$\pi = \frac{P_n}{2 \lim\limits_{\alpha\to\infty} r_{2n}^{\alpha}}. \tag{24}$$

Pornind de la patrat:

$$\lim_{\alpha\to\infty} r_{2^\alpha\cdot 4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \tag{24'}$$

Ţinînd seama de faptul că putem calcula cosinusurile unghiurilor $\frac{\pi}{2^\alpha\cdot 6}$ sau $\frac{\pi}{2^\alpha\cdot 4}$, găsim unele identităţi; astfel dacă $n = 6$, $r_n = 1$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$r_{24} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\begin{matrix} r_{24} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \\ \vdots \end{matrix} \tag{25}$$

în general,

$$r_{2^\alpha\cdot 6} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}\cdots\frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}^{\alpha+1\text{ radicali}}}{2}$$

şi atunci, conform relaţiei (22):

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}\cdots\underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}}{2}}_{\alpha+1\text{ radicali suprapuşi}} = \frac{3}{\pi} \tag{26}$$

Pornind de la $n = 4$, $r_n = 1$

$$r_{2^\alpha\cdot 4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots\underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}}_{\alpha+1\text{ radicali suprapuşi}} \tag{27}$$

ţinînd seama de (24)

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2} \tag{28}$$

Relaţia (28) inversată reprezintă formula lui Viète (a se vedea exerciţiul nr. 789 din Culegerea de probleme, vol. I, ed. II de Ghiunter şi Cuzmin).

Să considerăm acum, apotemele:

$$a_{2n} = r_{2n}\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$a_{2^\alpha n} = \frac{r_n \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{2^\alpha n}}{2^\alpha \sin\frac{\pi}{2^\alpha n}} \tag{29}$$

deci:

$$\lim_{\alpha \to \infty} a_{2^\alpha n} = \frac{n}{\pi} r_n \sin \frac{\pi}{n} \tag{30}$$

adică aceeaşi limită ca şi razele poligoanelor, ceea ce e evident din punct de vedere geometric.

Pentru calculele practice sînt necesare nişte formule care să ne dea posibilitatea să calculăm uşor razele şi apotemele succesive. Acestea sînt formulele lui Schwab. Astfel:

$$a_{2n} = r_{2n} \cos \frac{\pi}{2n} = r_n \cos^2 \frac{\pi}{2n} = r_n \frac{1 + \cos \frac{\pi}{n}}{2} =$$

$$= \frac{r_n + r_n \cos \frac{\pi}{n}}{2} = \frac{r_n + a_n}{2}$$

adică,

$$a_{2n} = \frac{r_n + a_n}{2} \tag{31}$$

apoi:

$$r_{2n} = r_n \cos \frac{\pi}{n} = \sqrt{r_n^2 \cos^2 \frac{\pi}{2n}} = \sqrt{r_n \left(r_n \cos \frac{\pi}{2n} \right) \cos \frac{\pi}{2n}} =$$

$$= \sqrt{r_n \left(r_n \cos \frac{\pi}{2n} \right)} = \sqrt{r_n a_{2n}}$$

deci

$$r_{2n} = \sqrt{r_n a_{2n}} \tag{32}$$

Formulele (31) şi (32) constituie formulele lui Schwab.

Calculul practic se face pornind de la $n = 6$, $r_6 = 1$, $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$ se calculează apoi, a_{12} din (31) apoi, r_{12} din formula (32) şi aşa mai departe. Rezultatele se trec într-un tablou:

n	a_n	r_n
6		
12		
.		
.		
.		
768		
.		
.		
.		

după 7 dublări ale numărului de laturi $n = 768$, găsim $a_{768} = 0{,}954912$

$r_{768} = 0{,}954225$

cu patru cifre identice; luăm media aritmetică şi aplicînd formula (22) avem $\pi = 3{,}1416$.

5° *Metoda lui* Gregory.

Vom folosi notaţiile şi formulele metodei lui Arhimede. Să calculăm ariile A_n, A_{2n}; A'_n, A'_{2n} ale acestor poligoane.

$$A_n = \frac{\text{perim. apot}}{2} = \frac{n \sin\frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{2} \cos\frac{\pi}{n}}{2} = \frac{n}{8} \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$A_n = \frac{n}{8} \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$A_n = \frac{n}{4} \sin\frac{\pi}{n} \tag{33}$$

$$A'_n = \frac{n}{4} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$

$$A'_{2n} = \frac{n}{2} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$$

Se observă că:

$$A_n = \frac{n}{8} 2 \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n} = \left(\frac{n}{4} \sin\frac{\pi}{n}\right) \cos\frac{\pi}{n} = A_{2n} \cos\frac{\pi}{n}$$

deci:

$$A_{2n} = A_n \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$A_{4n} = A_{2n} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} \tag{34}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{2^\alpha n} = A_{2^{\alpha-1} n} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{\alpha-1} n}}$$

$$A_{2^\alpha n} = A_n \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{2n} \cdots \cos\frac{\pi}{2^{\alpha-1} n}} = A_n \frac{2^\alpha \sin\frac{\pi}{2^{\alpha-1} n}}{\sin\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{4} 2^{\alpha-1} \sin\frac{\pi}{2^{\alpha-1} n}$$

deci:

$$A_{2^\alpha n} = 2^{\alpha-3} n \sin\frac{\pi}{2^{\alpha-1} n} \tag{35}$$

Observăm că expresiile A' sînt numeric egale cu $\frac{P'}{4}$ deci:

$$A'_{2^\alpha n} = \frac{1}{4} 2^\alpha n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^\alpha n} \tag{36}$$

Să calculăm limitele către care tind ariile:

$$\lim_{\alpha\to\infty} A_{2^\alpha n} = \frac{\pi}{4}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{\alpha-1}n}}{\dfrac{\pi}{2^{\alpha-1}n}} = \frac{\pi}{4} \tag{37}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} A'_{2^\alpha n} = \frac{\pi}{4}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2^\alpha n}}{\dfrac{\pi}{2^\alpha n}} = \frac{\pi}{4}. \tag{38}$$

Se vede deci, că ariile poligoanelor înscrise şi circumscrise tind către $\frac{\pi}{4}$ Acest lucru este evident geometric şi ariile tind către aria cercului de diametru unitatea, deci, $\frac{\pi}{4}$.

Pentru calculele practice, se utilizează formulele lui Gregory.

$$A_{2n} = \frac{n}{4}\sin\frac{\pi}{n} = \sqrt{\left(\frac{n}{8}2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{n}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)} = \sqrt{A_n A'_n}$$

deci,

$$A_{2n} = \sqrt{A_n A'_n} \tag{39}$$

$$A'_{2n} = \frac{n}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = \frac{n}{2}\frac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\cos\dfrac{\pi}{2n}} = \frac{n}{4}\frac{2\sin\dfrac{\pi}{2n}\cos\dfrac{\pi}{2n}}{\cos^2\dfrac{\pi}{2n}} = \frac{n}{4}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}{2}} =$$

$$= \frac{n}{2}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}+1} = \frac{n}{2}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}} = \frac{n}{2}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{\pi}{n}} =$$

$$= \frac{2\left(\dfrac{n}{8}\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)\left(\dfrac{n}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{n}{8}\sin\dfrac{2\pi}{n}+\dfrac{n}{4}\sin\dfrac{\pi}{n}} = \frac{2A_n A'_n}{A_n + A_{2n}}$$

adică,

$$A'_{2n} = \frac{2A_n A'_n}{A_n + A_{2n}}. \tag{40}$$

Pentru calculele cu logaritmi e mai indicat să se lucreze cu cantităţile inverse. Calculul se porneşte de la $n = 4$, se calculează $A_4 = \frac{1}{2} = 0{,}50000$ $A'_4 = 1{,}00000$. Cu (39) se calculează A_8, apoi A'_8, şi aşa mai departe.

6° *Metoda lui* Legendre.

Fie a_n, r_n şi a_{2n}, r_{2n} apotema şi raza poligoanelor regulate de n şi $2n$ aturi echivalente şi A_n şi A_{2n} ariile lor. Însă:

$$A_n = \frac{n}{2} 2r_n \sin\frac{\pi}{n} r_n \cos\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} r_n^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$A_n = \frac{n}{2} r_n^2 \sin\frac{2\pi}{n} \tag{41}$$

atunci:

$$A_{2n} = n r_{2n}^2 \sin\frac{\pi}{n} \tag{42}$$

Însă,

$A_n = A_{2n}$ deci:

$$\frac{n}{2} r_n^2 \sin\frac{2\pi}{n} = n r_{2n}^2 \sin\frac{\pi}{n}$$

$$\frac{2}{2} r_n^2 \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n} = r_{2n}^2 \sin\frac{\pi}{n}$$

deci,

$$r_{2n}^2 = r_n^2 \cos\frac{\pi}{n}$$

$$r_{2n} = r_n \sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}. \tag{43}$$

Să căutăm formula de recurenţă pentru poligoanele cu un număr dublu de laturi:

$$r_{2n} = r_n \sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$r_{4n} = r_{2n} \sqrt{\cos\frac{\pi}{2n}}$$

.....

$$r_{2n}^{\alpha} = r_{2^{\alpha-1}n} \sqrt{\cos\frac{\pi}{2^{\alpha-1}n}}$$

înmulţim·

$$r_{2n}^{\alpha} = r_n \sqrt{\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{2n}\ldots\cos\frac{\pi}{2^{\alpha-1}n}}$$

conform relaţiei (9):

$$r_{2n}^{\alpha} = r_n \sqrt{\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2^{\alpha}\sin\frac{\pi}{2^{\alpha-1}n}}} \tag{44}$$

În ceea ce privește apotema

$$a_n = r_n \cos \frac{\pi}{n}$$

deci:

$$a_{2^\alpha n} = r_{2^\alpha n} \cos \frac{\pi}{2^\alpha n}$$

adică:

$$a_{2^\alpha n} = r_n \sqrt{\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{2^\alpha \sin \frac{\pi}{2^{\alpha-1} n}}} \cos \frac{\pi}{2^\alpha n} \tag{45}$$

Să vedem spre ce limită tind razele și apotemele:

$$\lim_{\alpha \to \infty} r_{2^\alpha n} = r_n \sqrt{\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}} \lim_{\alpha \to \infty} \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2^{\alpha-1} n}}{\sin \frac{\pi}{2^{\alpha-1} n}}} = r_n \sqrt{\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}}$$

deci,

$$\lim_{\alpha \to \infty} r_{2^\alpha n} = r_n \sqrt{\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}} \tag{46}$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} a_{2^\alpha n} = \lim_{\alpha \to \infty} r_{2^\alpha n} \cos \frac{\pi}{2^\alpha n} = \lim_{\alpha \to \infty} r_{2^\alpha n} \underbrace{\lim_{\alpha \to \infty} \cos \frac{\pi}{2^\alpha n}}_{1} = \lim_{\alpha \to \infty} r_{2^\alpha n} \tag{47}$$

deci, razele și apotemele tind către aceeași limită, ceea ce era evident din punct de vedere geometric.

Pentru $n = 4$, $l_4 = 1$, deci $r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{\alpha \to \infty} r_{2^\alpha \cdot 4} = \lim_{\alpha \to \infty} a_{2^\alpha 4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tag{48}$$

deci,

$$\pi = \frac{1}{\left(\lim\limits_{\alpha \to \infty} r_{2^\alpha \cdot 4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{\alpha \to \infty} a_{2^\alpha \cdot 4}\right)^2} \tag{48'}$$

Pentru calculele practice ne sînt necesare niște formule de recurență pentru raze și apoteme. Acestea sînt formulele lui Legendre. Astfel,

$$r_{2n} = r_n \sqrt{\cos \frac{\pi}{n}} = \sqrt{r_n \left(r_n \cos \frac{\pi}{n}\right)} = \sqrt{r_n a_n}$$

adică,

$$r_{2n} = \sqrt{r_n a_n} \tag{49}$$

apoi,

$$a_{2n} = r_{2n}\cos\frac{\pi}{2n} = r_{2n}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2n}} = r_{2n}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{2}} =$$

$$= r_{2n}\sqrt{\frac{r_n + r_n\cos\frac{\pi}{n}}{2r_n}} = r_{2n}\sqrt{\frac{r_n + a_n}{2r_n}}$$

deci

$$a_{2n} = r_{2n}\sqrt{\frac{r_n + a_n}{2^n}}. \qquad (50)$$

Formulele (49) şi (50) sînt formulele lui Legendre.

Pentru calculul lui π se porneşte dela $n = 4$, $r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707108$. Se calculează $a_4 = \frac{1}{2} = 0{,}50000$, apoi, r_8 cu formula (49), apoi a_8 cu formula (50) şi aşa mai departe. Cifrele comune şirurilor $a_4, a_8, \ldots, a_{2^{\alpha}\cdot 4}$ şi $r_4, r_8, \ldots, r_{2^{\alpha}}, \ldots$ sînt cifrele exacte ale lui $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (conform relaţiei (48). Dublînd laturile de 8 ori, ajungem la poligonul regulat cu 1024 laturi şi r_{1024} şi a_{1524} se exprimă prin acelaşi număr cu 6 zecimale, 0,564200; deci,

$$\pi = \frac{1}{0{,}564200^2} \cong 3{,}1415$$

7° *Metodele moderne de calcul ale lui* π.

Apariţia teoriei seriilor, ca mijloc teoretic şi apariţia maşinilor de calculat, ca mijloc practic, au însemnat o cotitură în problema găsirii valorii lui π cu un număr mare de zecimale. Pornind de la dezvoltarea în seria a lui Arc tg x:

$$\text{Arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (51)$$

pentru $x = 1$, $\text{Arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$, deci:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{2n+1} + \ldots \qquad (52)$$

Iată deci, pe π ca limita sumei unor termeni. Seria (52) ne dă pe $\frac{\pi}{4}$ cu o aproximaţie mai mică decît primul termen neglijat. De exemplu, luînd trei termeni:

$$\frac{\pi}{4} \cong 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1{,}00000 - 0{,}33333 + 0{,}20000 = 0{,}86667$$

deci,

$$\frac{\pi}{4} \simeq = 4 \cdot 0{,}86667 = 3{,}46668$$

cu o eroare mai mică decît $\frac{1}{7} = 0{,}14288$ în calculul lui $\frac{\pi}{4}$.

Luînd n termeni eroarea ar fi mai mică decît $\frac{1}{2n+1}$. De exemplu dacă vrem $\frac{\pi}{4}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-2} (cu 2 zecimale exacte) trebuie ca:

$$10^{-2} \leqslant \frac{1}{2n+1}; \quad 2n+1 \geqslant \frac{1}{10^{-2}} = 10^2; \quad n \geqslant \frac{99}{2}, \quad n \geqslant 50.$$

Deci, ar trebui să luăm 50 de termeni. E clar deci, că această serie nu ne poate folosi la calculul unui număr mare de zecimale din cauza «slabei convergenţe». De aceea e necesar să găsim o serie «rapid convergentă» adică o serie la care eroarea ce se face prin sumarea primilor n termeni, să fie foarte mică. Pentru aceasta ar fi suficient ca termenii seriei să descrească foarte repede. Se porneşte de la observaţia că

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{239} \tag{53}$$

se constată că seriile $\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{5}$ şi $\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{239}$ sînt rapid convergente. Dezvoltînd în serie formula (53) găsim:

$$\pi = \frac{16}{5}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 100} + \frac{4^2}{5 \cdot 100^2} \ldots\right) - \frac{4}{239}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} \ldots\right) \tag{54}$$

O altă serie ce ne dă pe π este:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{54'}$$

Numărul π se mai poate exprima şi cu ajutorul produselor infinite, după cum s-a văzut în formulele (26) şi (28).

Walis a dat o formulă care-i poartă numele şi care e utilă în calculul probabilităţilor, care ne dă pe π:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p)]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 6 \ldots (2p-1)]^2 (2p+1)} = \lim \frac{2^{4p} (p!)^2}{(2p!)^2 (2p+1)}.$$

De asemenea, se pot da diferite forme lui π cu ajutorul fracţiilor continui. Astfel, se poate demonstra (nu dăm aceste demonstraţii deoarece ar

depăşi cadrul articolului), că:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ldots}}}}}$$

legea de formare a fracţiei continui fiind evidentă. Această formulă are avantajul că ne poate da valori aproximative pentru π prin fracţii ordinare (redusele succesive). Astfel:

$$\pi \simeq \frac{4}{1} = 4$$

$$\pi \simeq \frac{4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$$

$$\pi \simeq \frac{4}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{9}{2}}} = \frac{52}{15}$$

$$\pi \simeq \frac{4}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \frac{25}{2}}}} = \frac{304}{105}.$$

Utilizînd fracţii continui mai rapid convergente am găsi aproximaţii şi mai bune pentru π.

8° *Metode experimentale.*

Trebuie subliniat de la început, că aceste metode experimentale nu sînt din cele mai precise, căci comportă un număr mare de încercări. Noi totuşi, le semnalăm aci nu pentru ca cititorul să încerce să găsească valoare lui π pe aceste căi, ci pentru a sublinia interdependenţa diferitelor ramuri ale matematicii. Se poate demonstra că probabilitatea ca o fracţie dintr-un număr *foarte mare* de fracţii scrise la întîmplare să fie ireductibilă, este egală cu $\frac{6}{\pi^2}$.

Şi atunci, se poate face următoarea experienţă: un mare număr de persoane, de exemplu elevi, scriu un mare număr (de exemplu 100) de fracţii fiecare. Raportîndu-se numărul de fracţii ireductibile la numărul total de fracţii scrise rezultă un număr care ne dă aproximativ valoarea fracţiei $\frac{6}{\pi^2}$ deci, pe π.

9° A doua metodă experimentală este dată de problema lui Buffon numită problema cuiului, şi anume se caută probabilitatea ca un cui căzînd pe pardoseală să intersecteze un interspaţiu dintre două scînduri (s-ar putea să cadă şi între). Aceasta este egală cu $\frac{2}{\pi}$. Şi atunci se poate imagina uşor o experienţă, aruncînd un cui de un număr cît mai mare de ori pe pardoseală, (lungimea cuiului fiind egală cu lăţimea scîndurilor egale ale duşumelei) şi să raportăm numărul cazurilor în care cuiul întîlneşte interspaţii dintre două scînduri la numărul total de încercări. Vom căpăta astfel, o valoare aproximativă pentru $\frac{2}{\pi}$ deci pentru π.

10° Şi acum, ca încheiere, putem spune că matematicienii avînd la dispoziţie un număr de 700 şi ceva de zecimale ale lui π şi-au pus problema să vadă dacă acestea se succed la întîmplare sau nu. Astfel s-a numărat de cîte ori apar cifrele 0, 1, 2, ... între cele 707 zecimale şi s-a ajuns la concluzia că aceste cifre se succed la întîmplare, după cum se întîmplă de exemplu, cu cifrele izolate la tragerile de loto sau loterie.

CERUL ÎN MARTIE

V. DAIMACA

Astronom la Observatorul Astronomic, Bucureşti

DELA înfăţişarea cerului înstelat din luna septembrie, descris în numărul 8—1954 al Gazetei noastre, a trecut o jumătate de an. Pămîntul ne-a purtat în jurul Soarelui cu viteza de 30 km pe secundă şi a descris jumătate din orbita lui.

Din cauza mişcării acestuia, ni se pare că Soarele alunecă pe sfera cerească şi descrie într-un an, un cerc mare. Acest cerc numit *ecliptică*, a fost cunoscut din antichitate nu însă şi cauza ce-l determină, căci mişcarea Pămîntului în jurul Soarelui nu era dovedită în acele vremuri. Viaţa cu toată desfăşurarea ei, depinde în primul rînd, de existenţa Soarelui. Vechii astronomi i-au urmărit mişcarea pe cer, care se face pe ecliptică, şi au imaginat cele 12 constelaţii numite zodii, pe care le străbate Soarele: cîte o constelaţie în fiecare lună.

Pe cerul din septembrie (fig. 1) am indicat atunci, cele 6 constelaţii zodiacale ce se vedeau pe cer la ora 9 seara. Numărîndu-le de la apus la răsărit, erau: Balanţa, Scorpionul, Arcaşul, Capricornul, Vărsătorul şi Peştii.

Pe cerul din martie, găsim restul, şi anume: Berbecul, Taurul, Gemenii, Cancerul (Racul), Leul şi Fecioara.

Trebuie să reţinem că Soarele circulă aparent prin zodiac, de la apus spre răsărit, făcînd în fiecare an un ocol complet. Luna şi celelalte planete fac acelaşi lucru, dar în timp diferit. Totuşi ele nu sînt pe ecliptică şi mişcarea lor se face în zona zodiacului. Unele mici planete fac excepţie, ele fiind prea mici, nu se văd cu ochiul liber; acestea interesează numai pe astronomi. Cine vrea să identifice pe cer o planetă oarecare, trebuie să cerceteze numai constelaţiile zodiacale. Nimeni nu va vedea planete în Carul Mare, Cassiopeia, Cîinele Mare, etc.

Cerul din martie (fig. 2) comparat cu cel din septembrie are alt aspect. S-au păstrat constelațiile nordice dar așezarea lor este alta. De exemplu. în septembrie ora 9 seara Cassiopeia se găsea la dreapta (est) de *Steaua*

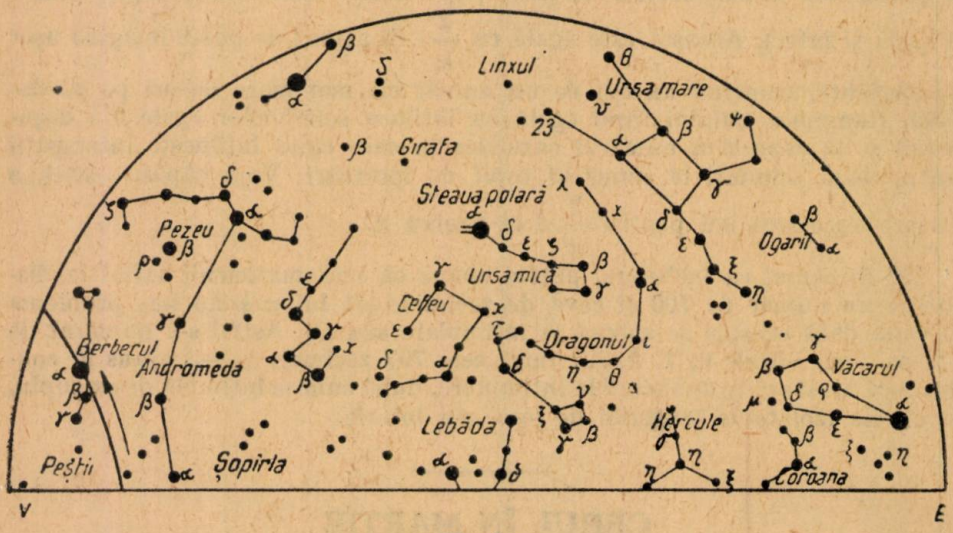


Fig. 1

Polară. La 1 martie aceiași oră, ea se afla la stînga (vest) de Steaua Polară, Să copiem pe o hîrtie transparentă constelațiile nordice (fig. 1) și anume, cele cuprinse într-un cerc cu centrul în Steaua Polară (aproximativ, Polul

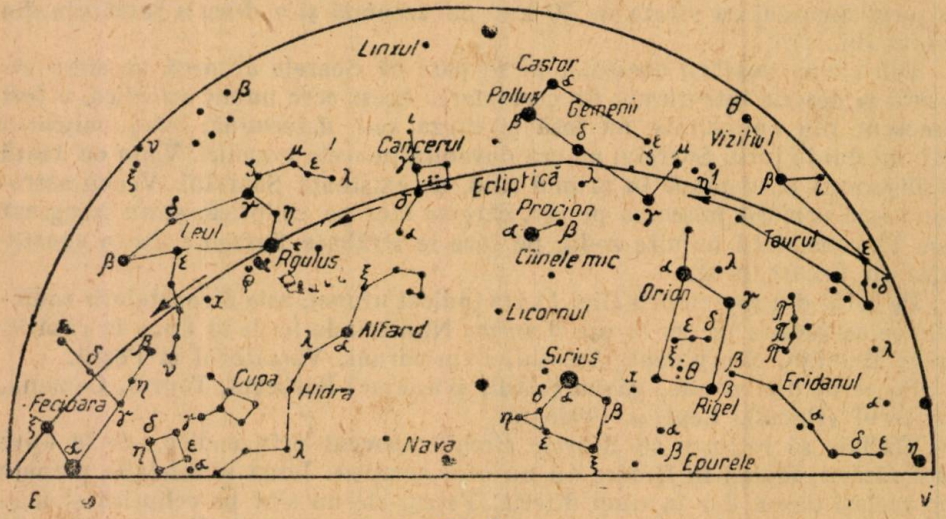


Fig. 2

nord ceresc) și cu raza cît distanța de la ea pînă la orizont (centrul semicercului din figură). În acest cerc se vor găsi constelațiile circumpolare ale

căror stele nu răsar şi nici nu apar la noi. Să rotim acest cerc în jurul centrului său în sens retrograd (invers mersului acelor unui ceasornic). Dacă am copiat constelaţiile acestea de pe fig. 1 cu înfăţişarea lor la 1 martie ora 9 seara, şi vom roti cercul în sensul amintit cu 30°, vom căpăta aspectul cerului de nord pentru 1 aprilie aceeaşi oră.

Dacă rotim cu 60°, căpătăm aspectul de la 1 mai. Rotind cu 180° găsim înfăţişarea cerului de nord indicată la 1 septembrie anul trecut.

Pricina acestor schimbări de aspect este mişcarea reală a Pămîntului pe orbita sa, care are ca rezultat alunecarea aparentă a imaginii Soarelui pe ecliptică. Constatăm cu acest prilej, legătura strînsă între fenomenele cereşti, dependenţa dintre realitate şi aparenţă.

La 1 martie ora 9 seara, vom observa că la nord-vest, patratul lui Pegas a apus, a rămas numai vîrful α *Andromeda*, care va apune peste puţină vreme. Constelaţia Andromeda care se afla la est în septembrie, se găseşte acuma la vest şi va apune şi ea tîrînd după sine sub orizont, constelaţia Perseu apoi Berbecul, constelaţia zodiacală, le va urma.

În prezent, Soarele străbate constelaţia *Peştii* deplasîndu-se de la vest spre est (mişcarea directă) pe ecliptică cu aproximativ un grad în 24 de ore. În aprilie el se va proiecta pe sfera cerească peste constelaţia Berbecul şi evident, că stelele ce alcătuiesc această zodie vor fi ascunse de lumina zilei.

Constelaţia zodiacală următoare, este *Taurul* din care face parte grupul Cloşca cu Pui sau Pleiadele. Steaua α a acestei constelaţii este *Aldebaran*, stea de prima mărime şi culoare portocalie. Numele Aldebaran derivat din arabul Al- dabaran, înseamnă «următoarea» pentrucă această stea este situată pe cer după Pleiade. Arabii o mai numeau şi Ochiul Taurului iar evreii îi spuneau Ochiul lui Dumnezeu. Taurul este cel mai vechi semn al zodiacului, prima constelaţie cînd, cu mii de ani în trecut, echinocţiul de primăvară se găsea aci. Se pare că astronomia de observaţie a fost întemeiată cînd echinocţiul de primăvară trecea prin Aldebaran, adică cu 3000 de ani înaintea erei noastre. Aldebaran, ca şi Pleiadele (Cloşca cu Pui) au avut un rol important în calendarele vechi. Astăzi Soarele străbate Taurul în luna mai. Pleiadele au atras atenţia oamenilor din cele mai îndepărtate timpuri. Înainte de a cunoaşte durata anului solar, popoarele primitive potriveau calendarul lor după stele, anul începea atunci cînd răsăreau Pleiadele dimineaţa şi iarna începea cînd ele răsăreau seara. Arabii numeau acest grup de stele «Cloşca cu Pui».

Sub constelaţia Taurul, spre sud-est este aşezat uriaşul *Orion*. Această constelaţie a fost slăvită de Job, Homer şi Hesiod. Patrulaterul care formează corpul principal al constelaţiei reprezintă pentru cercetătorii antici, trupul uriaşului. Cele două stele superioare α şi γ sînt umerii, celelalte două inferioare x şi β, genunchii.

La mijlocul patrulaterului se observă un şir de trei stele ζ, ε şi ξ care formează centura, Deasupra umerilor, steaua λ arată capul uriaşului, sub brîu este un şir de trei stele c, θ, şi i care alcătuiesc spada. La vest de patrulater este un arc de stele mai mici: acestea reprezintă scutul sau pavăza cu care era prevăzut uriaşul. Alte stele la nord-est de umărul drept, închipuie măciuca sau buzduganul cu care Orion se apăra împotriva Taurului care ameninţă cu coarnele.

Cuvîntul Orion este foarte vechi, derivat de la grecescul Orios, care înseamnă anotimp.

Steaua α (umărul drept) este roşiatică, strălucitoare şi se numeşte *Betelgeuse*, de la ibt-al-jauza (umărul uriaşului), iar β, piciorul stîng, stea albăstrie, strălucitoare, se numeşte Ridjl-al-jauza (piciorul uriaşului). Betelgeuse este o stea uriaşă cu un diametrul de peste 300.000.000 km. Cele trei stele ale brîului sînt numite în popor, «rariţa» sau «grapa», «cei trei regi», sau «toiagul lui Moise».

Constelaţia zodiacală Gemenii este reprezentată schematic, printr-un alt patrulater mai mic ca întindere decît Orion. Cele două stele α *(Castor)* şi β *(Polux)* reprezintă doi gemeni. Cei vechi vedeau însă, pe Apollon şi Hercule. Toţi aceştia erau copii zeului Jupiter.

Lîngă steaua 1, a fost descoperită planeta *Uranus* la 13 martie 1781, de William Herschel. Soarele străbate această constelaţie, în iunie.

Urmează zodia *Cancerul* sau Racul, formată din stele mai slabe. Se găseşte cu ochiul liber, între γ şi ζ o pată alburie numită «ieslea» iar stele laterale şi γ şi ζ, măgarii. Pata aceasta alburie văzută cu un binoclu se transformă într-o grămadă de steluţe.

Soarele străbate Cancerul în iulie. Urmează constelaţia *Leul*. Trapezul format din α, γ, ζ, β alcătuia în imaginaţia popoarelor vechi, trupul unui leu. Stelele, τ, *u*, ε, λ *x* formau gîtul şi capul. În această constelaţie găsim o stea albă strălucitoare α sau *Regulus*. Soarele străbate Leul în luna august.

Ultima constelaţie zodiacală este *Fecioara* sau Zeiţa Ceres (a producţiei agricole). Steaua α de prima mărime, de culoare albăstruie se numeşte «spicul», un spic de grîu ţinut în mîna stîngă de zeiţa Ceres. Soarele străbate această constelaţie în luna septembrie. De obicei, în afară de constelaţiile zodiacale arătate se mai observă şi constelaţia *Hidra* cu steaua α (roşie) care indică inima hidrei, numită *Alfard*, de la arabul al-fard, care înseamnă singuratica.

Prelungind linia dreaptă ce uneşte γ cu α din Leul, spre sud, cu două distanţe γα găsim pe α din Hidra.

Sub *gemenii* avem o stea strălucitoare *Procyon* sau α din Cîinele mic aşezată în Calea Laptelui (galaxie). Între Cîinele mic şi Orion este constelaţia *Licornul*. Sub Licornul sau Monoceratis, la sud, se găseşte constelaţia Cîinele mare cu steaua α sau *Sirius*, cea mai strălucitoare stea de pe sfera cerească. Ea se găseşte la sud, în nopţile de iarnă. În octombrie răsare la sud-est după miezul nopţii, în decembrie răsare cam pe la ora 10 seara, în ianuarie la 8 seara. Rămîne vizibil pe cer pînă în aprilie, la sud-vest.

Sirius, Procyon şi Betelgeuse formează pe bolta cerească, un mare triunghi aproximativ echilateral. Numele Sirius derivă de la grecescul seir care înseamnă a străluci, denumire dată şi Soarelui din pricina strălucirii sale. Este uşor de înţeles că substantivul nostru «Soare» este înrudit cu termenul grecesc seir al cărui genetic este «seirios».

În limba sanscrită «svar» are acelaşi înţeles. Prin anul 3285 înaintea erei noastre, adică un veac şi jumătate după construirea piramidei celei mari a lui Keops, din Egipt, Sirius regulă calendarul egiptean. Cînd apărea Sirius era solstiţiu de vară şi Nilul începea revărsarea peste maluri. Sirius era numit de egipteni Sathis. Rolul său de a anunţa revărsarea Nilului a fost simbolizat printr-un cîine care anunţă acest eveniment agricol important.

Hesiod sfătuia pe contemporanii săi, să culeagă via cînd Orion şi Sirius sînt deja răsăriţi, la începutul nopţii. (Pe timpuri Sirius răsărea dimineaţa la 21 iunie anunţînd, pe lîngă revărsarea Nilului şi începutul zilelor de mari

călduri. De aceea i s-a spus «*Stella Canicula*» adică Steaua Cîinelui, şi de aci s-a păstrat pînă azi, expresia «*călduri caniculare*», vrînd să se arate că e vorba de călduri sau arşiţă foarte mare.

Celelalte constelaţii de primăvară sînt *Cupa* şi *Corbul*, *Sextantul* şi *Licornul*, *Bava* şi *Eridanul*. Pentru identificarea lor este nevoie de o hartă cerească lucrată în acest scop.

În martie deci, pe bolta cerească avem 10 stele strălucitoare, şi anume: Arcturus, Capella, Aldebaran, Rigel, Betelgeuse, Sirius, Procyon, Pollux Regulus şi Spicul.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICI

NOTE MATEMATICE

1. Asupra problemei 1062

NOTA prezentă vrea să servească de îndemn pentru corespondenţii «Gazetei» să înceapă cercetarea personală în domeniul matematicii prin reluarea sub noi aspecte, a problemelor rezolvate. Sub această formă se pot face uneori, corelaţii instructive.

Ne referim la problema 1062 a tov. Mihail Popescu: *Trei cercuri egale trec printr-un punct P şi se intersectează cîte două în punctele A, B, C. Punctul P este ortocentrul triunghiului ABC.*

Proprietatea caracteristică a ortocentrului care intervine în problema 1062 este aceea că simetricele ortocentrului faţă de laturi sînt situate pe cercul circumscris; deci ortocentrul este intersecţia — diferită de vîrfuri — a două cercuri simetrice cercului circumscris faţă de două laturi. Prin urmare, în afară de *soluţia directă* dată problemei (G.M.F. seria B, nr. 8, pag. 287) putem indica şi următoarea soluţie mai aproape de natura însăşi a problemei: Considerăm triunghiul APB şi cercul O_1 circumscris; cercurile O_2 şi O_3 simetrice lui O_1 faţă de laturile AP, BP se retaie în C, care este ortocentrul triunghiului ABP. Invers, P este ortocentrul triunghiului ABC deoarece punctele A, B, C, P au un rol simetric.

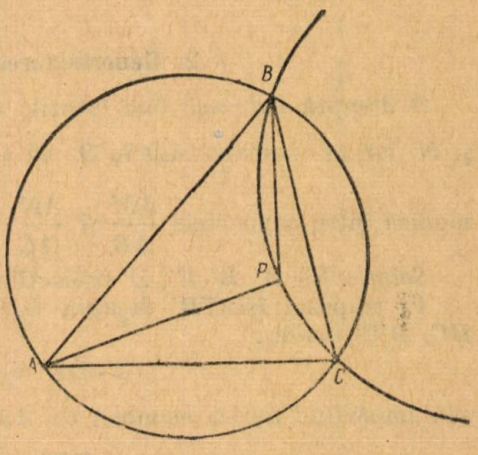


Fig. 1

O altă soluţie care convine acestui gen de probleme se obţine printr-o *transformare prin inversiune* *) de po. P. Cercurile egale care trec prin P devin trei drepte egal depărtate de punctul P, dreapta BC devine un cerc care trece prin P, iar AP va deveni o dreaptă care

*) Se poate consulta articolul: «Inversiunea» — R. M.F., IV: 217 şi V: 3.

trebuind să taie sub unghi drept cercul precedent, va trece prin centrul lui. Obținem astfel, următorul enunț echivalent cu problema nr. 1062 a cărui justificare este imediată:

Fie P centru cercului înscris triunghiului ABC; dreapta AP trece prin centrul cercului BPC.

Rolul punctelor A, B, C, P fiind simetric rezultă că cercul care trece prin A, B, C este egal cu cercurile date — de altfel, coarda BC se vede din A și din P sub unghiuri suplimentare, deci, cercurile ABC, PBC sînt simetrice față de BC. Obținem atunci, teorema (piesei de 5 lei) a lui G. Țițeica:

Trei cercuri egale trec printr-un punct P și se intersectează cîte două în punctele A, B, C. Cercul ce trece prin ABC este egal cu cercurile date. A se vedea și rezolvarea problemei 1206 în G.M.F., B, V, pag. 485.

— Împrejurarea că O_1, O_2 și O_3 sînt cercuri egale atrage însușirea că P este ortocentrul triunghiului ABC. Căutăm proprietatea corespunzătoare a punctului P, *în cazul general*. Fie deci, P un punct arbitrar în planul triunghiului ABC și R, R_1 razele cercurilor ABC, PBC. Coarda BC este comună, deci $BC = 2R \cdot \sin(BAC)$, $BC = 2R_1 \sin(BPC)$, deci,

$$\sin(BPC) : \sin(BAC) = R : R_1 \qquad (1)$$

Relația (1) și cu analoagele ei extinde proprietatea ortocentrului. În adevăr, dacă $R = R_1$ unghiurile BPC și BAC sînt egale sau suplimentare și P este situat ori pe cercul ABC, ori pe simetricul lui în raport cu BC. Dacă trei din cercurile ABC, PBC, PCA, PAB sînt egale atunci sînt egale toate și în baza relației (1) și analoagelor, oricare din punctele A, B, C, P este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei puncte.

N. Mihăileanu
profesor la Institutul Pedagogic, Timișoara

2. Generalizarea problemei 1301

O dreaptă oarecare taie laturile AB, AC ale unui triunghi ABC în M și N, iar pe mediana AD în O. Să se arate că raportul $\frac{AO}{AD}$ este medie armonică între rapoartele $\frac{AM}{AB}$ și $\frac{AN}{AC}$.

Soluție. Fie A', B', C', D' proiecțiile punctelor A, B, C, D pe dreapta MN. În trapezul $BCC'B'$ dreapta DD' unind mijloacele laturilor neparalele BC, $B'C'$, avem:

$$2 \cdot DD' = BB' + CC'$$

sau împărțind ambii membrii cu AA':

$$2 \cdot \frac{DD'}{AA'} = \frac{BB'}{AA'} + \frac{CC'}{AA'} \qquad (1)$$

și cum

$$\frac{DD'}{AA'} = \frac{DO}{AO}; \quad \frac{BB'}{AA'} = \frac{BM}{AM}; \quad \frac{CC'}{AA'} = \frac{CN}{AN}$$

relaţia (1) devine:

$$2 \cdot \frac{DO}{AO} = \frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN}$$

sau ţinînd seama că:

$$DO = AD - AO \; ; \; BM = AB - AM \; ; \; CN = AC - AN;$$

$$2 \cdot \frac{AD - AO}{AO} = \frac{AB - AM}{AM} + \frac{AC - AN}{AN}$$

sau încă:

$$2 \cdot \frac{AD}{AO} - 2 = \frac{AB}{AM} - 1 + \frac{AC}{AN} - 1$$

$$2 \cdot \frac{AD}{AO} = \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN}. \quad (2)$$

Ultima relaţie punînd-o sub forma:

$$\frac{2}{\frac{AO}{AD}} = \frac{1}{\frac{AM}{AB}} + \frac{1}{\frac{AN}{AC}}$$

rezultă că raportul $\frac{AO}{AD}$ este media armonică a rapoartelor $\frac{AM}{AB}$ şi $\frac{AN}{AC}$. Cînd dreapta MN taie prelungirile laturilor AB, AC demonstraţia este analoagă.

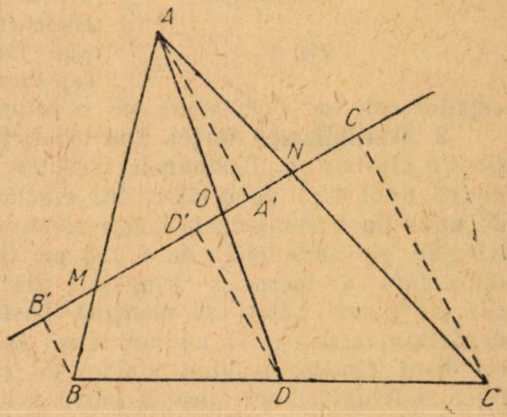


Fig. 2

Observare. — Dacă $O = G$ centrul de greutate al triunghiului ABC atunci

$$\frac{2AD}{AO} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

şi relaţia (2) devine

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$$

care corespunde problemei propuse 1301.

Soluţia şi generalizarea date de **I. I. Cristea,** elev, Constanţa.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Lumînarea-motor.** Exact în mijlocul unei lumînări înfigem din două părţi opuse, gămăliile încălzite a două ace, aşa fel ca direcţia lor să fie perpendiculară pe fitil. Acele vor forma axul motorului; capetele acelor ce ies din corpul lumînării le rezemăm pe marginea a două pahare de aceiaşi înălţime. Aprindem fitilul la ambele capete ale lumînării. O picătură

de ceară va cădea şi de aceea echilibrul se va strica, iar capătul lumînării din care a căzut picătura, se va ridica pe cînd celălalt capăt va coborî. În această mişcare, din capătul care coboară vor cădea cîteva picături datorită cărui fapt el devine mai uşor şi se ridică în timp ce celălalt coboară. Balansarea lumînării la început înceată, devine tot mai rapidă. Ea durează pînă cînd lumînarea arde complet.

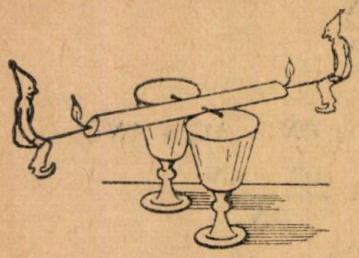


Fig. 1

Două figurine tăiate din carton şi prinse de capetele unei sîrme mai lungi decît lumînarea şi legate fix de aceasta, pot face experienţa mai atractivă, ele reprezentînd jocul prea bine cunoscut al copiilor care se balansează pe o scîndură aşezată pe un butuc.

2. **Multiplicarea forţei.** Doi băieţi ţin de capete un baston, iar alţi doi ţin un alt baston. Bastoanele trebuiesc ţinute paralel şi la distanţă de un metru unul faţă de celălalt. Al cincilea băiat leagă capătul unei frînghii de unul din bastoane şi le înfăşoară cu această frînghie pe amîndouă, de 4...5 ori (în spirală), fără a încrucişa frînghia. Oricît s-ar sili cei patru băieţi să menţină bastoanele depărtate între ele ei nu vor reuşi, deoarece cel de-al cincilea trăgînd singur de capătul liber al frînghiei, va apropia bastoanele.

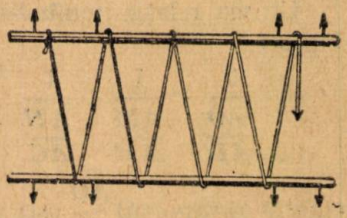


Fig. 2

Aceasta se explică prin faptul că înfăşurarea frînghiei pe după cele două bastoane realizează un dispozitiv asemănător sistemului de scripeţi compuşi şi deci, cu o forţă mică se poate învinge o rezistenţă foarte mare.

3. **Iluzie optică.** Doi prieteni se plimbă cu barca pe lac. Unul din ei, arătînd spre un loc ceva mai îndepărtat, spune: unde este mai adînc lacul? In locul în care ne aflăm sau acolo? Celălalt se uită spre fundul lacului,

Fig. 3

spre locul indicat, iar pe urmă, aplecîndu-se peste marginea bărcii se uită drept în jos. El conchide că lacul este mai adînc în locul în care se aflau.

Prietenul îi spune să vîslească spre locul celălalt, mai puţin adînc, şi să se uite din nou spre fundul apei. De data aceasta, afirmă tocmai contrarul: sub barcă lacul pare mai adînc decît în locul de unde plecaseră.

Cum se explică aceasta, întreabă el; se pare că în locul unde ne aflăm cu barca lacul este mai adînc, ori acest lucru nu poate fi adevărat?

Aminteşte-ţi cîteva chestiuni de fizică şi desigur vei înţelege, răspunde prietenul.

Şi într-adevăr el şi-a putut explica cauza: privind din barcă spre fundul lacului către locul indicat, fundul i se pare mai ridicat datorită fenomenului de refracţie; raza de lumină face un drum oblic prin apă atunci cînd se priveşte locul îndepărtat, şi după direcţia normalei cînd se priveşte în jos spre fundul apei în locul în care se află. Figura alăturată completează explicaţia.

4. **Apa care nu fierbe la foc.** Puneţi la foc un vas cu apă, vasul rămînînd neacoperit; cînd apa începe să fiarbă aşezaţi în vas o sticluţă pe jumătate cu apă, sticluţa fiind fără dop. Oricît veţi aştepta ca apa din sticluţă să fiarbă, ea nu va fierbe, deşi se continuă încălzirea vasului cu apă. Dacă puneţi însă, în apa din vas, sare de bucătărie, apa din sticluţă va începe să fiarbă în curînd.

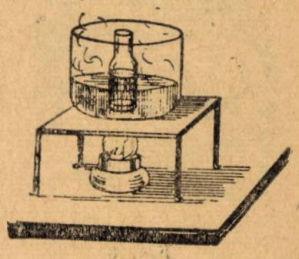


Fig 4

Dece în primul caz, apa din sticluţă nu fierbe, iar în al doilea caz, fierbe?

Fierberea are loc cînd presiunea vaporilor egalează presiunea atmosferică şi aceasta are loc la temperatura de fierbere a apei, adică la 100 °C. Bulele de vapori se formează însă la fundul vasului şi pentru a străbate prin masa de lichid trebuie să învingă şi presiunea exercitată de lichid. Fenomenul este realizabil, deoarece fundul vasului este încălzit la flacără sau pe o plită şi deci, poate căpăta temperatura necesară vaporilor pentru a învinge presiunea lichidului şi a atmosferei.

Deci, în primul caz apa fierbe deoarece bulele de vapori se găsesc la o temperatură care le permite să aibă forţa elastică necesară.

În acest prim caz, apa din sticluţă nu fierbe deoarece vaporii din apă nu pot avea acel surplus de temperatură şi deci nici forţa elastică necesară pentru a învinge presiunea lichidului şi a atmosferei, sticluţa fiind în contact cu apa la 100 °C.

Fig. 5

În al doilea caz această condiţie este realizată deoarece apa sărată are o temperatură de fierbere mai mare de 100°C.

5. **Aprinderea zahărului.** Luaţi cu un cleşte o bucăţică de zahăr şi încercaţi să o aprindeţi cu un chibrit. După cîteva încercări vă veţi convinge că acest lucru nu este posibil: zahărul nu se aprinde de la flacăra chibritului, ci numai se topeşte. Dacă presăraţi însă, puţină cenuşă pe bucăţica de zahăr este suficient un singur chibrit pentru ca bucăţica de zahăr să se aprindă cu flacără vie albastră şi să ardă complet. Cum se explică aceasta?

În primul caz bucăţica de zahăr nu se aprinde, deoarece căldura flacării chibritului este reflectată difuz în aer şi nu se poate realiza temperatura de aprindere a zahărului.

În al doilea caz, căldura flacării chibritului nu mai este difuzată în mediul exterior deoarece stratul de cenuşă este izolant; astfel se poate realiza temperatura de aprindere şi bucăţica de zahăr începe să ardă. Arderea se continuă datorită căldurii ce se degajă în acest timp, căldură care de asemenea, nu este pierdută.

6. **Fotometrie.** Aşezaţi pe masă două lumînări la distanţa de 60 cm una de alta. Aprindeţi lumînările, iar pe linia dreaptă care le uneşte ţineţi o foaie de hîrtie pe care s-a făcut dinainte, o pată de ulei sau de petrol, astfel ca pata să fie la înălţimea flacărilor celor două lumînări. Staţi în spatele uneia din lumînări şi apropiaţi foaia de hîrtie mai mult de această lumînare. Pata va deveni din ce în ce mai întunecată. Dacă deplasaţi hîrtia spre cea de-a doua lumînare pata va deveni din ce în ce mai puţin vizibilă şi va dispare complet cînd hîrtia se va afla la mijlocul distanţei dintre cele două lumînări. Cum se explică acest fenomen?

Fig. 6

Întunecarea petei se datoreşte iluminării neegale de pe cele două feţe ale hîrtiei, deoarece izvoarele de lumină fiind egale ca intensitate luminoasă sînt la distanţe diferite faţă de foaia de hîrtie. Se ştie însă, că iluminarea este proporţională cu intensitatea izvorului luminos şi invers proporţională cu patratul distanţei pînă la acest izbvor şi deci, faţa mai apropiată de sursă are o iluminare mai mare decît faţa mai depărătată. La mijlocul distanţei dintre lumînări se realizează şi condiţia distanţelor egale pe lîngă aceea a intensităţilor egale şi deci, şi iluminările celor două feţe vor fi egale; în consecinţă, nemaifiind contrastul de iluminare dispare imaginea petei.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL DE MAŞINI ŞI APARATE ELECTRICE, CRAIOVA – AUGUST 1954

Grupa I

1512. Fie $AB = 2a$ diametru unui semicerc. Într-un punct oarecare M al acestui semicerc se duce o tangentă care întîlneşte diametrul AB prelungit, în punctul N. Unghiul MNA se înseamnă cu litera x. Tangenta în A la semicerc întîlneşte tangenta MN în punctul P, iar tangenta în B întîlneşte aceiaşi tangentă în punctul Q. Se cere:

1. Să se calculeze mărimile segmentelor AP şi BQ în funcţie de unghiul x şi să se deducă din expresiile acestor mărimi că produsul $AP \cdot BQ$ nu depinde de unghiul x.

2. Să se găsească geometric valoarea produsului $AP \cdot BQ$.

3. Linia mixtă formată din arcul de cerc AM prelungit cu segmentul de dreaptă MN rotindu-se în jurul diametrului AB, să se calculeze în funcţie de unghiul x, aria corpului generat prin această rotaţie (se va pune rezultatul sub o formă calculabilă prin logaritmi).

4. Să se afle ce valoare trebuie să aibă unghiul x pentru ca aria calculată la punctul precedent să fie de 9 ori mai mare decît aria semicercului AMB.

1513. Să se rezolve inecuaţia:

$$\frac{(3x+2)}{x-5} < \frac{6}{x+2} + \frac{39}{(x+2)(x-5)}$$

Grupa II

1514. Se consideră un cerc de rază R cu diametrul AB. Se duce pe acest diametru perpendiculara MN dintr-un punct al cercului. Se cere: 1) să se calculeze raportul suprafeței totale a conului născut prin rotirea triunghiului MAN în jurul diametrului, către suprafața triunghiului MAN exprimat prin unghiul $MAB = x$; 2) să se calculeze acest unghi astfel ca raportul de la punctul 1 să fie egal cu 2: $\sqrt{3}$; 3) Tangenta la cerc în M taie prelungirea diametrului AB în punctul C. Să se determine volumul solidului născut prin rotirea conturului format din segmentul CM și arcul MA în jurul lui AC; 4) Paralela dusă prin N la tangenta MC taie latura AM în punctul D. Să se afle ce valoare să aibă unghiul x pentruca triunghiul MND să fie isoscel cu vîrful în M.

1515. Să se rezolve în ecuația:

$$\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^3+x-8}{(x+1)(x-4} > \frac{x-2}{x-4}$$

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ DIN CLUJ, AUGUST 1954

1516. Colectivul unei gospodării agricole dorește să împrejmuiască o grădină dreptunghiulară de 9 ha cu 5 rînduri de sîrmă ghimpată. În acest scop inginerul gospodăriei măsoară unghiul pe care diagonala îl face cu una din laturi, găsindu-l de 30°. Să se calculeze cîți metri lineari de sîrmă ghimpată sînt necesari pentru împrejmuirea grădinii?

1517. Să se arate că pentru orice valoare întreagă a lui x expresia $x^3 + 5x$ este divizibilă cu 6.

1518. Pe baza AB a unui triunghi oarecare ABC se ia un punct oarecare P din care se duce o paralelă la mediana CM a triunghiului. Această paralelă taie celelalte două laturi (sau prelungirile lor) în punctele D și E. Să se arate că $PD + PE =$ constant.

DIN PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL DE MECANICĂ, ORAȘUL STALIN, AUGUST 1954

1519. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x}{\sqrt{a^3+x^3}} + \frac{x-b}{\sqrt{b^3+(b-x)^3}} = 0.$$

1520. Să se rezolve sistemul:

$$\log \sqrt{x} - \log \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$2 \log x + 2 \log y = 2 + \log 2.$$

1521. Într-un cerc cu raza egală cu $\sqrt{3}$ se înscrie un trapez care are baza mare cît latura triunghiului echilateral înscris în acest cerc și baza mică cît latura exagonului înscris. (Bazele sînt așezate de o parte și de alta a centrului cercului). Se cere:

— perimetrul și suprafața trapezului; — lungimea arcului de cerc subîntins unei laturi neparalele a trapezului; — volumul conului din care face parte trunchiul de con generat prin rotația trapezului în jurul axei de simetrie.

1522. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin^2 2a - \sin^2 2b}{\sin^2 a - \sin^2 b} = 4 \cos (a+b) \cos (a-b).$$

1523. O fabrică de şuruburi a produs în anul 1947 un număr de 2.000.000 şuruburi, iar în anul 1952 a produs 20.000.000 şuruburi. Dacă considerăm că creşterea producţiei de la un an la altul s-a făcut cu aceiaşi depăşire procentuală, se cere: să se calculeze aceasta depăşire anuală procentuală.

1524. Să se aducă la forma cea mai simplă

$$\frac{\left(\frac{x^3+a^3}{ax}-2\right)\left(x+\frac{ax+a^2}{x}\right)(x+a)}{\left(\frac{x^2+a^2}{a}-2a\right)\left(x-\frac{a^3}{x^2}\right)}$$

1525. Se dă triunghiul isoscel ABC cu baza $BC = 12$ cm. La distanţa de 2 cm de bază în interiorul triunghiului se duce segmentul DE paralel cu baza, mărginit de laturile egale ale triunghiului isoscel. Se cere: înălţimea triunghiului ABC dusă din vîrful A şi lungimea laturii egale.

1526. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin(a+30^\circ)-\sin(a-30)}{\cos(a+60^\circ)+\cos(a-60^\circ)}+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

1527. Să se calculeze:

$$\frac{\frac{2}{5}-0{,}5:\frac{3}{4}+\frac{3}{2}:1{,}5}{(0{,}2)^3:(0{,}04)^2}-\frac{\frac{3}{5}:\frac{3}{1{,}4}+1}{\frac{0{,}8}{1{,}5}:\left(\frac{0{,}2}{0{,}01}\right)^2}$$

1528. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$xy(x+y)=6$$
$$x^3+y^3=9.$$

1529. Se dă un trapez isoscel ale cărui laturi sînt tangente unui cerc de rază 3,4 cm, perimetrul trapezului fiind de 34 cm. Să se calculeze laturile trapezului.

1530. Se dau două cercuri O şi O' de raze R şi r. Se duce tangenta comună AA' şi se roteşte figura în jurul liniei centrelor. Să se calculeze aria laterală a trunchiului de con format.

1531. În triunghiul ABC se dă unghiul $B = 48°30'$, unghiul $C = 73°20'$ şi latura $BC = 20$ cm. Folosind datele $\sin B = 0,749$ şi $\sin C = 0,958$. Să se calculeze $\sin A$ şi laturile AB şi AC.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MECANIZARE ŞI ELECTRIFICARE A AGRICULTURII, CRAIOVA, AUGUST 1954

1532. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E=\frac{\sin^3 a+\cos^3 a}{\sin a+\cos a}+\frac{\sin^3 a-\cos^3 a}{\sin a-\cos a}$$

1533. Să se afle la ce distanţă de centrul unei sfere cu raza R trebuie făcută o secţiune cu un plan, pentruca aria totală a calotei mici formate să fie de 7 ori mai mare decît aria sferei care are ca diametru distanţa de la centrul sferei date pînă la planul de secţiune?

1534. Se dă ecuaţia $(m-1)x^2-2mx+m+2=0$. Să se arate că nu are ambele sale rădăcini negative.

PROBLEME REZOLVATE

Problema E: 479

La centrul de colectare a grîului se transportă grîu de la depozitul Moara Grecilor la gara Vaslui. O echipă de 4 mașini făcînd cîte 5 drumuri pe zi, a transportat 32 tone grîu. Cîte vagoane de grîu vor transporta 9 mașini dacă acestea fac cîte 6 drumuri pe zi?

Stănescu Viorica

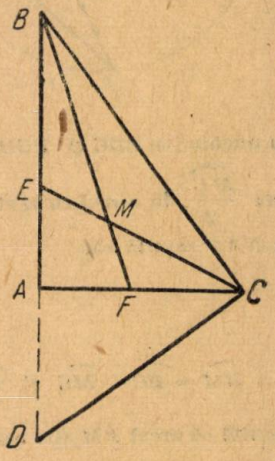
Soluție. Dacă 4 mașini făcînd cîte 5 drumuri pe zi transportă 3,2 vagoane de grîu, atunci o singură mașină făcînd numai un drum pe zi va transporta de 20 de ori mai puțin grîu, adică $\frac{3,2}{4 \times 5} = \frac{0,8}{5}$ vagoane. Nouă mașini făcînd cîte 6 drumuri pe zi vor transporta de 54 ori mai mult grîu, adică $\frac{0,8 \times 9 \times 6}{5} = \frac{43,2}{5} = 8,64$ vagoane de grîu.

Problema E: 508

Intr-un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendiculara în C pe BC întîlnește pe AB în D, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B și C se taie formînd un unghi de 45° și că segmentele CD și DE sînt egale.

C. I. Ț.

Soluție. Să demonstrăm că dreptele BF și CE se taie formînd un unghi de 45°. $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = \frac{90}{2} = 45°$ (deoarece $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 90°$, iar BF și CE sînt bisectoare). Unghiul CMF este exterior triunghiului MBC, deci egal cu $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = 45°$. Deci este egal cu $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = 45°$. Deci, bisectoarele BF și CE se taie formînd unghiul $CMF = \sphericalangle BME = 45°$.



Pentru a arăta că $CD = DE$ trebuie să demonstrăm că triunghiul DCE este isoscel cu unghiurile DEC și DCE egale.

$\sphericalangle DEC = 90° - \sphericalangle ACE$ (în triunghiul AEC);

$\sphericalangle DCE = 90° - \sphericalangle BCE = 90° - \sphericalangle ACE$.

Rezultă că unghiurile DEC și DCE sînt egale. Deci, triunghiul DEC este isoscel și $DE = DC$.

Problema E: 510

Suma a patru numere este 2037. Primul număr este 75% din al doilea. Al doilea este 30% din al treilea și al treilea este 68% din al patrulea. Care sînt aceste numere?

C. I. Ț.

Soluție. dată de eleva Cîmpu Demetra, București. — Notăm cu x, y z și u cele patru numere necunoscute și formăm sistemul:

$$x + y + z + u = 2037$$

$$x = \frac{75\,y}{100}\,;\quad y = \frac{30\,z}{100}\,;\quad z = \frac{68\,u}{100}\,.$$

Aflăm valorile lui x, y și z în funcție de u.

$$z = \frac{68\,u}{100} = \frac{17\,u}{25}\,;$$

$$y = \frac{3\,z}{10} = \frac{3}{10} \cdot \frac{17\,u}{25} = \frac{51\,u}{250}\,;\quad x = \frac{3\,y}{4} = \frac{153\,u}{1000}\,.$$

Înlocuim valorile lui x, y și z în prima ecuație,

$$\frac{153\,u}{1000} + \frac{51\,u}{250} + \frac{17\,u}{25} + u = 2037.$$

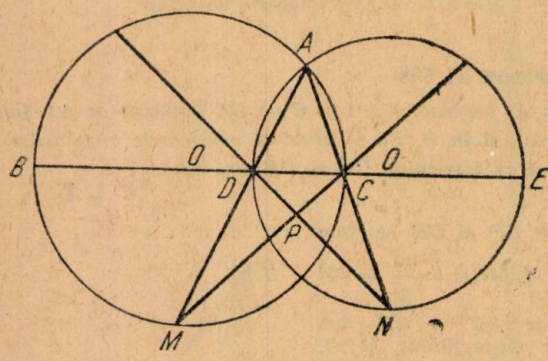
Aducem ecuația la același numitor și egalăm numărătorii.

$153\,u + 204\,u + 680\,u + 1000\,u = 2037 \cdot 1000$; $2037\,u = 2037 \cdot 1000$

de unde $u = \dfrac{2037 \times 1000}{2037} = 1000$

$$x = \frac{153 \times 1000}{1000} = 153\ ; \quad y = \frac{51 \times 1000}{250} = 204;\ z = 680.$$

Problema E: 511



Fie A unul din punctele de intersecție a două cercuri secante. Dreapta dusă prin cele două centre O și O' taie cercurile respectiv în B, C și D, E. Dreptele AD și AC taie cercurile respectiv în M și N; iar dreptele MC și ND se taie în punctul P. Să se demonstreze că PD = PC.

M. D. Zigulescu

Soluție. Pentru a arăta că $PD = PC$ trebuie să demonstrăm că triunghiul PDC este isoscel, cu unghiurile PDC și PCD egale. În cercul cu centrul în O măsura unghiului MAC este $\dfrac{\overset{\frown}{MC}}{2}$. În cercul cu centrul O', măsura unghiului NAD este $\dfrac{\overset{\frown}{ND}}{2}$. Deoarece $\sphericalangle MAC = \sphericalangle NAD$ rezultă că,

$$\frac{\overset{\frown}{MC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ND}}{2} \text{ sau } \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{ND}$$

$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{MC}$ și $\overset{\frown}{NE} = \overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{ND}$. Deoarece $\overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{ND}$ și $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE} = 180°$ rezultă că arcul BM este egal în grade cu arcul NE. Măsura unghiului $PDC = \dfrac{\overset{\frown}{NE}}{2}$. Măsura unghiului $PCD = \dfrac{\overset{\frown}{BM}}{2}$. Rezultă că $\sphericalangle PDC = \sphericalangle PCD$ deoarece au aceiași măsură.

Unghiurile PDC și PCD fiind egale, triunghiul PDC este isoscel și $PD = PC$.

Problema 1096

Să se găsească geometric rădăcinile sistemului:

$$by = a\sqrt{2}\,x$$

$$x + y = \sqrt{2\,a\,(a + b) + b^2}$$

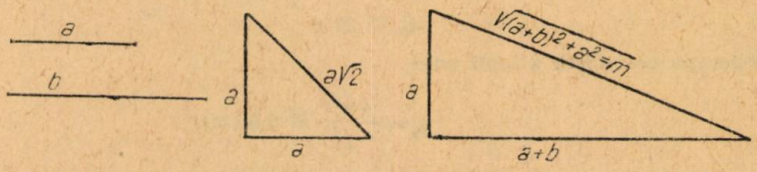
a și b fiind două segmente date.

Racoceanu Val., student, București

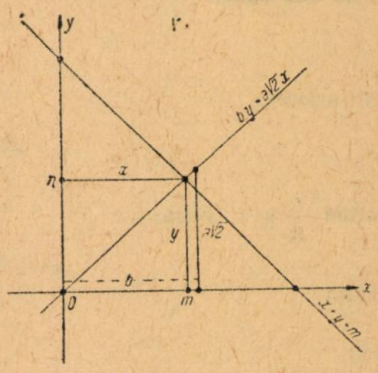
Soluție. Sistemul se poate scrie,

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{b}\, x$$

$$x + y = \sqrt{(a+b)^2 + a^2}$$



Ecuațiile sistemului reprezintă două drepte. Coordonatele punctului lor de intersecție sînt soluția sistemului. Iată mai jos construcțiile grafice necesare.



Problema 1015

1) *Cunoscînd accelerația gravitației la suprafața pămîntului* $g_0 = 981$ *cm/s*^{2}, *raza pămîntului* $R = 6370$ *km, să se determine accelerația gravitației la* 30 *km deasupra pămîntului.*

2) *Cunoscînd raza orbitei pămîntului* $R_1 = 150\,T \cdot 10^6$ *km, raza soarelui* $R_2 = 6 \cdot 10^5$ *km și perioada de revoluție* $T = 1$ *an a pămîntului în jurul soarelui, se cere să se calculeze accelerația în cădere liberă a corpurilor pe soare.*

3) *Știind că luna efectuează o rotație completă în jurul pămîntului în* 27 *zile și* 7 *ore, se cere raza orbitei lunii.*

* * *

Soluție. 1) Accelerația gravitației la altitudinea z este:

$$g_z = \frac{g_0 R^2}{(R+z)^2}.$$

Pentru $z = 30$ km:

$$g_z = \frac{981 \cdot \overline{6370}^2}{\overline{6400}^2}$$

$$g_z = 971{,}82 \text{ cm/s}^2.$$

2) Accelerația centripetă a pămîntului este:

$$G_{R_1} = \frac{v^2}{R_1} = \frac{\left(\frac{2\pi R_1}{T}\right)^2}{R_1} = \frac{4\pi^2 R_1}{T^2}. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, notînd cu G_0 accelerația liberă pe soare, avem:

$$G_{R_1} = \frac{G_0 R_2^2}{(R_2 + R_1)^2}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem:

$$G_0 = \frac{4\pi^2 R_1 (R_2 + R_1)^2}{R_2^2 T^2}$$

$$G_0 = \frac{4\pi^2 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot (6 \cdot 10^5 + 150 \cdot 10^6)^2}{(6 \cdot 10^5)^2 \cdot (365{,}25 \cdot 86400)^2}$$

$$G_0 \cong 27 \text{ g}$$

3) Acceleraţia centripetă a lunii este:

$$g_r = \frac{4\pi^2 r}{T_1^2} \cong 0{,}6 \text{ cm/s}^2$$

r fiind raza orbitei lunii iar T_1 perioada ei de rotaţie în jurul pământului:

$$T_1 = 27 \text{ zile } 7 \text{ ore} = 2\,358\,000 \text{ secunde}$$

Pe de altă parte:

$$g_r = \frac{g_0 R^2}{(R + r)^2}$$

Prin urmare:

$$\frac{g_0 T_1^2 R^2}{4\pi^2 r} = (R + r)^2$$

Notînd $\frac{r}{R} = x$, avem:

$$x^3 + 2x^2 + x = 2{,}1068 \cdot 10^5.$$

rezultă

$$x = 59{,}1$$

deci:

$$r \cong 60\ R.$$

Problema 1104

Să se calculeze energia elaborată la contopirea picăturilor mici de glicerină de rază $r = 5 \cdot 10^{-4}$ *mm într-o picătură de rază* $R = 5$ *mm.*

***

Soluţie dată de elevul **Dan I. Savin**, Cîmpulung Muscel. Fie n numărul picăturilor mici de glicerină care contopindu-se dau o picătură mare. Suprafaţa totală a tuturor picăturilor mici va fi:

$$S = 4\ \pi r^2 \cdot n\ .$$

Cum suprafaţa picăturii mari este $s = 4\pi\ R^2$ rezultă că datorită micşorării suprafeţei la contopirea picăturilor se produce o cantitate de energie:

$$\Delta W = (S - s)\,\alpha = 4\,\pi\,(r^2 \cdot n - R^2)\,\alpha \qquad 1)$$

în care α este constanta de tensiune superficială. Dar N se determină din egalitatea volumelor:

$$\frac{4\pi}{3} r^3\, n = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{de unde} \quad n = \frac{R^3}{r^3} \qquad (2)$$

Înlocuind (2) în (1) se găseşte

$$\Delta W = 4\pi R^2 \left(\frac{R}{r} - 1\right)\alpha \qquad (3)$$

Substituind în (3):

$$r = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}; \quad R = 5 \text{ mm și } \alpha = 65 \text{ dyne/cm}$$

se găsește:

$$\Delta W = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-2} (10^{-4} - 1) \cdot 65 = 2040796 \text{ ergi} \cong 0{,}2 \text{ jouli}.$$

Această energie se consumă prin încălzirea picăturilor

Observare. Această problemă propusă de Ioanin Brezeanu, se găsește în „Curs de Fizică Generală" de S.E. Friș și A. V. Timoreva, pag. 339, vol. I.

Problema 1105

Un berbec în greutate de $P = 100$ kg este ridicat la înălțimea de 1 metru. La ultima lovitură un pilon intră în pământ la o adîncime de 1 cm. Ce sarcină maximă în kg/cm² va suporta acest pilon fără a mai ceda considerînd că rezistența pământului față de mișcarea pilonului este constantă, că secțiunea pilonului, este de 15 dm², iar masa pilonului poate fi neglijată.

* * *

Soluție. Făcînd abstracție de căldura produsă prin izbirea ciocanului de pilon, întreaga energie cinetică a berbecului se transformă în lucru mecanic realizat prin pătrunderea pilonului în pământ. Deci se poate scrie:

$$\frac{1}{2} \frac{p}{g} V^2 = R \cdot h \qquad (1)$$

unde:

R = rezistența pământului în kg,
h = pătrunderea pilonului în pământ = 0,01 m,
V = viteza berbecului la ciocnire = $\sqrt{2\,g \cdot 1}$ m/sec,
P = greutatea berbecului = 100 kg.
Din (1) se poate scrie:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{9{,}81} \cdot \frac{2 \times 9{,}81}{0{,}01} = 10\,000 \text{ kg}.$$

Deci sarcina maximă ce poate fi suportată de pilon este:

$$p = \frac{R}{S} = \frac{10\,000}{1\,500} = 6{,}66 \text{ kg/cm}^2$$

Problema 1107

Care este raportul de transformare al unui transformator dacă în înfășurarea primară are $N_1 = 4490$ spire, iar în cea secundară dă o f.e.m. $E_2 = 1000$ v. Miezul de fier are o secțiune $S = 10$ cm² și o permeabilitate $\mu = 50$, iar cîmpul magnetic are o intensitate $H = 20$ oerstezi și o frecvență $f = 50$ per/s.

Fusaru George

Soluție. Raportul de transformare este $K = \frac{E_1}{E_2}$. Însă,

$$E_1 = 10^{-8} \omega \cdot B \cdot S \cdot N_1 \text{ volți} \qquad (1)$$

unde

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\,\pi\, s^{-1}$$
$$B = \mu H = 50 \cdot 20 = 100 \text{ gauși}.$$

Deci, înlocuind în (1) se găseşte:

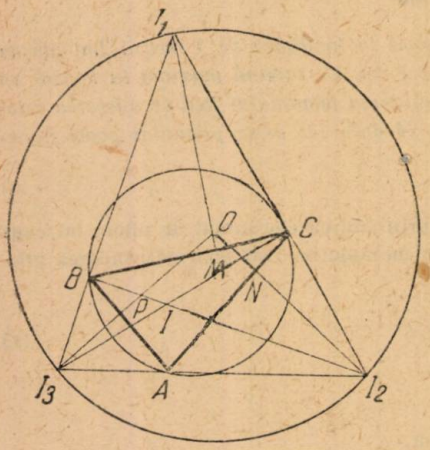
$$E_1 = 10^{-8} \cdot 3{,}14 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 4490 \cong 14{,}1 \text{ V}.$$

Rezultă că raportul de transformare este:

$$K = \frac{14{,}1}{1000} = 0{,}0141.$$

Problema 1129

Să se arate că dacă din cele 3 centre ale cercurilor exînscrise unui triunghi coborîm perpendiculare pe laturile respective, ele sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului format de aceste centre.



* * *

Soluţie. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor exînscrise.

I_1A, I_2B, I_3C sînt înălţimi în triunghiul $I_1I_2I_3$ iar ABC este triunghiul ortic.

Într-un triunghi razele cercului circumscris duse prin vîrfurile triunghiului sînt perpendiculare pe laturile triunghiului ortic. Deci, perpendiculare I_1M, I_2N, I_3P sînt razele cercului $I_1I_2I_3$.

Problema 1135

Într-un vas emisferic neted de rază $OC = x$ este aşezată o bară omogenă AB, de lungime $2a$ şi greutate P. Să se determine unghiul φ format de bară cu planul orizontal pentru poziţia de echilibru.

* * *

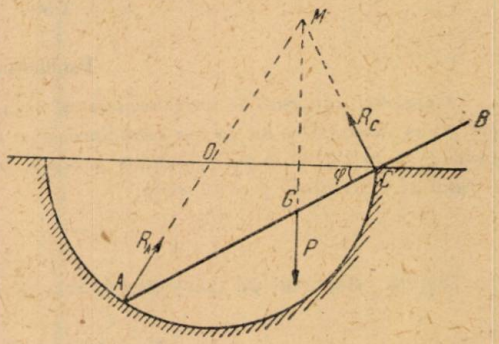
Soluţie dată de **Dan Savin** Cîmpulung Muscel. Vasul emisferic fiind neted, asupra barei AC vor lucra următoarele forţe:

P = greutatea barei orientată vertical în jos,

R_1 = reacţiunea emisferei asupra barei orientată radial,

R_c = reacţiunea emisferei asupra barei orientată perpendicular pe AB.

În poziţia de echilibru rezultanta celor 3 forţe este nulă şi pentru aceasta este necesar şi suficient ca ele să fie concurente. Fie M punctul de concurenţă. Se observă că triunghiul ACM este dreptunghic în C. Cum $\sphericalangle MAC = \sphericalangle OCA = \varphi$ rezultă că $AM = 2r$.



Însă,

$$AC = AG + GC = 2r\cos\varphi. \quad (1)$$

Din triunghiul dreptunghic GCM se poate scrie:

$$GC = MC \operatorname{tg}\varphi = 2r \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi$$

(căci $\sphericalangle GMC = \sphericalangle ACO = \varphi$).

Înlocuind în (1), $AC = a + 2r \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi = 2r\cos\varphi$, De unde $4r\cos^2\varphi - a\cos\varphi - 2r = 0$ care dă soluţiile,

$$\cos\varphi = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r};$$

Problema admite o singură soluţie căci soluţia negativă n-are semnificaţie în cazul problemei. Echilibrul este posibil în cazul $a + \sqrt{a^2 + 32r^2} \leqslant 8r$ adică $a \leqslant 2r$.

Soluţia II. Alegem ca axe de coordonate AB şi perpendiculara în G pe AB. Proiectînd pe cele două axe de coordonate se găseşte:

$$N_C - P\cos\varphi + N_A \sin\varphi = 0$$

$$N_A \cos\varphi - P\sin\varphi = 0.$$

Rezolvînd sistemul se găseşte:

$$N_A = P\,\mathrm{tg}\,\varphi;\ N_C = P\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} \tag{1}$$

Luînd momentele faţă de punctul G, se găseşte:

$$(2r\cos\varphi - a)\,N_C = a\sin\varphi\,N_A \tag{2}$$

Ţinînd seama de (1) relaţia (2) devine:

$$(2r\cos\varphi - a)\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = a\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

De unde: $4r\cos^2\varphi - a\cos\varphi - 2r = 0$ care conduce la aceeaşi soluţie.

Problema 1150

Să se calculeze suma:

$$S = 1\cdot C_1^1 + 2\left(C_1^2 + C_2^2\right) + 3\left(C_3^1 + C_3^2 + C_3^3\right) + \ldots + n\left(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right).$$

Gh. I. Bercea

Soluţie. Ţinem seamă de relaţia $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$ şi deducem,

$$S = 1\cdot(2^1 - 1) + 2\cdot(2^2 - 1) + \ldots + n(2^n - 1) =$$

$$= 2^1 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n - (1 + 2 + 3 + \ldots n)$$

Avem,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Să calculăm, suma:

$$S_1 = 2^1 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n.$$

Avem: $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

$2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2^2$

. . . . . .

$2^n = 2^{n+1} - 2.$

Adunăm şi obţinem,

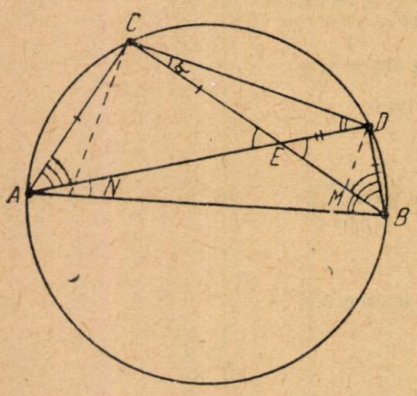
$$S_1 = n\cdot 2^{n+1} - (2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) = n\cdot 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = 2^{n+1}\cdot(n-1) + 2.$$

Deci,

$$S = 2^{n+1}(n-1) + 2 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Problema 1101

Se dă cercul de diametru AB şi în el o coardă CD egală cu latura patratului înscris M şi N fiind intersecţiile perpendicularelor ridicate în D şi C pe CD cu BC şi AD, iar E intersecţia lui AD cu BC, să se arate că



$$\frac{1}{ME}+\frac{1}{NE}+\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=2\left(\frac{1}{AE}+\frac{1}{BE}\right).$$

N. Păun, student, Bucureşti

Soluţie. Întrucît $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DBE = \sphericalangle CAD = 45°$ vom avea $AC = CE$, $BD = ED$. Notăm $\sphericalangle BCD = \alpha$; vom avea

$$\frac{ME}{CE}=\frac{MD}{NC}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(45-\alpha)};$$

$$\frac{NE}{ED}=\frac{NC}{MD}=\frac{\operatorname{tg}(45°-\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha};\quad AD=\frac{DE}{\operatorname{tg}\alpha};\quad BC=\frac{CE}{\operatorname{tg}(45-\alpha)};$$

Mai avem

$$\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{AB}{CD}=\sqrt{2}\quad\text{şi}\quad\frac{CE}{DE}=\frac{\sin(45°-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Relaţia din enunţ se verifică imediat.

PROBLEME PROPUSE

1535. Să se construiască un trapez căruia i se cunosc unghiurile dela bază şi lungimile diagonalelor.

H. Hamzin (Steriltamak) — «Matematica v şcole»

1536. Se dă ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ şi se cere: să se găsească relaţia de condiţie pe care trebuie să o îndeplinească coeficienţii ecuaţiei în aşa fel ca rădăcinile ei să verifice egalitatea $\frac{\sqrt{1+x_1}}{\sqrt{1+x_2}}+\frac{\sqrt{1+x_2}}{\sqrt{1+x_1}}=1.$

Stelian D. Mărculescu, O. Stalin

1537. O lampă electrică cu filament de wolfram este calculată pentru 220 V şi consumă o putere de 40 W. Să se determine lungimea filamentului acestei lămpi, dacă diametrul filamentului este de 0,01, mm. Temperatura absolută a filamentului la funcţionarea lămpii este de 2700°. Rezistivitatea wolframului la 0°C este $\rho_0 = 5\cdot10^{-6}$ ohmi. cm şi creşte proporţional cu temperatura absolută a filamentului.

* * *

1538. Cîte lămpi electrice conectate în paralel, calculate pentru 100 V şi avînd puterea de 55 W fiecare, pot arde la incandescenţă deplină cînd sînt alimentate de la o baterie de acumulatori cu forţa electromotoare $E = 120$ V şi rezistenţa interioară $r = 10$ ohmi?

* * *

1539. Să se afle valorile pozitive ale lui x mai mici ca 720° pentru care avem:

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{2(1 + \sec x)} = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}.$$

De asemenea, pentru care avem:

$$\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} + \sqrt{2(1 + \sec x)} = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$$

radicalii fiind socotiți cantități reale și pozitive.

C. Ionescu-Țiu

1540. Într-o instalație specială de laborator se încălzesc 10 kg ghiață, de la temperatura de — 50°C pînă se transformă în apă la temperatura de + 25°C. Să se afle cantitatea de combustibil necesar pentru această încălzire, respectiv de benzină, turbă sau ulei mineral.

Tiberiu Colibaba, elev, Galați

1541. Într-un punct M de pe glob, Steaua Polară se vede sub un unghi de 45° față de orizont, iar într-un punct N, sub un unghi de 60°. Care punct e mai la Nord? Care este distanța dintre cele două puncte, ele fiind situate pe același meridian?

I. Mihăilă, absolvent, Roman

1542. Ce condiții trebuie să îndeplinească parametrul a pentru ca rădăcinile ecuației

$$x^2 - (a^2 - 5)x + 4(a + 2) = 0$$

să fie cuprinse între -1 și $+1$.

N. C. Ciomu

1543. Se consideră în spațiu, paralelogramele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor AA_1, BB_1, CC_1 și DD_1 sînt vîrfurile unui alt paralelogram.

* * *

1544. Să se arate că:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \geqslant 6\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

unde A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi oarecare.

Gh. I. Bercea

1545. Un înnotător vrea să traverseze Someșul, care este lat de 270 m. El se îndreaptă perpendicular pe malul Someșului și dacă apa ar fi liniștită el ar înainta cu o viteză de 20 m/minut. Apa îl antrenează însă, cu o viteză de 25 m/minut. După cît timp și în ce loc va ajunge el pe celălalt mal?

Octavian Chilințan, elev, Satu Mare

1546. Cîte acumulatoare cu forța electromotoare de $2V$ și rezistența interioară de 0,2 ohmi trebuie conectate în serie pentru a obține în circuitul exterior curentul $I = 5A$ la o diferență de potențial la bornele bateriei $V = 110$ volți?

* * *

1547. La sfîrșitul articolului său «Degajarea căldurii în conductoare», Academicianul Lenz a pus următoarea problemă: «Pentru încălzirea pînă la încandescență a unei sîrme de un anumit diametru și lungime l este necesar un circuit din n elemente; cîte asemenea elemente sînt necesare pentru încălzirea pînă la incandescență a unei sîrme de același diametru însă de lungime pl?»

Conectarea elementelor în ambele cazuri se face în serie. Rezolvați problema lui Lenz.

* * *

1548. Fie M mijlocul unui segment AB. Se duce un cerc tangent segmentului AB în punctul M. O secantă dusă din A taie cercul în punctele C şi D; iar o secantă oarecare dusă din B taie cercul în punctele E şi F. Dreptele CF şi DE taie dreapta AB respectiv în punctele G şi H. Să se demonstreze că $AG = BH$.

* * *

1549. Unui paralelipiped dreptunghic cu baza $ABCD$ şi muchiile laterale AA', BB', CC', DD', i se duce diagonala mare $A'C$. Să se arate cum se construieşte perpendiculara comună dreptelor $A'C$ şi AD, apoi să se calculeze lungimea distanţei minime între $A'C$ şi AD în funcţie de muchiile paralelipipedului.

C. I. Ţ.

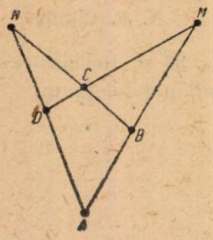
1550. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\log_m x + \log_n y = a$$
$$\log_n x + \log_m y = b.$$

Simon St. Petre

1551. Dacă într-un trunghi de piramidă $A_1 A_2 A_3 A_1' A_2' A_3'$ notăm cu A_1'', A_2'', A_3'' respectiv mijloacele laturilor $A_2' A_3'$, $A_3' A_1'$, $A_1' A_2'$ ale bazei $A_1' A_2' A_3'$ atunci dreptele $A_1 A_1''$, $A_2 A_2''$ şi $A_3 A_3''$ sînt concurente.

Şerb Gabriel Adrian, elev, Piteşti



1552. Să se arate că într-un patrulater complet $ABCDMN$ există relaţia

$$\frac{MA \cdot MC}{MB \cdot MD} = \frac{NA \cdot NC}{NB \cdot DN}.$$

Mihail I. Popescu, student, Bucureşti

1553. Să se demonstreze că raportul lungimii imaginii pe care o dă o oglindă concavă faţă de lungimea obiectului este egală cu raportul distanţelor pînă la oglindă.

* * *

1554. O lentilă convexă dă pe un ecran imaginea unei lămpi mărită de două ori. Cînd lentila a fost deplasată cu 36 cm mai aproape de ecran, ea a dat o imagină de două ori mai mică. Să se afle distanţa focală a lentilei?

* * *

1555. Să se rezolve ecuaţia $\operatorname{tg}^2 2x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x$.

Emanuel Cocoş, student, Bucureşti

1556. Se dă o piramidă exagonală regulată cu latura bazei a şi înălţimea h. Se taie această piramidă cu un plan ce trece printr-o latură a bazei şi prin centrul de greutate al feţei laterale opuse.

a) Să se calculeze volumul priamidei care are ca bază secţiunea dată de acest plan şi şi ca vîrf, vîrful piramidei date.

b) Care este expresia acestui volum cînd unghiul diedru format de planul de secţiune cu planul bazei piramidei date este de 30°C?

Cornel Georgescu, Craiova

1557. Cît timp rămîne Soarele, ziua, deasupra orizontului unui loc de latitudine λ, unde declinaţia sa este D. Discuţie.

Stelian Toma, elev, Roman

1558. În triunghiul oarecare ABC bisectoarele BE şi CF taie mediana AD în punctele M şi N. Să se arate că $\frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} > 2$.

Radu Stroe, elev, Ploeşti

1559. Ştiindu-se că nucleul izotopului $^{213}_{84}P_0$ emite o particulă α, iar nucleul ce formează emite o particulă e^- (electron), se cere să se formeze schemele de dezintegrare şi să se calculeze energiile particulei α şi e^-.

Claudiu Orşivschi

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E: 591. Să se demonstreze că patratul unui număr mai mare decît unitatea este un multiplu de 8 mărit cu 1.

(« Olimpiada Matematică », Moscova, 1953)

E: 592. Să se arate că:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

* * *

E: 593. Pentru a hrăni 12 cai şi 20 vaci se dădeau 250 kg fîn pe zi. Mărindu-se raţia de fîn pentru cai cu 25 % şi pentru vaci cu 20 % s-au dat cîte 306 kg fîn. Cîte kg de fîn se dădeau la început pentru un cal şi cîte pentru o vacă? Să se mai calculeze cu cîte procente se dădeau mai puţin la început faţă de raţia ultimă de fiecare cal şi cîte de fiecare vacă?

* * *

E: 594. Un turist pleacă dintr-un sat la o staţie de cale ferată. După ce a parcurs într-o oră 3 km, constată că va întîrzia la gară cu 40 minute dacă va merge cu aceiaşi viteză. Deaceea restul drumului îl parcurge cu 4 km pe oră şi ajunge la gară cu 45 minute înainte de plecarea trenului. Care este distanţa dintre sat şi gară?

(« Olimpiada Matematică », Moscova, 1953)

E: 595. Să se afle două numere ştiind suma lor 168 si cel mai mare divizor comun este 24.

(« Olimpiada Matematică », Moscova, 1953)

E: 596. Pentru încălzirea vagonului unui tren electric, curentul trebuie să dea pe oră 2500 calorii mari. Tensiunea reţelei este de 210 volţi. Ce intensitate de curent este necesară pentru încălzire? Care este mărimea rezistenţei electrice a acestui aparat de încălzire?

* * *

*) Repartizarea pe clase: V (593, 594, 601, 608, 609), VI (591, 592, 600, 602, 603, 604), VII (594, 596, 597, 958, 599, 605, 606, 607).

E: 597 .Să se arate că:

$$\frac{1-\left(1-\dfrac{1-x}{1+x}\right):\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{1+\left(1-\dfrac{1-x}{1+x}\right):\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)}=\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=1.$$

C. I. Ţ.

E: 598. Să se arate că:

$$\frac{x(y-z)^2}{(y-zx)(z-xy)}+\frac{y(z-x)^2}{(z-xy)(x-yz)}+\frac{z(x-y)^2}{(x-yz)(y-zx)}+2=$$

$$=\frac{2(1-x)(1-y)(1-z)xyz}{(x-yz)(y-zx)(z-xy)}.$$

C. I. Ţ.

E: 599. Se dă un unghi AOB şi pe latura OB a unghiului un punct M. N fiind un punct pe latura AO a unghiului să se găsească numai cu compasul şi rigla, poziţia acestui punct. ştiind că $\sphericalangle ONM = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$.

Dan I. Iordache, elev, Constanţa

E: 600. Să se arate că:

$$\left(b+c-\frac{bc}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(c+a-\frac{ca}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\left(a+b-\frac{ab}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=6$$

$$\left(b+c+\frac{bc}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(a-c-\frac{ac}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(a-b-\frac{ab}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=6.$$

I. I. Cristea, elev, Constanţa

E: 601. Pentru fabricarea porţelanului se iau 24 părţi argilă albă, 2 părţi nisip, o parte gips şi 17 părţi apă, socotite în greutate. Cît trebuie luat din fiecare pentru a realiza 132 kg amestec din care s-ar face porţelan?

* * *

E: 602. Să se arate că:

$$[(a+b)^3-(a-b)^3]\cdot[(a+b)^2-(a-b)^2]=$$
$$=8ab^2[(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2].$$

Ioan A. Rus, elev, Oradea

E: 603. Cinci muncitori trebuiau să execute 210 piese lucrînd fiecare acelaşi număr de piese. Dacă fiecare a lucrat în plus cîte 32 piese, se întreabă cîte piese au executat în total trei muncitori? Cu ce procent au depăşit norma?

* * *

E: 604. Un ceas indică ora 4. După cîte minute minutarul va ajunge acul care arată orele?

(« Olimpiada Matematică » din Moscova, 1953)

E: 605. Să se arate că:

$$(x-2)^4 + 10(x-2)^3 + 38(x-2)^2 + 68(x-2) + 57 = \frac{x^5 - 2x^2 + x - 18}{x-2}.$$

* * *

E: 606. Pentru un aparat de radio este necesar să construim un reostat calculat la 25 ohmi. Ce grosime trebuie luată pentru o sîrmă de nichelină lungă de 4 metri necesară în construirea reostatului? Dar dacă sîrma este de cupru?

* * *

E: 607. Să se verifice identitatea:

$$(a+b)^3(x+y)^3 - (ax+by)^3 - (bx+ay)^3 =$$
$$3(a+b)(x+y)(ax+by)(bx+ay).$$

Adrian G. Şerb, elev, Piteşti

E: 608. O unitate de pionieri comandă 26 cravate şi 31 insigne care costă împreună 83 lei, iar altă unitate comandă 52 cravate şi 38 insigne, în valoare de 142 lei. Cît costă o cravată şi cît costă o insignă de pionier?

M. Stoica, Panciu

E: 609. Pionierul A este cu 80 paşi înaintea pionierului B. El face 5 paşi în timp ce pionierul B face 4 paşi; dar 3 paşi ai pionierului B fac cît 4 paşi ai pionierului A. Ştiind că pionierul B face 84 paşi pe minut, după cît timp îl va ajunge pe A?

Gh. C. Grosu, Botoşani

DIN EXPERIENŢA CERCULUI DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ AL ELEVILOR DIN CAPITALĂ

De cinci ani, funcţionează cercul de matematică şi cercul de fizică, pe lîngă Facultatea de Matematică şi Fizică a Universităţii «C. I. Parhon» din Bucureşti.

Aceste cercuri pe oraş au fost create la noi pentru elevii fruntaşi, după exemplul şcoalei sovietice; la început, ele au luat fiinţă în principalele oraşe din ţară: Bucureşti, Iaşi, Cluj, Craiova, Ploieşti, Oraşul Stalin; apoi în mai toate oraşele unde Societatea are filiale.

Menirea lor este de a întruni pe elevii fruntaşi la matematică şi fizică din oraşul respectiv şi de a-i ajuta să-şi însuşească cunoştinţe mai multe şi să aprofundeze unele probleme mai importante care se predau în învăţămîntul mediu. La rîndul lor, participanţii la aceste cercuri determină prin exemplul lor şi pe alţi elevi să îndrăgească studiul fizicii şi matematicii.

În cele ce urmează vom arăta cum s-a desfăşurat în anul 1953—54 munca la cercul de fizică pe Capitală, precum şi îmbunătăţirile care sînt necesare.

Prin grija Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. s-a întocmit un plan de activitate pe întregul an şcolar. În afară de profesorii de specialitate din diferite licee, un sprijin preţios au dat şi unii membri ai corpului didactic universitar.

Mobilizarea elevilor la acest cerc şi întreţinerea spiritului de colaborare şi disciplină a constituit o preocupare permanentă a U.T.M-ului.

Activitatea cercului poate fi împărţită în două etape: prima de la 18 octombrie 1953 pînă la 1 ianuarie 1954, cuprinde 10 şedinţe; a doua, de la 1 ianuarie 1954 pînă la 15 mai 1954, cuprinde 15 şedinţe. Fiecare etapă a fost încheiată cu o şedinţă de analiza muncii.

Subiectele conferinţelor ţinute la şedinţe au fost alese din diferite domenii ale fizicii; le menţionăm mai jos în ordinea în care au fost ţinute:

— Unele aplicaţii ale opticii în tehnică.
— Sisteme, unităţi de măsură, transformări de unităţi în fizică,
— Aerodinamica,
— Energia cinetico-moleculară a gazelor,
— Temperaturi joase, proprietăţile materiei la aceste temperaturi,
— Presiuni foarte înalte şi foarte joase,

d) Îndreptăm luneta aşezată în aer liber sau într-o cameră cu fereastra deschisă spre un obiect foarte îndepărtat, «ţintindu-l». Privind cu ochiul foarte apropiat de ocular tragem uşor înapoi tubul ocularului pînă cînd treptat, treptat imaginea, neclară la început, devine foarte clară, mărită, apropiată, răsturnată şi colorată pe margini, din cauza aberaţiilor cromatice. Putem reduce considerabil aceste aberaţii fără a pierde prea mult din luminozitatea obiectivului prin interpunerea în faţa lentilei a unui obiectiv, iar sub arcul de siguranţă o diafragmă de carton înnegrit, cu deschiderea de cca 25 mm. Introducerea diafragmei pe lîngă faptul că va reduce mult aberaţia cromatică, va contribui şi la îmbunătăţirea efectului stereoscopic al imaginilor observate.

Punerea la punct definitivă a lunetei se face prin observaţii asupra Lunei, mai ales la pătrare, marcînd definitiv — pentru comoditate — locul pînă unde trebuie tras tubul ocularului spre exterior pentru a se obţine imagini clare.

După montarea ei definitivă, luneta se vopseşte, pentru impermeabilizare şi aspect mai frumos, cu un lac sicativ alb, care se aplică în mai multe straturi, lăsînd de fiecare dată să se usuce bine în aer liber.

Stativul lunetei

Acesta rămîne la aprecierea constructorului. Cu putină îndemînare se poate construi capul model de stativ tripied. Pentru a fi posibile şi observaţiile în picioare, tija port-lunetă arătată în figură, trebuie să aibă lungimea de 1100 mm şi diametrul de 20 mm, iar picioarele, cca 1200 mm fiecare. Cubul de fixare a tripiedului are trei şuruburi fluture, pentru fixarea picioarelor lunetei, şi un şurub fluture mai mare, aplicat pe a patra faţă verticală a cubului, care pătrunde cu filetul pînă la tija port-lunetă, pe care o poate fixa la înălţimea dorită prin înşurubare. Alte amănunte se pot găsi în revista «Ştiinţă şi Tehnică», nr. 9, din septembrie 1953, de unde s-au luat multe date în ce priveşte procedeul de construire a lunetei descrise mai sus.

Caracteristicile optice

Ştiind că puterea de mărire a unei lunete este egală ca valoare numerică cu produsul dintre puterea de mărire a obiectivului şi aceea a ocularului, putem calcula uşor puterea de mărire a lunetei construite.

a) *Puterea de mărire a obiectivului lunetei* $G_1 = \frac{F}{25} = \frac{80}{25}$ (unde 25 cm este distanţa normală a vederii clare).

b) *Puterea de mărire a ocularului*: $G_2 = 15\ \times$ (dat de I.O.R.).

c) *Puterea de mărire a lunetei*: $G = G_1 \cdot G_2 = \frac{80}{25} \cdot 15 = 48\ \times$.

Rezultate

1. Confecţionarea lunetei cu ajutorul elevilor, la cercul de fizică, a prilejuit discuţii în legătură cu construcţia instrumentelor optice, calculul ocularelor compuse, al aberaţiilor lentilelor şi mijloacelor pentru eliminarea lor. Ar fi mai necesar un obiectiv acromatic, cu distanţa focală de 1 m şi deschiderea cît mai mare, pentru a se evita necesitatea diafragmării excesivă a lunetei.

2. Folosirea lunetei în cadrul orelor de astronomie a trezit interesul elevilor din clasele a X-a pentru această disciplină, dîndu-le posibilitatea de a observa destul de bine, următoarele corpuri cereşti: luna cu toate aspectele reliefului ei,

petele şi faculele solare, planeta Jupiter cu patru dintre sateliţii săi, planeta Saturn cu inelul său, nebuloasele din constelaţiile Orion şi Andromeda, stele duble, pleiade de stele şi eclipsa parţială de soare din 30 iunie 1954.

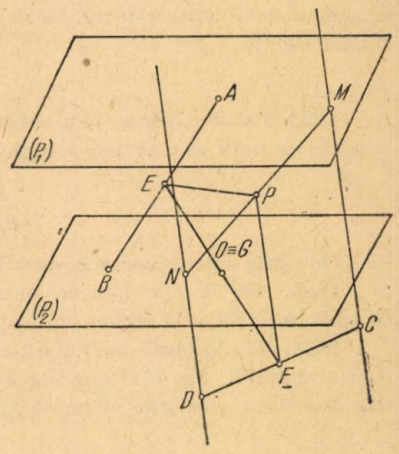
3. Confecţionată în şcolile de la ţară ea ar constitui un mijloc preţios pentru răspîndirea ştiinţei în masele de la sate şi totodată un mijloc eficace de luptă contra superstiţiilor.

NOTE MATEMATICE

O EXTINDERE ÎN SPAŢIU A PROBLEMEI 1215

Fie A, B, C, D patru puncte fixe ale spaţiului, iar (P_1) şi (P_2) două plane paralele ce trec respectiv prin A şi B.

Proiecţiile lui C şi D respectiv pe (P_1) şi (P_2) le notăm cu M şi N. Locul geometric al mijlocului P al segmentului MN este sfera de diametru EF, E şi F fiind mijloacele segmentelor AB şi CD. Segmentul FP fiind determinat de mijloacele laturilor neparalele ale trapezului $MNDC$, rezultă că este paralel cu bazele şi prin urmare perpendicular pe planele (P_1) şi (P_2).



Deasemenea, se observă că punctele E şi P se găsesc egal depărtate de planele (P_1) şi (P_2).

Deci dreapta EP este paralelă acestor plane (fig.). De aci deducem că segmentul EF se vede din P sub un unghi drept, deci se găseşte pe sfera de diametrul EF.

În cazul cînd punctele A, B, C, D sînt coplanare şi în locul planelor (P_1) şi (P_2) considerăm dreptele paralele (Δ_1) şi (Δ_2) trecînd prin A şi B şi aparţinînd planului $ABCD$ regăsim enunţul problemei 1215, cu soluţia în G.M.F—B., anul VI, nr. 1.

Observare. — a) Centrul O al sferei loc geometric coincide cu centrul de greutate G al tetraedrului $ABCD$.

b) În cazul mai general, cînd P se găseşte pe MN astfel încît $\frac{MP}{PN} = k$, locul lui P este sfera de diametru $E'F'$; E' şi F' fiind două puncte situate respectiv pe AB şi CD, astfel încît avem satisfăcute relaţiile

$$\frac{AE'}{E'B} = \frac{CF'}{F'D} = k.$$

Mihail I. Popescu, student, Bucureşti

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEME DATE LA ADMITERE ÎN ACADEMIA TEHNICĂ MILITARĂ, BUCUREŞTI IULIE 1955

(Toate chestiunile obligatorii. Pentru fiecare obiect durata de lucru 3 ore).

Algebră

1829. Să se demonstreze că discriminantul ecuaţiei:

$$ax^2 + bx + c + m(a'x^2 + b'x + c') = 0$$

este patrat perfect dacă ecuaţiile:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

au o rădăcină comună.

1830. Să se determine parametrul a, astfel încît ecuaţiile:

$$x^2 + ax + 1 = 0$$
$$x^2 + x + a = 0$$

să aibă o rădăcină comună. Să se afle rădăcinile lor în acest caz.

1831. Într-o progresie geometrică de şase termeni, suma extremilor este 33, iar suma termenilor dela mijloc este 12. Să se determine progresia şi să se arate că problema are o singură soluţie.

Geometrie

1832. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy se ia un punct fix A. O dreaptă oarecare ce trece prin A taie laturile lui în M şi N. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{K}$$

Care este interpretarea geometrică a constantei K.

1833. Să se afle laturile unui triunghi dreptunghic, ştiind că ariile laterale ale conurilor formate prin rotirea lui în jurul catetelor sînt de 20 m² şi 15 m².

1834. Se consideră două puncte fixe A şi B şi un punct fix P situat pe prelungirea segmentului AB. Fie PT tangenta dusă din P la un cerc oarecare ce trece prin A şi B. Care este locul geometric al punctului T?

Trigonometrie

1835. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

1836. Pentru a ajunge în vîrful muntelui AB merg mai întîi pe cărarea CD egală cu 1.000 m şi care face un unghi $d°$ cu orizontala; apoi pe cărarea $DA = CD = 1000$ m, care fac cu orizontala un unghi 2 d°. Ştiind că $CB = 500(1+\sqrt{3})$ metri să se afle: *a)* unghiul d°; *b)* înălţimea muntelui AB, unghiul ABC se află într-un plan vertical.

(Nu se vor folosi formularele)

1837. Să se demonstreze că orice triunghi în care există relaţia

$$\operatorname{tg} B = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)}$$

este dreptunghic.

Fizică

— Energia şi puterea curentului. Legea lui Joule-Lenz.

— Lentile optice. Construcţia imaginilor. Formula lentilelor.

1838. Un corp cu masa $m = 200$ kg este lăsat să cadă liber de la înălțimea $H = 490$ m. Se cere:

a) Energia potențială a corpului în punctul inițial.

b) Viteza lui finală.

c) Timpul de cădere.

d) Energia mecanică pe care o are la înălțimea $h = 100$ m.

PROBLEME DATE LA EXAMENUL DE ADMITERE ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI, AUGUST 1955

1839. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$x + y + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y}$$
$$x^4 + y^4 = 2m^2$$

apoi să se determine m astfel încît notînd cu P produsul valorilor lui x, să avem:

$$\frac{3P}{m+1} < 4(3-m)$$

1840. Pe un plan orizontal (H) se așează o sferă de rază R_1 și un con cu raza bazei R_2 și înălțimea $2R_1$.

a) La ce distanță x de planul (H) trebuie dus un plan P paralel cu planul (H), astfel ca secțiunile în sferă și în con să fie egale? Caz particular $R_1 = R_2$.

b) La ce distanță x de planul (H) trebuie dus un plan P pentru ca aria calotei determinată în sferă să fie egală cu aria laterală a trunchiului de con determinat în con? Caz particular $R_1 = R_2$.

1841. Știind că:

$$\frac{\sin(x+z)}{\sin(y-z)} = m \quad ; \quad \frac{\cos(x-z)}{\cos(y+z)} = n$$

în care m și n sînt constante date, să se arate că:

$$\frac{\cos 2z}{\cos(x-y)} = \frac{m+n}{mn+1}$$

1842. Calculul numeric. Să se calculeze expresia:

$$A = \frac{0{,}65 : \left(\frac{3}{5} \times 1{,}49\right)}{0{,}75 - \frac{1}{28}} + \frac{\left(1{,}03 - \frac{8}{15}\right) : \frac{3}{7}}{\left(6\frac{4}{3} - 2\frac{1}{5}\right) \times 3\frac{6}{11}} + \frac{\left(1{,}2 \times 0{,}37\right) : \frac{4}{5}}{11{,}6 - \frac{1}{3}}$$

DIN PROBLEMELE DATE LA EXAMENUL DE ADMITERE ÎN INSTITUTUL DE CONSTRUCȚII BUCUREȘTI, AUGUST 1955

1843. Să se simplifice expresia următoare $(a > 0)$:

$$E = \frac{a^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-\sqrt{a}} + a + \frac{a}{1+\sqrt{a}} + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^2} + \cdots}{\frac{a+3}{a^2+2a-3} + \frac{2-2a}{a^2+2a+1}}$$

1844. În triunghiul ABC oarecare se coboară din A înălțimea AD, iar din D se coboară perpendiculara DE pe AB. Să se calculeze ariile triunghiurilor AED și BED în funcție de AB și AD.

PROBLEME DATE LA EXAMENUL II DE ADMITERE ÎN FACULTATEA DE FIZICO-MATEMATICI BUCUREȘTI, AUGUST 1955

1845. Să se verifice identitatea:

a) $(1 - \cos a \cos b)^2 - \sin a \sin b = (\cos a - \cos b)^2$

apoi să se rezolve ecuația:

a) $x^2 \sin^2 b - 2x(1 - \cos a \cos b) + \sin^2 c = 0$

b) x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației de mai sus să se calculeze

$$E = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$$

1846. Să se înscrie într-un cerc de rază R un triunghi isoscel care are suma bazei cu a înălțimii l. Să se discute rezultatul arătîndu-se cazul de posibilitate a problemei și numărul soluțiilor. Să se construiască grafic soluțiile.

1847. Să se rezolve sistemul:

$$(x + y - xy)(x^2 + y^2 + 2xy - x^2y^2) = 5$$
$$(x + y + xy)(x^2 + y^2 + 2xy + x^2y^2) = 65$$

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1398

Se descompun 0,87 *grame de* MnO_2 cu HCl *concentrat la cald. Clorul ce se degajă este prins într-o eprubetă plină cu o soluție concentrată de amoniac și se prinde* 55,8 cm^3 *gaz măsurat la* 0° *și* 760 *mm. Se cere procentajul de* MnO_2 *pur din bioxid de mangan întrebuințat.* Mn=55; O=16; N = 14; Cl = 35,5. *Volumul molecular* = 22,32 l.

Willy Paraschiv, student, București

Soluție. — Reacția dintre HCl și MnO_2 este exprimată prin ecuația:

$$MnO_2 + 4HCl = 2H_2O + MnCl_2 + 2Cl \qquad (1)$$

Clorul împreună cu amoniacul dă

$$4NH_3 + 3Cl = N + 3NH_4Cl \qquad (2)$$

Relația (2) arată că la 55 g corespund $3 \times 55,8 = 167,4$ cm^3 clor în greutate de $\frac{71 \times 167,4}{22\,320}$ grame. Relația (1) arată că la 71 grame clor corespund 87 grame MnO_2, deci la $\frac{71 \times 167,4}{22\,320}$ grame clor corespund $\frac{87}{71} \cdot \frac{71 \times 167,4}{22\,320} = 0,6525$ grame de MnO_2.

Procentul de MnO_2 pur va fi $\frac{0,6525}{0,87}\,100 = 75\%$.

Problema 1399

În ciocnirea elastică dintre un foton incident și un electron, fotonul este difuzat în direcția θ *și electronul deviat cu viteza* v. *Să se afle lungimea de undă a razei incidente (fotonul incident) și lungimea de undă a razei difuzate (fotonul difuzat). Se consideră cunoscute* m, h, c.

S. V. Ionescu, elev, Pitești

Soluție. — Fotonul incident fiind absorbit de atom o parte din energia sa servește să dea o energie cinetică $\frac{mv^2}{2}$ electronului ciocnit, iar restul este difuzat în direcția θ, dar cu o energie mai mică, deci cu o frecvență mai mică $\gamma < \gamma_0$ și cu o lungime de undă mai mare, $\lambda > \lambda_0$. Aceasta ciocnire se supune legilor de conservare a energiei.

$$h\gamma_0 = h\nu + \frac{mv^2}{2} \quad \text{sau} \quad h(\gamma_0 - \gamma) = \frac{mv^2}{2}. \tag{1}$$

Se știe că

$$\gamma_0 = \frac{c}{\lambda_0}; \quad \gamma = \frac{c}{\lambda};$$

Scăzînd aceste relații avem,

$$\Delta\gamma = \gamma_0 - \gamma = \frac{c(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0\lambda}.$$

Înlocuind $\Delta\gamma$ în (1) avem

$$\frac{ch(\lambda - \lambda_0)}{\lambda\lambda_0} = \frac{mv^2}{2}; \quad \text{sau} \quad \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0} = \frac{mv^2}{2ch}. \tag{2}$$

În același timp cantitatea cu care variază λ adică $\lambda - \lambda_0$ depinde de unghiul θ dintre raza incidentă și cea difuzată.

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{a}$$

Înlocuind $\Delta\lambda$ (în (2) obținem

$$\lambda\lambda_0 = \frac{4h^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m^2v^2}. \tag{b}$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (a) și (b) avem

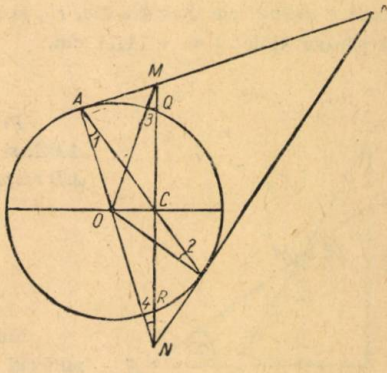
$$\lambda = \frac{h}{m}\left[\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{c} \pm \sqrt{\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{c^2} + \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{v^2}}\right]$$

$$\lambda_0 = \frac{h}{m}\left[-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{c} \pm \sqrt{\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{c^2} + \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{v^2}}\right].$$

Problema 1418

Să se arate că două tangente la un cerc și coarda de contact împart în două părți egale perpendiculara dusă dintr-un punct oarecare al coardei de contact pe diametrul ce trece prin acel punct.

* * *



Soluție. Patrulaterul $OAMC$ este inscriptibil deoarece $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OCM = 90°$. În consecință $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OMC$.

Patrulaterul $OCBN$ este inscriptibil deoarece $\sphericalangle OCN = \sphericalangle OBN = 90°$ (avînd ON diametrul cercului circumscris). Deci $\sphericalangle ONC = \sphericalangle OBC$. Dar în triunghiul OAB, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC$. Rezultă că triunghiul OMN este isoscel, iar înălțimea OC este mediana laturei MN. Deci $CM = CN$.

Observație. Deoarece $CM = CN$ rezultă că $MQ = NR$, fiindcă $CQ = CR$ ca jumătăți ale coardei QR. Se mai observă că punctul C este centrul cercului circumscris triunghiului AMN.

Problema 1441

Un generator de curent avînd f. e. m. de 240 volți și rezistența interioară de 0,5 ohmi, alimentează cu curent 15 lămpi, fiecare cu rezistența de 150 ohmi, și 5 lămpi, fiecare cu rezistența de 200 ohmi.

Știind că lămpile sînt conectate în paralel și rezistența firelor conducătoare de curent este 3,5 ohmi, să se afle intensitatea curentului furnizat de generatori, tensiunea sub care se găsesc lămpile și intensitatea curentului în fiecare lampă.

D. M. Zigulescu, R. Vîlcea

Soluție. — Rezistența totală a lămpilor este

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_m} \quad \text{unde} \quad \frac{1}{R_n} = \frac{n}{R'_n} = \frac{15}{150} = \frac{1}{10} \quad \text{și} \quad \frac{1}{R_m} = \frac{m}{R'_m} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$$

Deci, $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$; $R_t = 8$ ohmi

Rezistența exterioară este:

$$R = R_t + R' = 8 + 3{,}5 = 11{,}5 \text{ ohmi}$$

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{240}{11{,}5 + 0{,}5} = 20\ A\,; \quad U = E - Ir = 240 - 10 = 230 \text{ volți.}$$

Notăm cu i_n și i_m intensitatea curentului dintr-o lampă cu rezistența de 150 ohmi și 200 ohmi. Conform legii lui Kirchhoff, avem:

$$i_n = \frac{U}{R'_n} = \frac{230}{150} \cong 1{,}53\ A\,; \quad i_m = \frac{U}{R'_m} = \frac{230}{200} = 1{,}15 \text{ amperi.}$$

Problema 1457

Razele de curbură ale unei lentile biconvexe din crownglass sînt $R_1 = 3$ cm și $R_2 = 2$ cm. Să se afle distanța dintre focarele principale ale lentilei pentru radiațiile violete, dacă indicile de refracție pentru roșu este 1,50, iar pentru violet este 1,54.

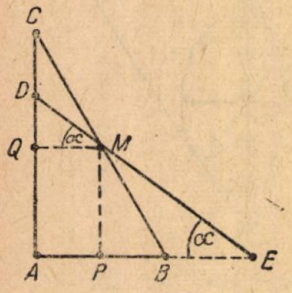
* * *

Soluție. — Distanța focală va fi:

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

unde n = indicele de refracție, r_1, și r_2 cele două raze; obținem pentru roșu $f = -12$ cm și pentru violet $f = -11{,}11$ cm.

Problem 1467



Prin M, mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ABC, se duce o secantă variabilă care întîlnește catetele AC și AB respectiv în D și E. Să se arate că există relația:

$$\left(\frac{AB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{AC}{ME}\right)^2 = 4$$

* * *

Soluția I-a, dată de **G. Galațki**, elev, Tîrgoviște. — Prin punctul M, ducem paralelele MP și MQ la AC și AB. Fie $\alpha = \sphericalangle AED = \sphericalangle QMD$.

Din triunghiurile dreptunghice MEP și DMQ deducem:

$$\frac{MP}{ME} = \sin\alpha\,; \quad \frac{MQ}{MD} = \cos\alpha$$

sau ținînd seama că M este mijlocul lui BC:

$$\frac{AC}{2\,ME} = \sin\alpha; \qquad \frac{AB}{2MD} = \cos\alpha$$

care ridicate la patrat și adunate dau:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{AC}{ME}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{AB}{MD}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

adică,

$$\left(\frac{AB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{AC}{ME}\right)^2 = 4.$$

Generalizare. — Dacă prin punctul M, care împarte ipotenuza unui triunghi dreptunghic ABC în raportul $\frac{MC}{MB} = \frac{m}{n}$ se duce o secantă variabilă care întîlnește catetele AC și AB în D și E există relația:

$$m^2\left(\frac{AB}{MD}\right)^2 + n^2\left(\frac{AC}{ME}\right)^2 = (m \pm n)^2.$$

Soluția II-a. Deosebim două cazuri, după cum punctul M este interior sau exterior ipotenuzei BC.

a) Punctul M este exterior segmentului BC (să presupunem B situat între M și C); deci $\frac{MC}{MB} = \frac{m}{n}$. Prin punctul M ducem paralele MP și MQ la catetele AC și AB. Fie $\alpha = \sphericalangle DMQ = \sphericalangle PEM$. Din triunghiurile dreptunghice PEM și DQM deducem

$$\frac{MP}{ME} = \sin\alpha \quad (1); \qquad \frac{MQ}{MD} = \cos\alpha \quad (2)$$

și din asemănarea triunghiurilor PMB, ABC; și CQM și ABC deducem:

$$\frac{MP}{AC} = \frac{MB}{CB} = \frac{n}{m-n}; \qquad \frac{MQ}{AB} = \frac{NC}{CB} = \frac{m}{m-n}$$

de unde $MP = \frac{n}{m-n} \cdot AC$; $MQ = \frac{m}{m-n} \cdot AB$.

Ținînd seama de aceste egalități relațiile (1) și (2) devin:

$$\frac{n}{m-n} \cdot \frac{AC}{KE} = \sin\alpha; \qquad \frac{m}{m-n} \cdot \frac{AB}{MD} = \cos\alpha$$

care ridicate la patrat și adunate ne dau:

$$\frac{n^2}{(m-n)^2}\left(\frac{AC}{ME}\right)^2 + \frac{m^2}{(m-n)^2} \cdot \left(\frac{AB}{MD}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

adică:

$$n^2\left(\frac{AC}{ME}\right)^2 + m^2\left(\frac{AB}{DM}\right)^2 = (m-n)^2.$$

b) Punctul M este interior segmentului BC. Demonstrația este analoagă. Se duc MP și MQ paralele la AC și AB. Notăm

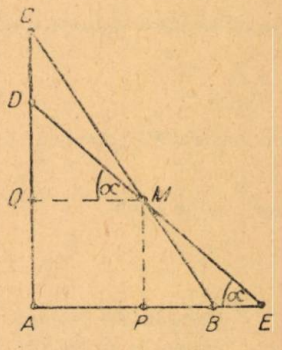
$$\alpha = \sphericalangle AED = \sphericalangle QMD$$

Din triunghiurile dreptunghice PEM și QMD deducem:

$$\frac{MP}{ME} = \sin\alpha \quad (3); \qquad \frac{MQ}{MD} = \cos\alpha \quad (4)$$

Scriind asemănarea triunghiurilor PBM, ABC și CQM și ABC și ținînd seama de proporțiile derivate din proporția de condiție $\frac{MC}{MB} = \frac{m}{n}$ găsim:

$$MP = \frac{n}{m+n} \cdot AC; \qquad MQ = \frac{m}{m+n} \cdot AB.$$



Ținînd seamă de aceste egalități relațiile (3) și (4) devin:

$$\frac{n}{m+n} \cdot \frac{AC}{ME} = \sin\alpha; \quad \frac{m}{m+n} \cdot \frac{AB}{MD} = \cos\alpha$$

care ridicate la patrat și adunate ne dau

$$n^2 \left(\frac{AC}{ME}\right)^2 + m^2 \left(\frac{AB}{MD}\right)^2 = (m+n)^2. \qquad (5)$$

Observare. — În cazul cînd M este mijlocul ipotenuzei BC, atunci $\frac{MC}{MB} = 1$ și relația (5) devine:

$$\left(\frac{AC}{ME}\right)^2 + \left(\frac{AB}{MD}\right)^2 = 4.$$

Problema 1489

Un S.M.T. a repartizat unei întovărășiri, un număr de tractoare ca să are 245,70 ha în timp de 7 zile. După două zile și jumătate de lucru, două tractoare sînt retrase și în schimb în dimineața zilei de a cincea, S.M.T. trimite un tractor cu șenile care ară cîte 11,70 ha pe zi și astfel se termină aratul la timp. Cît ară un tractor pe zi și cîte tractoare au fost repartizate de S.M.T.? Soluție aritmetică.

« Olimpiada Matematică », Iași 1954

Soluție. În $2\frac{1}{2}$ zile tractoarele au lucrat:

$$\frac{245{,}70 \times 2\frac{1}{2}}{7} = 87{,}75 \text{ ha}$$

iar tractorul cu șenile a arat în cele trei zile (ziua a cincea, a șasea, a șaptea):

$$11{,}70 \times 3 = 35{,}10 \text{ ha}$$

Tractoarelor care au arat jumătatea cealaltă a zilei a treia și următoarele le-au rămas de arat:

$$245{,}70 - 87{,}75 - 35{,}10 = 122{,}85 \text{ ha}$$

Aceste tractoare au arat într-o zi:

$$\frac{122{,}85}{4{,}5} = \frac{245{,}70}{9} = 27{,}30 \text{ ha}$$

pe cînd dacă ar fi toate tractoarele (cu 2 mai mult) într-o zi ar fi făcut:

$$\frac{245{,}70}{7} \text{ ha} = 35{,}10 \text{ ha}$$

iar cele două tractoare ar fi arat într-o zi:

$$35{,}10 \text{ ha} - 27{,}30 \text{ ha} - 7{,}80 \text{ ha}$$

un tractor arînd

$$\frac{7{,}80}{2} \text{ ha} = 3{,}90 \text{ ha}$$

Deci, fiecare tractor a lucrat 3,90 ha. Înseamnă că au fost 35,10 3,90 = 9 tractoare.
Răspuns: un tractor ară 3,90 ha pe zi și au fost repartizate 9 tractoare.

Problema 1491

a) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=\frac{1}{x}+\frac{abc}{x(x-a)(x-b)(x-c)}$$

b) *Verifică $x=o$ ecuația ?*

c) *Să se deducă că într-un triunghi, între raza cercului înscris r, razele cercurilor exînscrise r_a, r_b, r_c și raza cercului circumscris R, avem relația:*

$$r_a+r_b+r_c=r+4R$$

(Olimpiada matematică Timișoara), 1954

Soluție dată de *I. I. Cristea*, Constanța. — Scăpînd de numitori avem :

$$x(x-a)(x-b)+x(x-b)(x-c)+x(x-c)(x-a)=(x-a)(x-b)(x-c)+abc$$

sau dezvoltînd înmulțirile obținem:

$$2x^3=(a+b+c)x^2$$

de unde

$$x_1=x_2=O \text{ și } x_3=\frac{a+b+c}{2}$$

b) $x=0$ nu verifică ecuația căci pentru $x=0$ membrul al doilea ar fi **infinit mare.**

c) Punem $x=p$. Atunci $2p=a+b+c$ și avem

$$x-a=p-a;\quad x-b=p-b;\quad x-c=p-c$$

și înlocuind în ecuația dată obținem:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{1}{p}+\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{1}$$

Considerînd pe a, b, c drept laturile unui triunghi, atunci p este semiperimetrul triunghiului. Amplificăm identitatea (1) cu S, suprafața triunghiului. Obținem:

$$\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}=\frac{S}{p}+\frac{abc\cdot S}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{2}$$

ori cum:

$$\frac{S}{p-a}=r_a;\quad \frac{S}{p-b}=r_b;\quad \frac{S}{p-c}=r_c;\quad \frac{S}{p}=r$$

iar:

$$\frac{abc\cdot S}{P(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abcS}{S^2}=\frac{abc}{S}=4R.$$

Relația (2) devine

$$r_a+r_b+r_c=r+4R. \tag{3}$$

Problema 1492

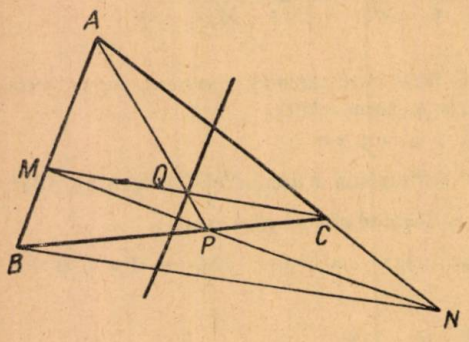
a) *În triunghiul ABC, fie un punct M mobil pe latura AB. Paralela din B la CM taie latura AC în N. Să se arate că aria triunghiului AMN este constantă.*

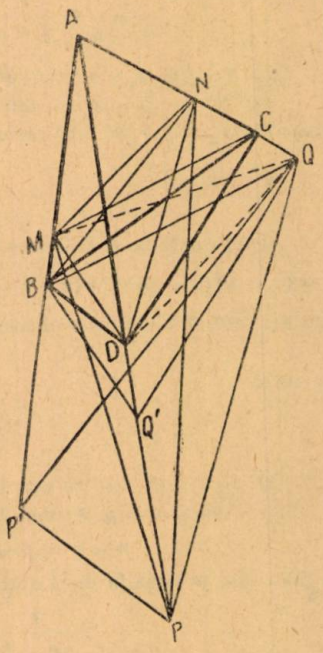
b) *Dreapta MN taie pe BC în P, iar AP taie pe CM în Q. Să se arate că punctul Q descrie o paralelă la latura AB*

c) *Fie M și N două puncte mobile situate pe muchiile AB și AC ale tetraedrului $ABCD$. Planul dus prin B, paralel cu MCD, taie pe AC în Q; planul dus prin Q paralel cu BDN taie pe AD în P. Să se arate că volumul piramidei $AMNP$ este constant.*

(Olimpiada matematică Timișoara), 1954

Soluție. — *a)* Deoarece punctul N se află pe paralela NB la MC avem: aria MNC = aria MBC iar aria AMN = aria AMC + aria MNC = aria AMC + aria MBC = = aria ABC. Și cum aria ABC este constantă, aria AMN este de asemeni constantă.





b) În trapezul $BMCN$, dreapta AP unește punctul de intersecție al laturilor neparalele cu punctul de intersecție al diagonalelor sale. Dreapta AP va determina pe bazele trapezului, segmente egale, deci segmentele MQ și QC sînt egale. Cum M descrie dreapta AB, mijlocul Q, al segmentului MC, va descrie o dreaptă paralelă cu AB.

c) Planul QPP' fiind paralel cu planul BND, volumul piramidei $PMND$ este egal cu cel al piramidei $QMND$, căci au aceeași bază și înălțimile egale. Înseamnă că:

$$AMNP = DMNP + AMND = AMND + QMND = AMQD = AMDC + QMDC$$

unde prin $AMNP$ am considerat volumul piramidei $AMNP$, etc.

Cum planul BQQ' este paralel cu planul CMD volumul pirmidei $QMDC$ este egal cu volumul piramidei $BMDC$ întrucît baza comună MDC și aceleași înălțimi egale. Deci:

$AMNP = AMDC + QMDC = AMDC + BMDC = ABCD$ = constant, tetredrul $ABCD$ fiind dat, volumul său e constant.

Deci, și $AMNP$ are volumul constant oricare ar fi M și N.

Problema E: 538

Un dinam produce un curent de 5 *Amperi, care alimentează un reșou cu rezistența de* 40 *ohmi. După cît timp se va încălzi* 100 *g apă cu* 60°*C ce se găsește într-un vas pe reșou, dacă* 1/6 *din căldura produsă se pierde.*

Galațky Gh., elev, Tîrgoviște

Soluție. — Cantitatea de căldură necesară ridicării temperaturii masei de 100 g apă cu 60°C este dată de relația $Q = mc\ (t_2 - t_1)$ unde c este căldura specifică și este egală cu 1 iar $t_2 - t_1 = 60°$

Deci,

$$Q' = 100 \cdot 1 \cdot 60 = 6000 \text{ calorii}$$

Aceasta reprezintă 5/6 din cantitatea de căldură Q, produsă de reșou, adică

$$Q = \frac{5}{6} Q; \quad 6000 = \frac{5}{6} Q; \quad Q = \frac{6 \times 6000}{5} = 7200 \text{ cal.}$$

Dar

$$Q = I^2 \cdot R \cdot T \cdot 0{,}24.$$

De unde:

$$T = \frac{Q}{I^2 R \cdot 0{,}24} = \frac{7200}{25 \cdot 40 \cdot 0{,}24} = \frac{7200}{240} = 30 \text{ secunde}$$

Problema 1496

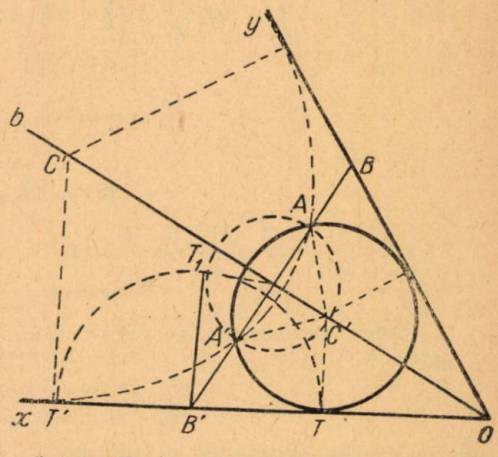
În interiorul unui unghi xOy de 60° se află un punct A. Se cere:

a) *Să se construiască un cerc tangent la laturile unghiului xOy care să treacă prin punctul A*

b) *Cîte soluții admite problema?*

c) *Știind că raza cercului construit este r să se calculeze aria figurii mărginită de laturile unghiului și dintre cel mai mic dintre arcele cercului cuprins între punctele de tangență.*

« Olimpiada Matematică », București



Soluție. a) și *b)*, — Facem construcția în cazul general $\sphericalangle xOy = \alpha$. Ducem bisec toarea Oz a unghiului xOy și aflăm apoi, simetricul lui A față de Oz. Centrul C al cercului de construit se află bisectoarea Oz și deci cercul C trece și prin A'. Cum A și A' sînt cunoscute, iar dreapta AA' taie pe Ox în B', ținînd seama de puterea punctului B' față de cercul C: $B'T^2 = B'A \cdot B'A'$, descriem pe AA' ca diametru, un cerc și ducem tangenta din B' la acest cerc. Fie T_1 punctul de contact. Cu centrul în B' și cu raza $B'T_1$ descriem un cerc care taie pe Ox în T și T'. Ridicînd din T și T' perpendicularele pe Ox, la intersecția lor cu bisectoarea Oz se obțin punctele C și C' care sînt centrele cercurilor căutate. Deci, corespund problemei 2 soluții

c) aria căutată este $r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

Problema 1497

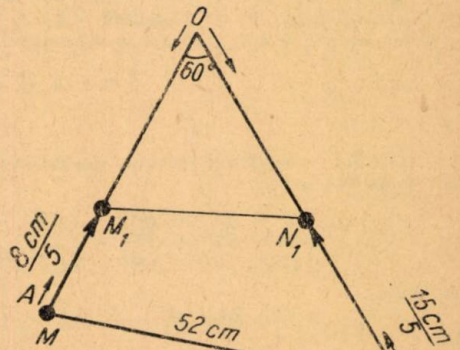
Un mecanism are două piese mobile M și N care se mișcă pe șanțurile drepte OA și OB. Aceste piese pornesc deodată din capetele A și B situate la 52 cm unul de altul și se îmbină una cu alta în capătul comun, O după care revin în pozițiile inițiale A și B. Piesa M se mișcă cu o iuțeală de 8 cm/s, piesa N cu o iuțeală de 15 cm/s, iar unghiul AOB dintre axele celor două șanțuri este de 60°. Să se calculeze:

a) *Lungimile curselor AO și BO ale fiecărei piese;*

b) *Durata unei curse simple;*

c) *distanța dintre piesele M și N după t secunde de la pornirea lor din A și B, dacă este mai mică decît durata unei curse simple.*

« Olimpiada Matematică București 1954 »



Soluție. — a) Piesele M și N parcurg distanțele OA și OB în același timp și cu viteze diferite: 8 cm/s și 15 cm/s. Fie t timpul necesar unei curse simple AO respectiv BO. Avem:

$$t = \frac{AO}{8} = \frac{BO}{15}$$

de unde

$$15 \cdot AO = 8 \cdot BO \qquad (1$$

Dar totodată:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 60°; \quad AO^2 + BO^2 - AO \cdot BO = 52^2$$

și cum din (1):

$$BO = \frac{15}{8} AO$$

rezultă

$$AO^2 + \left(\frac{15}{8} AO\right)^2 - AO\left(\frac{15}{8} AO\right) = 52^2, \text{ deci } AO^2 = \frac{52^2}{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 - \frac{15}{8}} = \left(\frac{8 \cdot 52}{13}\right)^2$$

$$\text{de unde } AO = \frac{416}{13} = 32$$

iar:

$$BO = \frac{15}{8} AO = 60$$

b) Durata t a unei curse simple este

$$t = \frac{AO}{8} = \frac{BO}{15} \quad \text{adică:} \quad t = 4 \text{ secunde}$$

c) După t secunde de la pornirea lor din A și B piesa M descrie $MN_1 = 8t$ cm iar piesa N, descrie $NN_1 = 15\,t$; și mai au de parcurs respectiv:

$$AO - 8t = 32 - 8t = 8\,(4 - t) \text{ cm}$$
$$BO - 15t = 60 - 15t = 15\,(4 - t) \text{ cm}$$

Aplicînd teorema consinusului în triunghiul $M_1 ON_1$, ($\sphericalangle O = 60°$) avem:

$$M_1N_1^2 = OM_1^2 + ON_1^2 - OM_1 ON_1$$

sau

$$M_1N_1^2 = 8^2\,(4 - t)^2 + 15^2\,(4 - t)^2 - 8 \cdot 15\,(4 - t)^2 = 169\,(4 - t)^2$$

deci $M_1N_1 = 52 - 13t$.

Problema 1498

Fie V vîrful și ABC baza unei piramide triunghiulare. Știind că toate fețele laterale au în V cîte un unghi de 60° și notînd $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$, să se calculeze muchiile BC, AC și AB în funcție de a, b și c. Să se demonstreze că unghiul BAC este drept dacă avem relația:

$$bc - a\,(b + c) + 2a^2 = 0$$

Olimpiada Matematică, Timișoara

Soluție. — Aplicînd teorema cosinusului în triunghiurile AVB, BVC, CVA cu unghiul din V de 60°, avem:

$$AB^2 = AV^2 + BV^2 - 2AV.BV \cos 60° = AV^2 + BV^2 - AV.BV.$$
$$BC^2 = BV^2 + CV^2 - 2\,BV.CV \cos 60° = BV^2 + CV^2 - BV.CV$$
$$CA^2 = CV^2 + AV^2 - 2\,CV.AV \cos 60° = CV^2 + AV^2 - CV.AV$$

de unde:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - ab; \; BC^2 = b^2 + c^2 - bc; \; CA^2 = c^2 + a^2 - ca$$

iar:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}\;; \quad BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}\;; \quad CA = \sqrt{c^2 + a^2 - ca}$$

Ca unghiul BAC să fie drept (triunghiul BAC dreptunghic), trebuie ca:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

sau

$$a^2 + b^2 - ab + a^2 + c^2 - ac = b^2 + c^2 - bc$$

de unde rezultă relația din enunț.

PROBLEME PROPUSE

1848. Un ascensor urcă cu o viteză constantă. Cînd este la 10 m sub noi, lăsăm liberă o pietricică și observăm că se cionesc la jumătatea drumului. Care este viteza ascensorului? Cînd și cu ce viteză se ciocnesc?

(Olimpiada de fizică, cl. VIII-a, Cluj 1955)

1849. O clădire se fotografiază de la o distanță de 80 m. Înălțimea clădirii pe fotografie este de 7 cm. Care este înălțimea reală a clădirii dacă distanța focală a obiectivului aparatului fotografic este de 20 cm.?

(Olimpiada de fizică, an III, Școli pedagogice, Cluj 1955)

1850. Un circuit este compus dintr-o bobină de autoinducție de 2 henry, o baterie formată din 3 condensatori avînd fiecare respectiv 1, 2, 7 microfarazi și un bec electric. Filamentul becului are la 0°C rezistența de 15 ohmi, iar temperatura de incandescență de 2000°C. Știind că pulsația curentului este 400 și tensiunea alternativă 110 volți, să se calculeze curentul total cînd elementele sînt legate în derivație astfel încît becul să lumineze normal.

Tiberiu Colibaba, elev Galați

1851. O sanie coboară o pantă de 72 m în 12 secunde. Care este accelerația și viteza finală?

(Olimpiada de fizică, an I, Școli pedagogice, Cluj, 1955)

1852. La construirea unei case se ridică o grindă grea de oțel cu ajutorul unui scripete. Un muncitor trage lateral grinda cu o frînghie fără să atingă peretele. Frînghia de sus este supusă unei forțe de 400 kg. cea de jos unei forțe de 50 kg, unghiul format de frînghie fiind de 150°. Ce greutate are grinda? Ce unghi face frînghia superioară cu verticala?

(Olimpiada de matematică și fizică, Cluj, 20. II. 1955)

1853. Să se demonstreze că dacă amplificăm de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ori razele a trei cercuri al căror centru radical este centrul de greutate al triunghiului cu vîrfurile în centrele cercurilor, centrul radical devine centrul cercului celor nouă puncte.

C. Ionescu-Țiu

1854. Să se arate că într-un tetraedru echifacial patratul înălțimii este de opt ori puterea ortocentrului unei fețe față de cercul ei circumscris.

C. Ionescu-Țiu

1855. Un dinam cu excitația în serie are intensitatea în circuitul exterior egală cu 26 amperi, iar în bobinajul inductorului 1,5 amperi. Să se calculeze rezistența bobinajului inductorului știind că rezistențele rotorului ce produce forța electromotoare de 220 volți este de 0,8 ohmi.

* * *

1856. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct fix M, din care se duce o dreaptă variabilă care întîlnește laturile AB și AC respectiv în N și P. Cevienele CN și BP se întîlnesc în I. Se cere locul geometric al punctului I și să se arate că mijloacele segmentelor AI, NP și BC sînt colineare.

Dragomir Șt. Donescu, Focșani

1857. Să se elimine x între relațiile

$$a \quad \cos 3x \cos 5x = m$$
$$b \quad \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x = n.$$

D. Bătinețu, Petroșani

1858. Să se afle locul geometric al punctului de contact a două cercuri tangente între ele și tangente în punctele fixe A și B respectiv la dreptele fixe OA și OB.

* * *

1859. Un con circular drept este secționat de un plan paralel cu baza, formînd un trunchi de con și un con de volume egale. Să se afle raportul înălțimilor acestor două corpuri. Dacă planul de secțiune ar fi dus la $\sqrt{\frac{1}{5}}$ din înălțime față de baza conului dat, să se afle raportul celor două volume din nou formate.

* * *

1860. Fie un unghi fix xOy și un punct fix A din plan. Un unghi suplimentar unghiului xOy și avînd vîrful în A, se rotește în plan, iar laturile lui taie pe Ox în B și pe Oy în C Să se afle locul geometric al unui punct P de pe BC care împarte segmentul BC într-un raport constant K.

* * *

1861. Fie m mediana vîrfului A în triunghiul ABC, de laturi a, b, c. Să se arate că $bc - \frac{a^2}{4} \leqslant m^2 \leqslant bc + \frac{a^2}{4}$.

N. N. Mihăileanu

1862. Să se arate că expresia $E = 2^{2n+5} + 192\,n - 32$ se divide cu 288 oricare ar fi n întreg și pozitiv.

Gh. I. Bercea, student, Timișoara

1863. Patratul $ABCD$ este așezat într-o poziție dată (fixă) pe foaia de hîrtie. Dacă se rotește apoi patratul în jurul punctului A de un unghi oarecare α se obține noua lui poziție $AB'C'D'$. Se cere:

a) Să se arate că CC' este egală cu diagonala patratului care are latura DD'.

b) Notînd cu E intersecția dreptelor BB' și DD' să se arate că unghiul AEC este drept.

c) Să se arate că dreptele BB', CC' și DD' sînt concurente.

Olimpiada Matematică 1955, clasa VIII-a.

1864. *a)* Să se demonstreze că diagonalele unui trunchi de piramidă avînd baza un paralelogram, sînt concurente.

b) Aria bazei mari a acestui trunchi de piramidă este de 14,7 m², aria bazei mici este de 4,8 m² și înălțimea este de 3 metri. Acest trunchi de piramidă este forma unui rezervor al cărui fund orizontal este format de baza mică și în care se află 152 hectolitri de lichid. Să se afle înălțimea stratului de lichid din rezervor.

Olimpiada Matematică 1955, clasa X-a.

1865. O lampă de radio are factorul de amplificare $\mu = 30$ și rezistența interioară $R_i = 20000$ ohmi. Să se calculeze tensiunea alternativă de la bornele lui R_a și coeficientul de amplificare al etajului, dacă rezistența anodică $R_a = 40\,000$ ohmi și dacă tensiunea aplicată la grila de comandă este de 1,2 V.

Ion V. Mateescu, elev, R. Vîlcea.

1866. Dacă intersecția diagonalelor unui patrulater inscriptibil $ABCD$ este în mijlocul diagonalei BD, atunci există relația:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2.\,AC^2$$

Stelian Lambă, Constanța

1867. La o fabrică se obține hidrogen prin acțiunea acidului clorhidric (HCl) asupra zincului (Zn). Cîți litri de hidrogen (H) se vor obține prin acțiunea acidului asupra unui kg. de zinc (Zn)?

Al. Floareș, Laza, Iași

1868. Ce forță trebuie exercitată pe pistonul mic al unei prese hidraulice cu diametrul de 20 mm pentru ca un ax de oțel cu lungimea de 1 m și cu secțiunea de 1 cm² supus deformării să se alungească cu 1 mm. Diametrul pistonului mare este de 300 mm. Cunoscînd limita de rezistență 70 kgf/mm², să se calculeze alungirea absolută maximă a axului în momentul ruperii.

A. I. Voinea, elev, Craiova

1869. Să se arate că între S_1 și S_2 care sînt respectiv sensibilitatea unui galvanometru cu cadru fix și sensibilitatea unui galvanometru cu cadru mobil, avem relația:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi C}{H_0 HrS}$$

în care: C = constanta de torsiune, H = intensitatea cîmpului magnetic produs de curentul electric; H_0 = intensitatea cîmpului magnetic terestru; S = suprafața cadrului galvanometrului cu cadru mobil.

Silviu I. Guiașu, Oradea

1870. Să se calculeze forța electromotoare indusă într-o bobină formată din 500 spire identice, lungă de 50 cm, care în timpul de 0,05 secunde se introduce într-un cîmp magnetic a cărui intensitate este de 1500 oerstezi, perpendicular pe liniile de forță, știind că dacă în interiorul bobinei se introduce un miez de fier la care coeficientul de permeabilitate magnetică este 200, coeficientul de inducție proprie devine egal cu 0,0062 henry.

Emil Georgescu, absolvent, Alexandria

1871. Să se arate că pentru $|x| < 1$
avem

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots} = \frac{1 - x + x^2 - x^3 + \ldots}{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots}$$

C. I. Ț.

1872 *) Să se arate că ecuațiile

$$a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2} = b$$
$$b\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-b^2} = a$$

admit rădăcina comună

$$x = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}.$$

Discuție.

C. Ionescu-Țiu

1873**) Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC; α mijlocul lui $B'C'$; α' proiecția lui A pe $B'C'$.
Să se arate că $A\alpha$ trece prin mijlocul ui $A'\alpha'$.

N. N. Mihăileanu

---

*) Extras din Gazeta Matematică, anul LIV (dec. 1948), problema 6564
**) Extras din Gazeta Matematică, anul LIV (1948) problema 6558

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 687 *). La construirea hidrocentralei de la Bicaz s-a folosit şi escavatorul sovietic EGL 15 care are o rază de escavare de 40 metri, iar în timp de 45 secunde transportă 15 m^3 de materie stîncoasă cu densitatea de 1,6. Să se afle ce volum de material stîncos transportă escavatorul în timp de 8 ore.

M. St. Drăgan

E: 708. Să se arate că

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{a(a-b)}+\frac{1}{ab(1+ab)}=\frac{1}{b(a-b)} \text{ şi}$$

$$1+ab+(a-b)^2+ab(1+ab)=(1+a^2)(1+b^2$$

C. I. Ţ.

E: 709. Se face un amestec de 3000 kg. orez de calitatea I-a care costă 10,25 lei kg. cu orez de calitatea III care costă, 8,75 lei kg. Cîte kg. de orez au fost de fiecare calitate dacă amestecul costă 9 lei kg.

* * *

E: 710. In prima zi o echipă de pionieri a strîns $\frac{1}{3}$ din toată cantitatea de plante perene plus 1 kg., în a doua zi a strîns $\frac{1}{2}$ din rest plus $\frac{1}{2}$ kg. şi în a treia zi a strîns $\frac{1}{2}$ din noul rest plus 3 2 kg. Cît a strîns în fiecare zi?

B. Baieră

E: 711. Dacă $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=1$, să se arate că

$$a^2b^2c^2+a^2b^2(a^2+b^2)+b^2c^2(b^2+c^2)+c^2a^2(c^2+a^2)=abc(a^2+b^2+c^2)$$

Ar. Caloianu

E: 712. — Se dă dreptunghiul $ABCD$. Un cerc ce trece prin B şi D taie laturile BD şi respectiv în P şi Q. Dreptele CA şi PQ se întîlnesc în punctul M. Să se arate că dreptele MB şi PQ sînt perpendiculare.

Dragomir Şt. Donescu, Focşani

E: 713. — Să se arate că:

$$ab(a+b)(a-b)+bc(b+c)(b-c)+ca(c+a)(c-a)=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

* * *

E: 714. — Să rezolve ecuaţiile

$$(x+1)(x+5)+4=0$$
$$(x+1)(x-5)+4=0$$
$$(x+3)(x+3)-8=0$$
$$x[(x-3)^2+3]-8=0$$

(Se poate rezolva fără formula de rezolvare).

C. I. Ţ.

E: 715. — Un litru spirt de 90 % împreună cu sticla, costă 51,75 lei. ½ litru spirt împreună cu sticla sa costă 26,25 lei. Preţul a două sticle de ½ kg este cu 3/7 mai mult decît preţul unei sticle de 1 litru. Cît costă spirtul, sticla de 1 litru şi cea de ½ litru?

N. Zimmermann

) V: 709, 710, 715, VI: 687, 711, 713, 718, VII: 708, 712, 714, 716, 717, 719, 720, 721, 722.

E: 716. — Să se descompună în factori expresiile:

$$E = 1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6$$

$$G = a(3a^2 + 2b) - a^2(2b + 3) - b^2(a^2 - 1)$$

Dragomir Şt. Donescu, Focşani

E: 717. Intr-un triunghi oarecare ABC ducem medianele AA', BB', CC'. Notăm cu M,N,P mijloacele acestor mediane. Dreptele AN, MP şi CM taie respectiv laturile BC, CA, AB în punctele D, E, F. Să se arate că: aria $(AA'D + BB'E + CC'F) = 2$ aria ABC.

C. Păun, Cluj

E: 718. Să se arate că:

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}} : \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x+z}} = \frac{y + x - x}{x + z - y}.$$

I. Stepan, Constanţa

E: 719. Dacă notăm $A = \frac{(b-c)^2}{n-p}$; $B = \frac{(c-a)^2}{p-m}$ şi $C = \frac{(a-b)^2}{m-n}$,

să se arate că:

$$(Aa + Bb + Cc)^2 = (A + B + C)(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2).$$

* * *

E: 720. Să se descompună în factori expresia

$$2x^2t^2 - y^2x^2 - xyzt$$

N. M.

E: 721. Fiind dat un triunghi oarecare ABC să se construiască numai cu rigla şi compasul punctul de întîlnire H al înălţimilor.

D. M. Bătineţu, Petroşani

E: 722. — Să se arate că:

$$\frac{1}{1 + a + 2a^2 + a^3 + a^4} + \frac{1}{1 - a + 2a^2 - a^3 + a^4} = \frac{2}{1 + a^2 + a^4}.$$

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Evidenţiaţi

In cursul lunii aprilie 1955 s-au mai evidenţiat următorii rezolvitori de probleme din G.M.F.-B din localităţile care încep cu literele G-Z, după cum urmează:

Colibaba Tiberiu (clasa X-a, Galaţi), **Brozici Mircea** (clasa X-a, Ploeşti), **Alexa Dumitru** (clasa X-a, Iaşi), **Rotaru V. Alexandru** (clasa X-a, Tecuci), **Stroe Radu** (clasa X-a, Ploeşti), **Brebente P. Corneliu** (clasa X-a, Tîrgovişte), **Ioniţă Tudor** (anul IV, s.m.t. mecanică Oraşul Stalin). **Popescu D.** (Clasa X-a, Ploeşti), **Ţeculescu S. Vasile** (absolvent, Slatina), **Murărescu Gheorghe** (clasa IX-a, Roman), **Ceauşel I. Gheorghe** (Vama Poştii, Buzău), **Tofan C. Mihai** (clasa X-a, Oraşul Stalin) **Botoran I. Petre** (clasa IX-a, Giurgiu), **Ciurdea Eugen** (clasa X-a, Galaţi), **Hegedüs Attila** (clasa IX-a, Tg. Mureş), **Soresecu I. Victor** (clasa X-a, Piteşti), **Vasilache M. Catrina** (clasa X-a, Ploeşti), **Podeanu Corneliu** (clasa IX-a Oraşul Stalin), **Cristea Rodica** (clasa VI-a R. Sărat), **Grosu Gh. Florin** (clasa IX-a Galaţi), **Teodorescu Victor** (clasa X-a, Ploeşti), **Mihăileanu N. Constantin** (clasa VIII, Timişoara), **Stăncescu Viorel** (clasa VI-a, Giurgiu), **Mihailovici Sergiu** (absolvent, Tecuci).

Pînă la 1 mai 1955 s-au mai primit cîte cel puțin zece soluții la problemele propuse în Gazeta Matematică și Fizică, seria B, de la rezolvitorii din localitățile care încep cu literele G-Z, după cum urmează:

GALAȚI. Școala medie nr. 1 băieți, clasa IX-a. *Grosu Gh. Florin* (1471—486,489—491, 493—499, 501, 506, 508, 509, 511), Kahane Eduard (1474, 475, 476, 478, 484, 485, 486, 493 494, 495, 520, 522, 523, 524, 526); clasa X-a. Chiculiță Mihai (1409, 410, 411, 412, 413, 416, 418, 423, 432, 434, 436, 440, 441, 449, 458, 472,) *Colibaba Tiberiu* (1409, 410, 412, 413, 414, 416, 426, 429, 432, 433, 436, 439—443, 449, 452, 455, 458—463, 465, 470, 472—486, 493—498, 501, 503, 504, 506, 511, 515, 516, 518, 520—529, 531—534, 536, 546, 547, 551, 553, 554, 558, P). Școala medie de fete nr. 2. Clasa X-a. Cioceanu Martha (1411, 415, 471, 473, 474, 475, 478, 481, 482, 493, 494, 520, 528, 532), Calavre Marcela (1408, 409, 412, 416, 436, 449, 452, 453, 464, 526), Cîrlig E. (1449, 453, 461, 465, 473, 474, 486, 513, 515, 517, 520, 522, 524, 528, 531, 532, 533, 540), Drăgănescu Maria (1408, 409, 411, 412, 413, 416, 452, 453, 464, E: 575), Filip Mioara (1411, 416, 436, 440, 475, 481, 482, 483, 520, 522, 528), Filler Aurica (1442, 449, 472, 474, 475, 481, 482, 486, 494, 513, 515, 526, 531, 532), Gheorghiu Rodica (1413, 416, 436, 473, 473, 482, 483, 486, 515, 526, 528, 532, 613, E: 571), Partenie Marcela (1408, 409, 411, 412, 413, 416, 436, 449, 452, 453, 457, 461, 462, 464, 472, 481, 483, 517, 520, 522, 526, 528, E: 578, 579), Popescu Olga (1473, 474, 486, 513, 516, 520, 522, 524, 526, 528, 531, 532). Școala medie de marină. Clasa X-a elevi matrozi: Apetrovici Mihai (1472, 474, 475, 480, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 498, 499, 513, 515, 516, 520, 522, 524, 526, 528, 529, 531, 532, 536, 554, 555, E: 597, 600, 606, 608), Bușilă Gheorghe (1442, 459, 462, 473, 478, 497, 498, 513, 515, 516, 518, 524, 526, 527, 529, 531, 532, 533, 536, 538, 541, 545, 546, 554, 555, P), *Ciurdea Eugen* (1473, 497, 498, 506, 513, 515, 516, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 536, 541, 545, 554, 555, E: 584, 592, 594, 597, 599, 600, 601, 603, 606), Mingiuc Constantin (1472, 474, 475, 477, 478, 482, 485, 489, 493, 494, 496, 499).

GHEORGHENI. Școala medie mixtă nr. 2. Clasa IX-a. Mîndru Traian (E: 526, 532, 550, 578, 592, 597, 600, 601, 602, 608); clasa X-a. Pop R. Gavril (1416, 436, 472, 474, 475, 482, E: 578, 592, 597, 600, 502), Rosenberg Silvia (1473, 474, 475, 479, 482, 483, 495, 522, 526, 528, 532).

GIURGIU. Clasa IX-a. Anghel V. Marin (1419, 436, 449, 459, 460, 461, 464, 478, 479, 480), *Botoran I. Petre* (1419, 430, 432, 436, 443, 449, 459, 460, 461, 464, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 486, 493, 494, 495, 518, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 563, 566, E: 567—575, 577, 578, 580—584, 586—588, 592, 593, 597, 599, 600, 602), Sin C. Alexandru (1449, 474, 486, 521, 523, 527, 581, 584, 586, 587, 588, 590, 592, 593, 594, 596, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 605—608), Panaitescu V. Laurențiu (1442, 474, 475, 485, 486, 494, 516, 524, 527, 529, 536, 545, 615, E: 579, 581, 582, 583, 592, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608, 612, 614—616, 620, 621); clasa X-a. Bigan V. Stan (1516, 517, 518, 520, 521, 525, 531, 532, 533, 534, 536, 588, 589, 590, 591); Școala de 7 ani din Gogoșari. Clasa VI-a. *Stănescu Viorel* (E: 576, 577, 580, 581, 582, 583, 584, 586, 587, 588, 592, 593, 594, 597, 598, 603, 607, 609).

GRADISTE (Olteț, București). Absolvent Dumitrescu C. Nicolae (1472, 473, 474, 475, 478, 479, 481, 483, 484, 485, 486).

IANCA Sat (Galați). Școala medie. Clasa VIII-a. Caraman M. Gheorghe (1449, 460, 474, E: 577, 578, 580, 583, 586, 587, 588, 596, 597, 600, 606, 608).

IAȘI. Școala medie tehnică de drumuri și poduri, anul IV. Abramovici Renee (1475, 486, 493, 516, 526, 527, E: 603, 608, 614, 620, 621). Școala de 7 ani nr. 19. Clasa VII-a. Ungureanu Ana (E: 505, 536, 537, 558, 563, 568, 574, 575, 580, 581, 584, 601, 602, 605, 608). Școala medie nr. 1 Clasa VIII-a. Crisaru Iancu (1474, 486, 493, 494, 504, 525, E: 592, 596, 597, 600, 601, 602, 603, 606, 608, 614, 615, 618, 621, 622,), Sor Liber (1449,

474, 504, 524, E: 553, 597, 586, 592, 597, 599, 600, 608), Baliff Andrei (E: 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590), Feldman Milu (1474, 486, 493, 524, 525, 527, 604, E: 592, 596, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 606, 608, 611, 615, 618); clasa IX-a. Goldenberg Solo (1449, 493, 522, 526, 540, E: 567, 586, 592, 600, 601, 602). Şcoala Pedagogică mixtă, anul IV. Grăjdeanu Petrişor (1481), 493, 494, 495, 529, 540, E: 592, 594, 601, 602, 606, 607, 608, 612, 618, 620, 621, P). Şcoala medie nr. 2, clasa X-a. *Alexa Dumitru* (1408, 416, 422, 436, 441, 442, 449, 453, 460, 464, 465, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 489, 493, 499 501, 502, 506, 508, 513, 515, 516, 517, 520, 522, 524, 526, 528, 529, 532, 534, 536, 553, 555). *Duda-Huşi.* Funcţionar. Copciuc Emil (1449, 459, 545, E: 580, 581, 582, 583, 586, 587, 588, 589, 590, 594, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 606, 608, 609), absolvent Măierea Gheorghe (1594, 602, 603, 607, E: 592, 597, 599, 602, 608, 610, 615, 618, 621, 622, P), Simion Ispas (1409, 436, 437, 473, 474, 479, 481, 483, 485, 486, 513, 517, 520, 524, 526, 528, 531, 532, 555, 592, E: 563, 565, 567, 572, 586, 588, 597, 598, 600, 608, 607, 618, P). Student Ţifui Vasile (1469, 470, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 483, 485, 498, 511, 536, 537, 538, 540, 542, 546, 548, 549, 550, 551, 585, 587, 588, 592, 594, 601, 604, 606).

LUGOJ. Clasa X-a. Nemeş Alexandru (1441, 478, 484, 493, 494, E: 558, 577, 579, 580, 586).

MEDGIDIA (Constanţa). Clasa IX-a. Birda Tiberiu (1475, E: 567, 568, 569, 571, 572, 574, 580, 586, 592).

NASAUD. Clasa IX-a. Brătfăleanu N. Iosif (1474, 475, 508, 517, 524, 526, 527, 532, 601, E: 592, 595, 608, 612), Roman Fabian (1474, 475, 508, 517, 524, 526, 527, 531, 601, E: 592, 597, 601, 603, 608, 612, 620, 621), Sîngeorzan Emil (1475, 524, 526, 532, 535, 601, E: 592 595, 607, 608, 612, 620, 621).

ORADEA. Clasa IX-a. Ciobanu I. Ioan (1442, 474, 486, 491, 492, 511, E: 563, 564, 566, 592, 597), Ianăş I. Mihail (1474, 475, 478, 479, 484, 485, 486, 490, 494, 496, 516, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 534, 536); clasa X-a. Bocu Monica (1408, 409, 410, 411, 412, 416, 436, 437, 440, 442, 449, 453, 459, 465), Guiaşu Silviu (1444, 456, 457, 506, 509, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 536, 537, 546).

ORAVIŢA. Clasa VII-a. Chirvasă Ion (1437, 449, 458, 460, E: 567, 568, 572, 574, 597, 602, 608).

ORAŞUL STALIN. Şcoala medie tehnică mecanică, anul II. Bloos Günther (1480, 482, 486, 493, E: 578, 582, 584, 586, 587, 597), Cenţu Ioan (1442, 449, 475, 476, 477, 478, 480, 481, 482, 486, E: 580, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588), Dălălău Ana (1472, 493, 494, 522, 526, E: 592, 597, 601, 603, 608), Erdoi Nicolae (1436, 449, 492, 528, E:578, 582, 584, 586, 587, 588, 597, 606, 608,), Fehrer Nicolae (1449, 493, R: 578, 587, 582, 584, 587, 588, 606, 608); anul IV. *Ioniţă Tudor* (1408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 419, 421, 423 424, 425, 426, 427, 429, 432, 434, 436, 437, 439, 400, 441, 442, 443, 445, 446, 449, 453, 454, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 463, 465, 466, 467, 468, P). Şcoala medie de fete nr. 5. Clasa IX-a Mesaroşu Constanţa (1474, 475, 482, 484, 486, 493, 494, 495, E: 578, 586, 588, 589). Şcoala medie nr. 3 de fete. Clasa IX-a. Hann Erika (1475, 478, 493, 523, 530, E: 601, 602, 608, 609, 612, 614, 620). Şcoala medie de băieţi nr. 1. Clasa VI-a. Voineag Lucian (E: 563, 568, 571, 574, 581, 582, 583, 586, 587, 588); clasa VIII-a. Başturescu Nicolae (1449, 483, 528, E: 530, 568, 571, 574, 586, 587, 589, 598, 607), Ciurea Vlad (1392, 403, E: 510, 526, 527, 528, 532, 537, 546, 558, 563, 565, 574, 585, 586, 587, 600, 601, 615, 611), Dragomir Adrian (1443, 446, 455, 456, 458, 464, 466, 467, E: 578, 579, 585, Giurgiu Dan (1449, E: 563, 565, 568, 569, 571, 574, 580, 886, 587, 588), Gonţea Eugen (1486, 528, 529, E: 563, 565, 567, 568, 571, 572, 574, 575, 588, 592, 597, 601, 603), Grigore Dumitru (1474, 493, 496, E: 563, 564, 571, 574, 586, 587, 588, 594, 597,

598, 601, 608, 612), Jinga Gheorghe (E: 564, 565, 570, 576, 582, 590, 597, 598, 602, 605), Pielmuș Ioan (E: 563, 568, 571, 574, 578, 586, 588, 592, 593, 601, 603, 608), Radu Gheorghe (1474, 528, E: 497, 499, 502, 546, 588, 592, 597, 600); clasa IX-a. Brînduș Lucian (1434, E: 565, 569, 570, 580, 592, 594, 595, 602, 609), Dudas Nicolae (1474, 475, 478, 481, 516, 521, 523, 526, 527, 529, 530, 532), Neamțu Tudor (1449, 475, 492, 515, 521, 522, 524, 526, E: 576, 582, 583, 592, 602), Păcuraru Dan (1442, 449, 453, 460, 471, 474, 475, 480, 481, 482, 485, 493), *Podeanu Corneliu* (1442, 449, 458, 461, 474, 475, 481, 482, 493, 494, 516, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 531, 532, 533, 534, 536, 540, 550, 587, 592); clasa X-a. Miloiu Gheorghe (1459, 472, 474, 475, 482, 483, 486, 495, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 532, 533, 541, 546, 555), *Tofan C. Mihai* (1472, 473, 474, 475, 476, 477, 479, 481, 483, 485, 486, 492, 493, 494, 495, 498, 499, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534).

PIATRA NEAMȚ. Clasa VII-a. Aricov Rodica (E: 563, 564, 571, 574, 576, 578, 588, 597, 600, 608, 612, 620); clasa X-a. Rapoțică Aurelia (1372, 473, 474, 475, 480, 482, 485, 493, 494, 495, 513, 515, 520, 553, 555, E: 592, 602, 603, 607, 608), Rusu Maria (1472, 473, 474, 476, 480, 482, 483, 484, 495, 515, 520, E: 592, 601, 602, 603, 608). Școala de 7 ani *Viișoara* (Bistrița), clasa VI-a. Stefan Lucia (E: 554, 560, 561, 563, 586, 588, 592, 602, 603, 607).

PETROȘANI (Hunedoara). Clasa IX-a. Moșie Doru (1472, 475, 476, 480, 513, 516, 526, 528, 529, 531).

PIETROȘANI (Zimnicea). Absolvent Bătinețu M. Dumitru (1377, 378, 408—416, 431, 432, 433, 436—440, 448, 461, 464, 478, 480, 508).

PITEȘTI. Clasa X-a. Gulie I. Nicolae (1442, 459, 460, 461, 498, 513, 521, 525, 530, 533, 536, 540, 546, 554, 556, 588, 589, 590, 592, P), Manda S. ((1441, 442, 443—449, 459), *Sorescu I. Victor* (1448, 454, 482, 493, 494, 499, 501, 516, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527 528, 529, 531, 536, 537, 551, 553, 555, 558, 585, 588, 589, 590, 591, 594, 599, E: 563—580).

PLOEȘTI. Școala medie de băieți nr. 1 « I. L. Caragiale ». Clasa VII-a. Drăgan Radu (E: 563, 564, 565, 566, 568, 569, 574, 580, 587), Dumitrescu Marian (1449, 472, 473, 474, 479, 482, 486, 493, 494, 495, E: 580, 587, 588); clasa IX-a. Bogdan Mircea (1425, 437 439, 442, 443, 449, 452, 464, 465, 472, 475, 481, 482, 484, 486, 493, 494, 495, 516, 520, 522, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 532, 533, P), Văgăunescu Gheorghe (1412, 414, 416, 423, 424, 425, 426, 432, 433, 439, 440, 442, 443, 449, 453, 458, 464, 465), Eftimiu Aurel (1449, E: 563, 568, 569, 574, 575, 586, 587, 588); clasa X-a. *Brozici Mircea* (1469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 490, 491, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 501, 503, 508, 509, 506, 512, 513, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 532, 536, 541, 546, 551, 553, 554, 558, 534, 537, 550), Ionescu Radu (1441, 442, 459, 461, 462, 464, 472, 511, 517, 520, 526, 528, 532, 540, 589, 590, 594, 600, 603), Ioniță M. Constantin (1472, 473, 474, 475, 480, 482, 483, 486, 493, 520, 522, 524, 528, 431, 532, 533, 538, 589, 600), *Popescu D.* (1464, 471, 473, 476, 479, 480, 489, 490, 496, 498, 499, 506, 508, 511, 512, 513, 515, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 533, 534, 536, 540, 545, 546, 553, 554, 555, 558, 587, 589, 590), Paraschiv Mihai (1441, 442, 449, 459, 460, 461, 462, 472, 473, 474, 475, 482, 483, 485, 493, 494, 497, 498, 513, 520, 521, 524, 526, 531, 532, 534, 537, 546, 554), *Stroe Radu* (1413, 418, 424, 429, 431, 432, 433, 434, 440, 457, 462, 468, 471, 489, 516, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 533, 536, 551, 554, 555, P), Șerbănescu Milan (1472, 473—475, 486, 518, 520, 529, 532, 533), *Teodorescu Victor* (1441, 442, 449, 459, 461, 462, 464, 465, 472, 473, 474, 475, 476, 479, 482, 483, 486, 493, 494, 495, 508, 511, 513, 517, 520, 521, 524, 525, 526, 527, 528, 532, 533, 534, 540, 590, 594, 603), Turiga M. Constantin (1442, 464, 472, 473, 474, 475, 478, 479, 481, 482, 483, 486, 493, 498, 516, 517, 525, 529, 533, 602, 603). Școala medie de fete, clasa IX-a. Chirilescu Caliopi (1472, 474, 475, 522, 524, 528, 532, 536, 597, 615, 618); clasa X-a. *Vasilache M. Catrina* (1441, 442, 443, 449, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 465, 472, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 493, 498, 499, 513, 515, 520, 521, 522, 524, 526, 529, 530, 532). Școala de 7 ani nr. 26, clasa VI-a. Tăbușcă C. Pavel (1493, 494, 495, 545, E: 592, 601, 603, 608, 612, 620, 621, 623); clasa VII-a. Dosei Florin (E: 563, 568, 571, 574, 580, 581, 586, 587, 593, 601, 603, 608).

PUCIOASA (Ploești). Bucur D. Gheorghe (1517, 523, 531, 534, 536, 539, 540, 550, 552, 558, 585, 588, 591, 592, 594, 597, 601, 602, 603, 604, P).

RIMNICUL SARAT. Școala de 7 ani din *Boldeștii de sus*. Clasa VI-a. *Cristea Rodica* (1460, 464, 517, E: 576, 577, 578, 579, 580, 582—588, 592, 593, 596, 597, 600—603, 606, 608).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa IX-a. Abagiu V. Dorel (1482, 512, 516, 517, 523, 524 528, 532, 588, 592, 593, 599, 601, 602, 603, 605, P), Enescu I. Nicolae (1472, 483, 486,

516, 517, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 532, 540, 548, 587, 594, 602, 603, P), Paulescu N. Dan (1516, 517, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 536, 540, E: 597, 600, 601, 605, 608); clasa X-a. Zigulescu M. (1372, 378, 381, 384, 385, 409, 413, 414, 416, 436, 439, 441, 442, 449, 451, 453, 460, 461, 464, 472, 473, 474, 476, 479, 480, 482, 483, 486, 499, 504, 506, 508, 511, 513, 515, 520, 522, 526, 528, 536, 538, 545).

REŞIŢA (Timişoara). Şcoala mixtă *Bocşa-Vasinovei*. Clasa IX-a. Băulescu Vasile (1442, 524, 526, 587, E: 592, 597, 601, 603, 615, 618).

ROMAN. Clasa IX-a. *Murărescu Gh.* (1376, 379, 380, 382, 383, 385, 392, 401, 407, 410, 415, 416, 422, 424, 433, 436, 437, 438, 440, 442, 443, 449, 453, 456, 458, 460, 464, 465, 468, 47[illegible], 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 490, 492, 496), Ciobanu Traian (1411, 416m, 436, 472, 474, 475, 478, 481, 482, 483, 486, 528, 529, 532, E: 570, 574, 597, 600); clasa X-a. *Gavrilut Mihai* (1301, 303, 304, 314, 315, 316, 317, 322, 325, 337, 340, 341, 363, 365, 372, 378, 374, 375, 379, 381, 382, 383, 385, 386, 388, 392, 397, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 416).

SATU MARE (Baia Mare) Clasa X-a. Graur Florin (1472, 474, 475, 476, 485, 486, 522, 526, 531, E: 597, 600).

SLATINA. Clasa X-a. Antonescu I. Păunel (1477, 478, 480, 484, 498, 499, 506, 508, 509, 511, 518, 558), Gălbenuş Eugeniu (1475, 516, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 553, 555), Ghergu N. Ion (1470, 473, 475, 477, 479, 481, 489, 491, 503, 506, 508, 509, 511, 512, 514, 517, 525, 539, 542, 550, 551, 555, 558, E: 591, 559), absolvent *Ţeculescu S. Vasile* (1410, 411, 412, 416, 426, 442, 443, 449, 451, 458, 460, 462, 465, 467, 468, 471, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 481, 482, 483, 485, 486, 487, 490, 493, 494, 497, 498, 499, 512, 513, 516, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 533).

SUCEAVA. Clasa X-a. Cîmpan Sorin (1460, 461, 472, 486, 520, 522, 524, 526, 529, 532, 539, 540, 546, E: 576, 577, 578, 587, 588, 592, 597, 600, 602, 606, 608), Boghian Dragoş (1459, 513, 515, 517, 520, 522, 524, 526, 528, 532, 533, 536, 546, 553, 554, 583, 585, 588, 590, 591, 594, 601, 602, 603, E: 576, 577, 578, 586, 587, 588, 592, 596, 600, 508).

TIRGOVIŞTE. Clasa IX-a. Bucur I. Gheorghe (1480, 487, 524, 526, 528, 532, E: 592, 597, 600, 601), Tudor N. Constantin (1449, 458, 475, 482, 516, 521, 524, 525, 526, 528, 529, 532, 540, E: 576, 578, 580, 611); clasa X-a *Brebente P. Corneliu* (1441, 442, 443, 444, 449, 451, 453, 454, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 466, 467, 470—483, 485, 486, 487, 491, 493, 494, 495, 498, 499, 508, 509, 511), Parnia Letiţia (1512, 513, 516, 520, 521, 522, 526, 528, 531, 532, 533, 534, 553, 554, E: 600, 606, 608), Popescu N. Viorel (1442, 443, 464, 467, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 517, 520, 522, 523, 525, 526, 527, 528, 532, 533, P).

TÎRGU JIU. Clasa X-a. Daladis Dumitru (1441, 442, 443, 449, 451, 453, 459, 460, 461, 462, 482, 484, 486, 494, 495, 496, 498, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 529, 532), Floroiu Gabriel (1408, 409, 412, 413, 415, 416, 432, 436, 442, 443, 449, 451, 453, 454, 456, 458, 460, 465, 467).

TIRGU MUREŞ. Clasa VIII-a. Marian Gh. Mircea (1493, 494, 545, 588, E: 592, 593, 601, 602, 603, 608, P); clasa IX-a. *Hegedus Attila* (1479, 482, 503, 504, 508, 509, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 528, 529 532, 534, 536, 541, 545, 546, 558, 585, 587, 588, 591, 592, 601, 602, 604, 606, P), Moraru Octavian (1482, 484, 516, 517, 518, 520, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 545, E: 597, 600, 608), Nistor Cornel (1442, 449, 460, 464, 465, 467, E: 576, 577, 580, 582, 583, 586, 587, 588, 590), Sasu Aurel (1464, 474, 486, 519, 522, 526, 528, 529, 532, E: 578, 586, 587, 588, 600); clasa X-a. Bucur D. Dumitru (1442, 472, 473, 480, 483, 515, 520, E: 578, 586, 587, 588), Manole Nicolae (1447, 472, 473, 474, 480, 483, 515, 520, E: 578, 586, 587, 588).

TÎRGUL NEAMŢ. Clasa IX-a. Focşeneanu I. Ioan (1442, 443, 449, 458, 460, 461, 468, 456, E: 580, 585, 590), Moruzi Octav (1443, 449, 456, 458, 460, 461, 468, E: 580, 585, 590).

TECUCI. Clasa IX-a. Buric Costică (1472, 483, E: 563, 571, 572, 580, 584, 588), Niţă Fănică (1442, 524, 531, 540, E: 576, 583, 585, 590, 592, 593); clasa X-a. Grecu P. Eugen (1472, 473, 474, 475, 477, 480, 483, 489, 495, 497, 499, 511, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 545, 554, E: 592, 593, 597, 599, 600, 601, 602, 608), Herşcovici Avram (1469, 471, 474, 478, 481, 484, 512, 515, 517, 520, 529, 530), Negoescu Emil (1464, 473, 477, 478, 479, 481, 484, 502, 513, 515, 516, 517, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 552, 553, 589, 590), *Rotaru V. Alexandru* (1451, 461, 464, 471—486, 490, 491, 493—496, 499, 502, 506, 508, 512—518, 520—524, 526—534, 536, 540, 546, 548, 550—555, 558, 558, 590, 594, 601, 603), Ursulescu Florenţa (1423, 441, 442, 449, 459, 474, 517, 518, 520, E: 578, 581, 586, 587, 588), absolvent *Mihailovici Sergiu* (1449, 451, 453, 460, 461, 462, 465, 468, 472, 474, 475, 478, 482, 483, 484, 486, 499, 508, 512, 513, 515, 518, 521, 522, 526, 528, 531, 532, 533, 555, 594, 600).

TIMIŞOARA. Şcoala medie de băieţi nr. 1. Clasa VII-a. Coşereanu Radu (592, 593, 596, 597, 598, 600, 601, 602, 604, 605, 606, 607, 608), clasa VIII-a. *Mihăileanu N. Constantin* (1442, 464, 478, 482, 527, 536, 578, 579, 580, E: 597, 598, 600, 605, 611, 614, 615, 618, 634, 636, 637); clasa IX-a. Arsenovici Tiberiu (1442, 449, 458, 460, 461, 465, E: 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 586, 587, 588, 589, 590), Şcoala medie de fete nr. 3, clasa IX-a. Cismariu Ionica (1473, 474, 476, 485, 513, 516, 520, 526, 528, 532, 540, 542), Junger Agata (1474, 486, 493, 494, 524, E: 592, 597, 600, 603, 604, 608).

TURNU MĂGURELE. Clasa X-a .Gazibar Fl. Aurel (1441, 442, 476, E: 578, 592, 597, 600, 603, 604, 606, 608).

TURNU SEVERIN. Clasa VIII-a. Găletuşe Stelian (1474, 476, 478, 484, 485, 486, 545, 546, E: 603, 608); clasa X-a. David Dumitru (1478, 482, 493, 494, 496, 497, 499, 527, 528, 529, E: 592, 598, 600).

TULCEA. Clasa X-a. Ariton Constantin (1501, 506, 513, 515, 516, 520, 521, 522, 526, 529, 531, 533, 534), Iatan Gh. Elena (1479, 480, 483, 506, 509, 524, 532, 539, 533, 554).

URLAŢI (Reg. Ploeşti). Clasa IX-a. Iorgulescu Alexandru (1472, 474, 480, 482, 483, 509, 513, 517, 520, 521, 527, 531, 585, 591, 594, 602, E: 600, 602, 607, 615, 616, 618, P), Stănilă Nicolae (1475, 480, 482, 483, 513, 517, 520, 522, 526, 527, 531, 532, E: 592, 600, 602, 607, 615).

VADUL POŞTII (Buzău). *Ceauşel I. Gheorghe* (1476, 477, 480, 482, 486, 493, 495, 496, 497, 498, 499, 508, 510, 511, 513, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 533, 534, 536, 540, 545, 546, 548, 553, 554, 555, P).

VASLUI (Reg. Iaşi). Floarea Alexandru (Laza) (1441, 527, 531, 534, E: 592, 597, 601, 603, 608, 609).

ZALĂU. Clasa IX-a. Farcaş Beniamin (1526, 529, 531, 540, E: 592, 597, 599, 600, 602, 608).

REZOLVAREA PROBLEMELOR

— La exerciţiile şi problemele propuse pentru *şcoala de 7 ani* se primesc rezolvări numai de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, sau de la elevii anului I ai şcolilor tehnice de maiştri sau din anul I şi II ai şcolilor profesionale sau pedagogice de învăţători. Nu se iau în seamă soluţiile problemelor propuse pentru şcoala de 7 ani dacă sînt trimise de elevii claselor a IX-a, a X-a sau de studenţi şi nici soluţiile trimise în *număr mai mic de zece*, sau necorect redactate. Nu se mai primesc rezolvări de probleme după trecerea a *trei luni* de la publicarea enunţurilor problemelor respective sau de la publicarea eratei, dacă a fost cazul.

În cazul unor probleme propuse care sînt mai dificil de rezolvat sau de la care nu am primit soluţii bune, termenul de primirea soluţiilor se poate prelungi şi acest fapt se anunţă în mod special.

Se mai primesc soluţii la problemele: 1387, 1393, 1400, 1402, 1417, 1422, 1435, 1438, 1450, 1455, 1466, 1469, 1470, 1505, 1507, 1539, 1542, 1548, 1557, 1586, 1608, 1611, 1613, 1615, 1617, 1618, 1626, 1630, 1660, 1661, 1662, 1676, 1700 şi următoarele, iar de la elementar la E: 585, 590, 623, 653 şi următoarele.

Din problemele primite nu se anunţă cele incomplect rezolvate, cele care conţin greşeli cele neglijent redactate, cele care au greşeli de calcul, desene neîngrijit făcute sau sînt copiate după altele.

De asemenea nu se publică problemele propuse de către colaboratori dacă sînt cunoscute sau nu sînt însoţite de *soluţia lor clar redactată*.

ERATĂ

— *La problema 1650* pag. 226 în loc de x^2x se va scrie x^2y

— *Problema E: 687* avînd enunţul incomplect este înlocuită cu E: 687*

— *La problema E: 691* în loc de $\frac{m}{n} >$ se va scrie $\frac{m}{n} <$

La pagina 344 rîndul 20 de jos, în loc de 18 şi 15 se va citi 28 şi 15.

La rezultatul *Olimpiadei Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni* publicat în G.M.F.-B nr. 6, 1955 s-a scris greşit numele unor rezolvitori; dăm rectificările semnalate:

— la pag. 251, rînd 12 de sus, în loc de Donca Victoria se va citi *Donea Victoria*

— la pag. 253, rînd 9 de sus, în loc de Rădăuţi se va citi *Botoşani*

— la pag. 250, rînd 15 de sus, în loc de Atanasiu se va citi *Antoniu*

— la pag. 253 rînd 14 şi 15 în loc de Botoşani se va citi *Bucecea*.

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F. — seria B.*

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele *trei* numere apărute.

— Rezolvitorii pot trimite *într-un plic*, francat după greutate, toate rezolvările făcute timp de una dau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1955, se vor socoti la premiera colaboratorilor pe anul* 1955.

— *Pentru anul* 1955, *G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic decît zece, sau necorect redactate.

— *Problemele ce se propun* de colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *În redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *La rezolvarea problemelor* vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceeași problemă sau au dat generalizări și observații interesante sub formă de note.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a « Olimpiadei matematice și fizice »*, pentru ca apoi, prin revistă, să se poate realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu *tirajul* sau *întîrzierea revistei* se vor face Centrului de difuzare a presei București str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90. *Procurarea* contra cost a unor numere vechi din anii 1953—1955 se poate face de la Oficiul remitent din București, Strada Academiei Nr. 2.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat să *facă cunoscută revista* și altora; și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— *Cititorii și colaboratorii revistei noastre din Capitală și cei în trecere prin București, care doresc să ceară lămuriri în unele probleme, se pot adresa Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. zilnic între orele 8—15. Cu unul din membri secretariatului de redacție se poate lua legătură în zilele de luni între orele 15—18, miercuri între orele 10—13 și simbătă între orele 15—18 la sediul redacției din strada Academiei 14, București — Telefon 4.46.58.*

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi de* **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ioneseu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **S. Şklovski** (lei 6,85)
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu** (lei 6,55).
15. *Soarele şi observarea lui* de **V. V. Şaronov** (lei 7,10)

• • •

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII. TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI TEHNICIENI, ELEVI LEI 5, PENTRU ŞASE NUMERE.

c. 1137 — Intreprinderea Poligrafică nr. 4

Preţul **Lei 1** exemplarul

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

Városi Múzeali
Könyvtár
KOLOZSVÁR

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VI — Noiembrie 1955

11

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 11 — noiembrie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Pe drumul deschis de Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie*	485
2.	*Din istoria dezvoltării matematicei şi a metodelor ei de lucru, de acad. Alexandru Myller-Iaşi*	486
3.	*Rezolvarea şi discuţia geometrică a ecuaţiei* $a \sin x + b \cos x = c$, *de Emil Morţun, profesor emerit al R.P.R., Piteşti*	491
4.	*Ultrasunetele şi aplicaţiile lor, de A. Vogel*	496
5.	*Chestiuni de examen* (1874—1894)	506
6.	*Probleme rezolvate* (1401; 1417; 1419; 1445; 1456; 1462	508
7.	*Probleme propuse* (1895—1914)	512
8.	*Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani* (E: 723 — E: 734)	514
9.	*Olimpiada de matematică şi fizică 1955—1956*	516
10.	*Olimpiada tinerilor matematicieni şi fizicieni 1955—1956*	520
11.	*Rubrică rezolvitorilor de probleme*	524

ANUL VI 11 NOIEMBRIE

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Mészeti Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 11 Noiembrie 1955

PE DRUMUL DESCHIS DE MAREA REVOLUŢIE SOCIALISTĂ DIN OCTOMBRIE

OAMENII muncii de pretutindeni întîmpină cu bucurie cea de-a 38-a aniversare a celui mai măreţ eveniment din istoria omenirii — Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie.

An de an, apare tot mai luminos drumul deschis de Marea Revoluţie din Octombrie, apare tot mai uriaşă însemnătatea acestui eveniment care a schimbat însuşi cursul istoriei lumii. In decurs de 38 ani s-au petrecut transformări nu numai pe vastul teritoriu al Rusiei ţariste, dar şi într-o serie de alte ţări. Pe drumul deschis de Marea Revoluţie din Octombrie păşesc astăzi alături de poporul sovietic, China populară, Germania democrată şi ţările democrat — populare, formînd laolaltă o imensă forţă materială, politică şi morală.

Din primul ceas al existenţei sale Puterea Sovietică a enunţat principiile călăuzitoare în relaţiile ei cu alte state; respectarea reciprocă a integrităţii teritoriale şi a suveranităţii; neagresiunea; neamestec reciproc în treburile interne, sub orice motiv, fie de ordin economic, politic sau ideologic; egalitate şi avantaj reciproc; coexistenţă paşnică. Politica externă a statului sovietic nu s-a abătut niciodată de la acest drum, elaborînd în toate împrejurările soluţiile cele mai juste pentru menţinerea şi consolidarea păcii.

Cea de-a 38-a aniversare a Marei Revoluţii Socialiste din Octombrie găseşte popoarele iubitoare de pace în plină luptă pentru zădărnicirea planurilor provocatorilor la război. Forţele păcii înregistrează succese importante. Politica fermă de pace şi colaborare internaţională promovată de ţările lagărului democrat în frunte cu U.R.S.S. se bucură de tot mai multă simpatie şi de sprijinul popoarelor. Rezultatele pozitive obţinute la conferinţa de la Geneva au însemnat un succes al principiului leninist de coexistenţă paşnică a celor două sisteme — socialist şi capitalist. Şefii guvernelor celor patru puteri au căzut de acord ca miniştrii de externe să se întîlnească la Geneva în cursul lunii octombrie a acestui an pentru a discuta modul în care urmează să fie rezolvate problemele puse în cadrul conferinţei: securitatea europeană şi Germania, dezarmarea şi dezvoltarea contactelor între Est şi Vest. Pe aceiaşi linie — a coexistenţei şi conviefuirii paşnice — s-a ţinut în august 1955, şi cea de a doua conferinţă de la Geneva, unde s-au întrunit savanţii atomişti din 73 de ţări. S-au pus aici laolaltă cunoştinţele lor asupra utilizării energiei atomice în scopuri paşnice, pentru binele omenirii, făcîndu-se astfel un însemnat pas înainte pe calea colaborării ştiinţifice internaţionale.

Pentru poporul romîn ca și pentru întreaga omenire progresistă aniversarea Revoluției din Octombrie constituie o mare sărbătoare. Eliberarea țării noastre de către glorioasa armată sovietică, schimbările fundamentale petrecute în viața poporului nostru și succesele obținute sub conducerea Partidului Muncitoresc Romîn în opera de construcție socialistă, sînt tot atîtea roade ale Revoluției din Octombrie. Mărețele cuceriri ale științei și tehnicii sovietice, ale culturii sovietice au devenit și un bun al poporului nostru.

Revoluția culturală în plină desfășurare în țara noastră, sprijinită de știința și tehnica sovietică a făcut posibilă crearea unui climat favorabil muncii de cercetare științifică. Rezultatele acestei munci s-au putut vedea cu ocazia conferinței de la Geneva unde oamenii de știință din țara noastră au prezentat referate interesante, a Congresului matematicienilor cehoslovaci de la Praga din septembrie a.c., unde lucrările matematicienilor romîni s-au bucurat de un frumos succes. In mai 1956 se va ține la București, congresul matematicienilor romîni la care vom avea o largă participare internațională.

Și în domeniul învățămîntului au fost create noi posibilități de creștere a nivelului de cunoștințe. Dacă ne referim numai la învățămîntul matematicii și fizicii din patria noastră putem constata progresul realizat de tinerii ce se preocupă de aceste discipline, garanție sigură pentru o tot mai bună pregătire a viitoarelor cadre ce vor activa în diferitele ramuri ale muncii și care vor contribui la dezvoltarea unei tehnici înalte necesare operii de construire a socialismului în țara noastră.

Cel de al doilea Congres al Partidului Muncitoresc Romîn convocat pentru ziua de 23 decembrie 1955, va face bilanțul succeselor obținute de poporul romîn sub conducerea partidului și va trasa sarcinile și căile dezvoltării viitoare a țării noastre spre socialism, pentru un nou și puternic avînt al economiei și culturii.

Gazeta Matematică și Fizică, seria B, își manifestă hotărîrea de a întîmpina Congresul cu noi succese în munca de sprijinire a eforturilor tinerilor iubitori de matematică și de fizică și pentru a înregistra o participare mereu în creștere a celor ce colaborează la această publicație.

Cu forțe mereu sporite și cu încredere nemărginită în viitor, pășim sub conducerea partidului spre noi și noi victorii, pe drumul deschis de Marea Revoluție din Octombrie, drumul socialismului și al păcii, al făuririi unei vieți fericite și îmbelșugate pentru toți cei ce muncesc, pe drumul progresului, al științei.

DIN ISTORIA DEZVOLTĂRII MATEMATICEI ȘI A METODELOR EI DE LUCRU

Acad. **ALEXANDRU MYLLER,** Iași

DE curînd Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., a sărbătorit 60 de ani de la apariția primului număr al « Gazetei Matematice »

Este bine, cu această ocazie, să trecem în revistă toate lucrările auxiliare, care, apărute de-a lungul anilor și în diferite locuri, au contribuit, ca și «Gazeta Matematică », la progresul științelor matematice.

După cum o stîncă aruncată în aer din mijlocul unui rîu, un mal consolidat, un canal lateral sau o albie adîncită fac mai liber și mai sigur drumul pe acele ape, tot așa în matematică sînt unele idei, instituții, metode pedagogice, care îndemnînd și orientînd tineretul, ușurează drumul de înaintare al științei.

Astăzi, în regimul nostru de democrație populară, aceste metode tind să joace un rol din ce în ce mai important, și deaceea, poate nu ar fi inutil să aruncăm o privire generală asupra lor, începînd chiar cu geneza lor.

Cuvîntul « seminar » provine de la latinescul « seminarium », care înseamnă răsadniță, loc pentru creșterea plantelor tinere din sămînță. In sens figurat, cel actual, cuvîntul denumește anumite instituții destinate să pregătească tineri pentru diferite cariere.

Cele mai vechi seminarii sînt cele teologice, care datează din 1536; urmează apoi seminariile pedagogice apărute în jurul anului 1700, ca școli pentru formarea de învățători pentru școlile primare și medii.

In învățămîntul superior seminariile sînt instituții atașate la facultăți, mai ales pe lîngă specialitățile teoretice; ele sînt dotate cu biblioteci de specialitate și destinate să deprindă pe studenți *cu utilizarea metodelor științifice de lucru*. Ele pregătesc deci, oameni de știință.

Cuvîntul « știință » trebuie luat aici în sensul adoptat în timpurile moderne, pe care filozoful englez Francis Bacon l-a rezumat în cuvintele: « *ars inveniendi* », meșteșugul de a inventa.

După cum se știe, știința care se preda la Universitate în evul mediu era scolastica. Pe atunci nu se concepea cercetarea liberă a adevărului, pentru că adevărul era un complex de teme de natură religioasă, stabilite dinainte de părinții bisericii și consacrate de soboare. Rolul Universității se mărginea la comentarea și sistematizarea acestor teme, fiind oprită cercetarea fondului lor.

In asemenea condiții, puținele cunoștințe de ordin practic care se predau acolo erau prezentate astfel încît excludeau raționamentul. In Universitatea din Paris, care era considerată reședința scolasticismului, socotitul se învăța după cartea englezului Sacrobosco (Holywood) care nu conținea nicio demonstrație, ci numai reguli. La geometrie se învățau numai cîteva teoreme ale lui Euclid.

De la sfîrșitul evului mediu, studiul teoretic al matematicii se impune încetul cu încetul, iar metodele de predare devin mai raționale în Universitate.

Pentru a înțelege cum era privită și studiată pe atunci matematica, este suficient să evocăm următoarele două fapte.

In 1537, Rheticus, renumit matematician al secolului al XVI-lea, fiind numit profesor la Universitatea din Wittenberg, în cuvîntul de deschidere a cursului de aritmetică, s-a străduit să convingă pe studenți că vor putea învăța ușor adunarea și scăderea. In ce privește operațiile mai grele ale aritmeticii, înmulțirea și împărțirea, profesorul spera că cel puțin studenții mai silitori și mai talentați vor reuși să le înțeleagă.

Al doilea fapt datează din 1790 adică de la sfîrșitul perioadei de pătrundere timidă a matematicilor în școală. Este vorba de un raport întocmit la Königsberg asupra examenului depus de un candidat care dorea să fie numit profesor și director al școlii medii din Saalfeld, în care tinerii erau pregătiți pentru intrare în Universitate. In raport se menționează că respectivul candidat avea în aritmetică o suficientă siguranță, dar în geometrie era mai puțin sigur; astfel nu știa că un unghi înscris în cerc este egal cu jumătatea unghiului la centru corespunzător. La aritmetică rezolvase următoarea problemă: cît face: $4\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}+6\frac{3}{5}+8\frac{5}{6}+3\frac{2}{9}$, găsind rezultatul $25\frac{31}{35}$. Candidatul a reușit la examen și a fost numit profesor de matematică.

Această moderată pătrundere a matematicii în școli este descrisă cu entuziasm în 1758 de renumitul istoric al matematicilor, Montucla. El scrie: « de un mic număr de ani încoace nu mai există aproape nicio Universitate, nici un colegiu, unde matematicile să nu fi pătruns. Asemănătoare luminii zorilor, care se revarsă risipind vraja nopții, matematicile au gonit din acele lăcașuri de cultură opiniile greșite ale filozofiei și mizerabilele dispute ale scolasticii »,

Din acele vremuri, adică de la sfîrşitul evului mediu, pînă la începutul secolului al XIX-lea ştiinţele matematice au făcut mari progrese prin Renaştere, prin însuşirea şi perfecţionarea ştiinţei arabe şi prin cele două mari descoperiri ale secolului al XVII-lea: geometria analitică şi calculul infinitezimal. Toate acestea s-au petrecut însă, aproape în afară de Universitate.

Matematica modernă, izvorîtă din practică, la începutul ei, este opera unor savanţi răsleţi, talente matematice deosebite care se dezvoltă fără îndrumarea vreunei şcoli. In secolul al XVI-lea şi în prima jumătate a secolului al XVII-lea, matematicienii au lucrat aproape izolat, insuficient informaţi, deşi întreţineau între ei o vastă corespondenţă. Renumitele şi curioasele lor desfideri, provocări la luptă ştiinţifică personală, cînd unul propunea altuia o problemă cu care se lăuda că numai el singur era în stare să o rezolve nu a contribuit prea mult la întărirea acestor forţe matematice, prea fărămiţate, care se afirmau izolat.

Concentrarea lor a avut loc în a doua jumătate a secolului al XVII-lea şi în decursul secolului al XVIII-lea, prin academiile care au luat fiinţă. Acestea au avut un rol important încă de atunci; ele au contribuit la promovarea ştiinţei prin apropierea savanţilor, prin publicaţiile pe care le tipăreau şi prin premiile pe care le acordau cîte odată.

In aceşti ani încep să apară cărţi importante de sinteză şi de lămurire a rezultatelor mai noi, cum au fost de exemplu, tratatele lui Euler.

Deşi ca ştiinţă matematica făcuse mari progrese, în şcoală pătrundea după cum am văzut, foarte încet. Trecuseră peste 300 de ani şi deşi nu mai era învăţată pe dinafară după colecţia de reguli a lui Sacrobosco, deşi era prezentată drept o ştiinţă raţională, predarea ei rămînea mai departe neproductivă, nu era animată prin probleme şi exerciţii.

La începutul secolului al XIX-lea lucrurile se schimbă. Revoluţia franceză şi societatea democratică nou apărută a impus alte ideale de viaţă, un ritm nou, mai vioi în cultivarea ştiinţei, ritm care implică o pregătire rapidă a tineretului. Această misiune îi revenea Universităţii care a şi fost transformată în vederea acestui scop, precum şi şcolilor de ştiinţă aplicată înfiinţate pe atunci.

Academia a rămas numai o autoritate de vază în ştiinţă, cu un rol de dirijare a acesteia, o instituţie care consacra presonalităţile mai importante din ştiinţă. Universitatea, în schimb, a căpătat un rol activ de cultivare şi difuzare a ştiinţei libere, neîmpiedicată de tradiţie, a ştiinţei productive.

După ce am trecut în revistă fazele de dezvoltare ale ştiinţei matematice, din evul mediu pînă în secolul al XIX-lea, conducîndu-ne după felul cum s-a manifestat ea, — prin universităţi, savanţi izolaţi, academii, putem trece la analiza metodelor de lucru în matematica inventivă şi la pedagogia creaţiei matematice.

Este adevărat că pentru a înţelege bine matematica trebuie să rezolvi cît mai multe exerciţii şi probleme.

Dar ce este exerciţiul şi ce este problema?

Poate că deosebirea dintre aceşti doi termeni nu este încă deplin clarificată, totuşi se poate preciza: exerciţiul conţine un adevăr pe care trebuie să-l găseşti enunţat evident în teoria la care se referă exerciţiul, fiind un caz particular al acesteia: problema în înţelesul şcolar al cuvîntului, este un exerciţiu mai greu. Ea se referă de asemenea la chestiuni de teorie, reprezentînd un adevăr cuprins în ele, însă nu evident; pentru stabilirea lui sînt necesare mai multe deducţii, o contribuţie personală, un început de gîndire inventivă.

In sensul mai înalt al cuvîntului, problema în matematică este un adevăr pe care-l bănuieşti şi-ţi propui să-l demonstrezi. Este un adevăr nou, legat de altele cunoscute; lanţul de deducţii pe care trebuie să le faci ca să ajungi la confirmarea lui constituie o operă de gîndire personală, originală, care conduce la invenţie.

Existenţa problemelor şe confundă cu viaţa ştiinţei însăşi. Faptul acesta l-a exprimat frumos marele matematician Hilbert, în 1900, prin cuvintele: « O ştiinţă rămîne vie cît timp are abundenţă de probleme; lipsa problemelor înseamnă moartea acelei ştiinţe. Prin rezolvarea

problemelor se oțelește puterea de gîndire a cercetătorului; el găsește metode noi și vederi noi, cîștigă un orizont mai larg și mai liber ».

Exercițiile și problemele, concepute în primul înțeles al cuvîntului, adică acela didactic, au apărut odată cu teoria, cînd autorii au crezut de cuviință să le utilizeze pentru înțelegerea mai bună a operii lor. Astfel, chiar în antichitate, Euclid, pentru a ilustra « Elementele, » a publicat o colecție de probleme în trei cărți care din nenorocire, s-au pierdut.

Pentru ca să placă o problemă, oricît de simplă ar fi, trebuie să conțină o oarecare ingeniozitate, un fapt nou, care surprinde și interesează, iar enunțarea ei trebuie să fie clară și simplă, să nu obosească.

Autorii cărților de probleme pentru școli și facultăți din toate timpurile au căutat să respecte aceste condiții. In antichitate au fost diverse probleme frumoase, iar în epoca Renașterii și mai tîrziu, după invenția geometriei analitice și a calculului diferențial și integral, au apărut altele noi. Unele probleme au rămas celebre, altele numai utile, iar altele au fost lăsate la o parte ca nefolositoare. Au existat probeme care au produs senzație, au fost apreciate și chiar slăvite în vremea lor, dar care mai tîrziu, prin dezvoltarea matematicilor și-au pierdut importanța, au devenit simple probleme didactice. Ele au constituit însă, izvorul principal din care s-au inspirat mai tîrziu autorii cărților de probleme.

A existat și o altă sursă; problemele de examene scrise. La sfîrșitul secolului al XVIII-lea în Anglia și întrucîtva în Franța, la universități și colegii s-a ajuns la convingerea că mijlocul cel mai bun de a aprecia și verifica cunoștințele și capacitatea de gîndire a studenților la examenele pentru diferitele titluri universitare era examenul scris. Candidații trebuiau să rezolve în scris o problemă.

In acest scop, examinatorii au fost nevoiți să compună mereu probleme noi, perfecționate, remarcabile prin ingeniozitatea și eleganța lor, probleme care meritau să fie tipărite

Cărțile de probleme didactice compuse în felul descris au început să fie tipărite pentru matematici elementare, în prima jumătate a secolului al XIX-lea, pentru matematici superioare în a doua jumătate a secolului.

Este remarcabil faptul că în timp ce problemele matematice didactice, destinate să ascută, să oțelească puterea de gîndire a elevilor au fost culese și tipărite relativ tîrziu, cărțile de probleme matematice destinate să placă și să distreze pe amatorii maturi, în afara școlii, sînt mult mai vechi.

Prima carte de acest fel apărută în 1612, este intitulată « Problémes plaisants et delectables », de Bachet de Méziriac. Mai tîrziu au apărut și altele. Sînt culegeri de probleme relativ ușoare în formă cît mai puțin matematică, legate strîns de teoria numerelor, teoria grupelor, combinatorică, topologie, care interesează, trezesc curiozitatea, amuză și preocupă atît pe matematician cît și pe oricare om cult.

In legătură cu problemele amuzante, este nimerit să spunem cîteva cuvinte despre celebrul Papirus egiptean Rhind din Muzeul Britanic, care a fost scris cu mai mult de 1000 de ani înaintea erei noastre și se presupune că este copia unui alt papyrus care data de asemenea de 1000 de ani. Acest papyrus este o colecție de probleme de aritmetică și geometrie care purta titlul: « Instrucțiuni pentru a cunoaște toate lucrurile secrete » La ce nu poate servi matematica noastră !

La începutul secolului al XIX-lea matematicianul Lagrange a inițiat perfecționarea metodelor de dezvoltare a interesului pentru matematică în felul următor.

Școala Politehnică din Paris, înființată în 1794, a contribuit foarte mult la promovarea științelor matematice. In această școală viitorii ingineri în diferite specialități, căpătau o cultură științifică comună, baza teoretică necesară studiilor ulterioare cu caracter practic care se predau în așa zisele școli de aplicație.

Materialul didactic pus la dispoziția acestei școli, organizarea ei, corpul profesoral ales din savanți renumiți, toate au contribuit la înzestrarea elevilor cu temeinice cunoștințe matematice.

Intre aceşti elevi politehnicieni, prin viaţa în comun de internat şi prin pasiunea comună a matematicilor, se stabileau legături puternice de prietenie şi amintiri, pe care voiau să le menţină în ciuda carierii lor viitoare de ingineri şi militari, care îi forţa să trăiască în localităţi depărtate una de alta.

Conducerea şcolii pentru a menţine legătura cu absolvenţii săi, începe să publice în 1805, o revistă periodică « Correspondance sur l'École Polytechnique », care relatează evenimentele principale din şcoală şi activitatea legată de ea; la început revista avea deci, un caracter mai mult informativ decît ştiinţific.

In numărul 4 al « Corespondenţei » în Messidor, anul XVIII, adică în 1805, se publică următoarea scrisoare adresată redactorilor ei de către Lagrange: « Am primit primele trei numere ale « Corespondenţei despre şcoala politehnică », pe care aţi binevoit a mi le trimite Această operă care trebuie să intereseze mai ales persoanele ataşate de şcoală, îmi pare proprie să întreţină o emulaţie printre tineri, dînd publicitate succeselor obţinute de ei în diferite moduri. Dacă această revistă va continua să apară, cred că unul din mijloacele de a o face utilă este de a însera din timp în timp cîteva chestiuni scurte, care să constituie un exerciţiu atît pentru absolvenţi cît şi pentru elevi, şi a căror soluţii pot fi publicate în numărul următor. Anexez un exemplu de o astfel de chestiune şi dacă încercarea reuşeşte aşi putea să mai trimit multe altele ».

Propoziţia de demonstrat era în legătură cu proiecţia stereografică. Redactorii revistei au primit cu recunoştinţă ideea bătrînului matematician Lagrange, iar elevii, printre care şi viitorul mare fizician Fresnel, s-au grăbit să o rezolve.

Acest exerciţiu are pentru noi o mare însemnătate, pentru că este prototipul, modelul original al unei probleme propuse în revistă, a cărei soluţie a fost publicată în alt număr, cu numele rezolvitorului. Ideea care a stat la baza « Gazetei noastre Matematice » de a oţeli judecata matematică a elevilor prin exerciţii şi de a stîrni între ei emulaţie prin publicarea soluţiilor vine de la Lagrange.

O trăsătură nouă şi importantă a matematicilor din secolul al XIX-lea este specializarea. Răspîndirea ei tot mai largă, impusă de nevoile noi şi multiple ale societăţii create de Revoluţia franceză, a determinat o intensificare şi amplificare a acestei ştiinţe la un nivel mai înalt.

In această perioadă au fost tipărite cărţi multe, au apărut primele reviste exclusiv de matematică, numărul savanţilor productivi a crescut, s-au creat ramuri noi de ştiinţă, şi fundat specialităţi noi. In asemenea condiţii un matematiciam cu greu putea să cuprindă totul, iar un student cu atît mai greu. El trebuie condus, orientat, pentru a putea înţelege memoriile grele de matematici.

Acest lucru a fost organizat mai sistematic în Germania, prin înfiinţarea pe lîngă universităţi a seminarilor matematice. Primul seminar a fost întiinţat de Jacobi, la Königsberg în 1825.

Prin citirea în şedinţă, a unor memorii şi prin disertaţii asupra conţinutului lor, mai ales cînd ele sînt alese astfel încît rezultatele unuia se bazează pe cele desvăluite în memoriul citit, precedent, prin comentariile şi explicaţiile profesorului, prin evidenţierea documentată a legăturilor dintre ele, studenţii, văzînd cum au progresat alţii, cum au lucrat savanţii, învăţau arta subtilă a descoperirii matematice.

In modul acesta, studentul şi elevul încep să înţeleagă jocul rafinat al înteligenţei, să surprindă analogii neaşteptate, care conduc la descoperire, să perceapă subtila armonie de la baza matematicii.

REZOLVAREA ŞI DISCUŢIA GEOMETRICĂ A ECUAŢIEI

$$a \sin x + b \cos x = c$$

EMIL MORTUN

profesor emerit al R. P. R, Piteşti.

ACEASTĂ ecuaţie, cunoscută din cursul de trigonometrie, este importantă atît pentru numeroasele metode prin care se poate rezolva cît şi pentru aplicaţiile sale ulterioare. Unele probleme de fizică mai ales de mecanică, precum şi multe probleme de geometrie cînd sînt rezolvate trigonometric ne conduc la ecuaţii de această formă.

Există numeroase metode pentru rezolvarea acestei ecuaţii dintre care voi aminti patru şi apoi voi arăta o metodă geometrică pentru rezolvarea şi discuţia ei.

Metoda I. Se scrie ecuaţia sub forma:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

şi se notează $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ (1)

Unghiul auxiliar φ este determinat de relaţia (1) care are loc pentru orice valori ale lui a şi b, deoarece intervalul de variaţie al tangentei este $(-\infty, +\infty)$. Ecuaţia dată devine succesiv:

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}; \qquad \sin x + \frac{\sin \varphi \cos x}{\cos \varphi} = \frac{c}{a}$$

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi \tag{2}$$

Notăm cu α unghiul al cărui sinus este $\frac{c}{a} \cos \varphi$. Ecuaţia (2) devine

$$\sin (x + \varphi) = \sin \alpha$$

care ne conduce la soluţiile următoare:

$$x_1 = 2k\pi + \alpha - \varphi; \qquad x_2 = (2k + 1)\pi - (\alpha + \varphi)$$

Rezolvarea acestei ecuaţii este posibilă numai dacă coeficienţii săi satisfac o anumită relaţie.

Observăm că expresia: $\frac{c}{a} \cos \varphi$ reprezintă un sinus şi deci rezolvarea ecuaţiei este posibilă numai dacă:

$$-1 \leqslant \frac{c}{a} \cos \varphi \leqslant 1$$

sau

$$\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \leqslant 1 \tag{3}$$

Însă, fiindcă $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$; $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$.

Înlocuind în (3) această valoare găsim:

$$\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2} \leqslant 1 ; \frac{c^2}{a^2+b^2} \leqslant 1 ; \; a^2+b^2 \geqslant c^2.$$

Ecuaţia se poate deci rezolva numai dacă coeficienţii săi satisfac relaţia de mai sus.

Observăm că această condiţie de posibilitate a rezolvării este independentă de semnele coeficienţilor a, b şi c deoarece ei figurează numai la puterea 2-a.

M e t o d a II-a. Folosim formulele raţionale:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} ; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Înlocuim în ecuaţia dată şi găsim succesiv:

$$a\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = c$$

$$(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} - (b-c) = 0$$

ceea ce dă:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$$

cu condiţia ca $a^2+b^2-c^2 \geqslant 0$ sau $a^2+b^2 \geqslant c^2$

Semnul egalităţii corespunde cazului cînd cele 2 soluţii se confundă.

Am regăsit condiţia de posibilitate aflată prin metoda precedentă.

M e t o d a III. Înlocuim $\sin x$ şi $\cos x$ în funcţie de $\operatorname{tg} x$

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} ; \quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

Ecuaţia dată devine:

$$\frac{a\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{b}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = c \; ; \; a\operatorname{tg} x + b = \pm c\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$(a^2-c^2)\operatorname{tg}^2 x + 2ab\operatorname{tg} x + b^2 - c^2 = 0 \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-ab \pm c\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2-c^2}$$

Condiţia de posibilitate fiind aceeaşi $a^2+b^2 \geqslant c^2$.

Această metodă este mai complicată decît primele două deoarece din cauza radicalilor sîntem obligaţi să efectuăm o ridicare la patrat, ceea ce introduce soluţii străine în ecuaţie. Soluţiile aflate prin rezolvarea ecuaţiei (4) corespund ecuaţiilor:

$$a \sin x + b \cos x = + c$$

şi

$$a \sin x + b \cos x = - c$$

Metoda IV. Folosim formula:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Ecuaţia dată se transformă în următoarea:

$$a \sin x \pm b \sqrt{1 - \sin^2 x} = c$$

sau

$$(a^2 + b^2) \sin^2 x - 2ac \sin x + c^2 - b^2 = 0 \qquad (5)$$

$$\sin x = \frac{ac \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}, \text{ dacă } a^2 + b^2 \geqslant c^2.$$

Această metodă, ca şi precedenta, are neajunsul că soluţiile obţinute prin rezolvarea ecuaţiei (5) verifică ecuaţiile

$$a \sin x + b \cos x = c$$

$$a \sin x - b \cos x = c$$

Urmează deci, ca după rezolvarea ecuaţiei să verificăm soluţiile aflate pentru a stabili care din ele verifică o ecuaţie şi care verifică cealaltă ecuaţie.

Ecuaţia (5) fiind formată în raport cu sin x, vor fi acceptate numai soluţiile cuprinse între -1 şi $+1$.

Această condiţie suplimentară nu complică însă rezolvarea ecuaţiei fiindcă, după cum vom arăta acum, ea este îndeplinită oricare ar fi coeficienţii a, b, c.

Într-adevăr, notăm: $\sin x = y$ şi primul membru al ecuaţiei astfel obţinute cu $f(y)$. Vom obţine:

$$f(y) = (a^2 + b^2) y^2 - 2acy + c^2 - b^2 = 0$$

$$f(1) = a^2 + b^2 - 2ac + c^2 - b^2 = (a - c)^2$$

$$f(-1) = a^2 + b^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2$$

Deci:

$$(a^2 + b^2) f(1) = (a^2 + b^2) (a - c)^2 > 0$$

$$(a^2 + b^2) f(-1) = (a^2 + b^2) (a + c)^2 > 0$$

ceea ce arată că -1 şi $+1$ sînt exterioare intervalului rădăcinilor ori care ar fi a, b, c.

Aşa dar, şi prin această metodă singura condiţie este:

$$a^2 + b^2 \geqslant c^2$$

Din cele expuse pînă aici se vede că primele două metode sînt de preferat faţă de ultimele două.

Voi arăta acum o metodă geometrică pentru rezolvarea şi discuţia ecuaţiei: $a \sin x + b \cos x = c$.

Pe laturile unui unghi drept AOB luăm segmentele:

$$OA = a \quad OB = b \quad AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Prin vîrful O al unghiului drept ducem o dreaptă oarecare OA_1 care formează cu OA un unghi $AOA_1 = x$. Proiectăm punctele A şi B pe OA_1 în A_1 şi B_1. Triunghiurile dreptunghice OAA_1 şi OBB_1 dau:

$$AA_1 = a \sin x \text{ şi } BB_1 = b \cos x$$

$$AA_1 + BB_1 = a \sin x + b \cos x$$

Paralela dusă prin B la OA_1 intersectează pe AA_1 în C_1

$$A_1C_1 = BB_1 \text{ şi deci: } AA_1 + BB_1 = AA_1 + A_1C_1 = AC_1$$

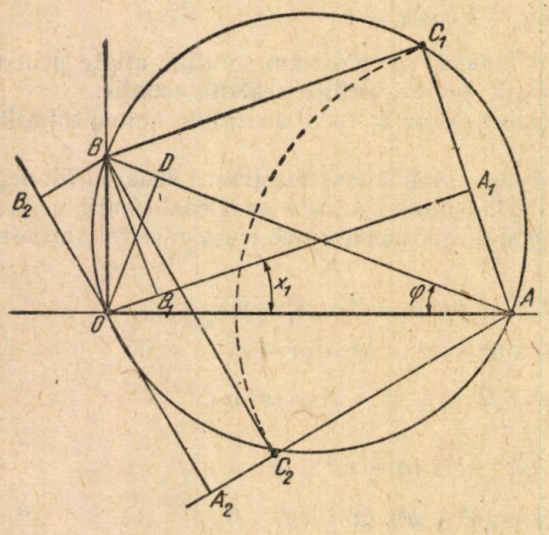
$$AC_1 = a \sin x + b \cos x$$

Unghiul x, pentru a fi o soluţie a ecuaţiei date, trebuie să satisfacă egalitatea:

$$a \sin x + b \cos x = c \quad \text{deci: } AC_1 = c$$

Observăm că patrulaterul OAC_1B este inscriptibil într-un cerc descris pe AB ca diametru.

Dreapta OA_1 fiind perpendiculară pe AC_1, unghiul $x = AOA_1$ va fi cunoscut, cînd vom avea direcţia dreptei AC_1, ceea ce se reduce la construcţia triunghiului ABC_1. Triunghiul ABC_1 este dreptunghi şi are ipotenuza $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ şi cateta $AC_1 = c$, deci se poate construi.



Urmează următoarea construcţie grafică a unghiului x, care este soluţia ecuaţiei date.

Unim pe A cu B; pe AB ca diametru se descrie un cerc. Apoi, din A ca centru cu $AC_1 = c$ ca rază, descriem un cerc care taie cercul de diametru AB în C_1 şi C_2.

Aceste două puncte corespund celor două soluţii, mai mici ca 360°, ale ecuaţiei date.

Într-adevăr, vom obţine soluţiile ecuaţiei coborînd din O perpendicularele OA_1 şi OA_2 respectiv pe AC_1 şi AC_2. Soluţiile ecuaţiei sînt unghiurile: $x_1 = \sphericalangle AOA_1$ şi $x_2 = \sphericalangle AOB_2$ format de OA şi de prelungirea lui OA_2 (adică OB_2) cu OA.

(Unghiul x_2 s-a format prin prelungirea lui OA deoarece unghiurile x_1 şi x_2 sînt măsurate începînd de la OA, în sensul pozitiv ales în trigonometrie).

Problema admite în general, două soluţii ce corespund punctelor C_1 şi C_2. Prima soluţie, în cazul figurii noastre unde C_1 şi C_2 sînt puncte situate de o parte şi de alta lui OA, este

$$x_1 = \sphericalangle AOA_1$$

Într-adevăr,

$$AC_1 = AA_1 + BB_1 = c \quad \sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle OBB_1 = x \tag{6}$$

având laturile lor respectiv perpendiculare. Triunghiurile dreptunghice AOA_1 și BOB_1 ne dau:

$$AA_1 = a \sin x_1 \quad \text{și} \quad BB_1 = b \cos x_1$$

Înlocuind aceste rezultate în (6) găsim:

$$a \sin x_1 + b \cos x_1 = c$$

relație care ne arată că x_1 este o soluție a ecuației date.

A doua soluție este:

$$x_2 = \sphericalangle AOB_2$$

Pentru a demonstra această afirmație ducem dreptele AA_2 și BB_2 perpendiculare pe A_2B_2 și deci paralele între ele.

Dreapta BC_2 este perpendiculară pe AC_2 deoarece unghiul AC_2B este drept fiind înscris într-un semicerc. Urmează că BC_2 este paralelă cu A_2B_2 și deci patrulaterul A_2B_2BC este un dreptunghi. Rezultă că:

$$BB_2 = A_2C_2; \quad AC_2 = AC_1 = c; \quad AC_2 = AA_2 - A_2C_2 = c \tag{7}$$

Din triunghiul dreptunghi OAA_2 deducem:

$$AA_2 = a \sin (AOA_2); \quad AA_2 = a \sin (\pi - x_2) = a \sin x_2$$

Din triunghiul dreptunghi OBB_2 deducem:

$$\sphericalangle OBB_2 = \sphericalangle AOA_2 = \pi - x_2$$

deoarece au același complement, unghiul BOB_2.

$$BB_2 = b \cos (\pi - x_2) = -b \cos x_2$$

Însă, după cum am arătat mai sus,

$$BB_2 = A_2C_2 = -b \cos x_2$$

Înlocuind în relația (7) găsim:

$$a \sin x_2 - (-b \cos x_2) = c$$

sau

$$a \sin x_2 + b \cos x_2 = c$$

Ceea ce arată că și unghiul $x = \sphericalangle AOB_2$ este o soluție a ecuației date.

Din cele spuse rezultă următoarea rezolvare geometrică a ecuației $a \sin x + b \cos x = c$:

Pe laturile unui unghi drept AOB luăm segmentele $OA = a$ și $OB = b$, iar pe AB ca diametru descriem un cerc. Apoi din A ca centru descriem un cerc având $AC_1 = c$ ca rază. Acest cerc taie cercul de diametru AB în C_1 și C_2. Unim pe A cu C_1 și C_2, iar din O ducem perpendicularele OA_1 și OA_2 pe AC_1 și pe AC_2. Soluțiile ecuației sînt unghiurile:

$$\sphericalangle OAA_1 = x_1; \quad \sphericalangle AOB_2 = x_2$$

formate de aceste perpendiculare cu OA.

Discuția geometrică.

Determinarea geometrică a unghiurilor x_1 și x_2 depinde de construirea triunghiului dreptunghi ABC_1. Această construcție este posibilă numai dacă:

$$AB \geqslant AC_1 \text{ sau } \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant c \; ; \quad a^2 + b^2 \geqslant c^2$$

În acest caz, după cum s-a arătat, problema admite două soluții.

Dacă $AB = AC_1$ sau $\sqrt{a^2 + b^2} = c \; ; \; a^2 + b^2 = c^2$ atunci cercul descris din A ca centru și cu raza egală cu c, este tangent în B_1 cercului de diametru AB și cele două puncte C_1 și C_2 se confundă cu punctul B, iar dreptele AC_1 și AC_2 se confundă cu AB.

În acest caz, problema admite o singură soluție reprezentată prin unghiul format de OA cu perpendiculara OD pe AB, adică prin unghiul

$$AOD = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

unghiul φ fiind definit prin relația

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

dedusă din triunghiul dreptunghi AOB. Dacă $AB < AC_1 = c$ atunci cercul cu centrul A și raza c nu mai intersectează cercul de diametru AB în nici un punct și problema nu mai admite nici o soluție. Deci dacă:

$a^2 + b^2 > c^2$, 2 soluții

$a^2 + b^2 = c^2$, 1 soluție

$a^2 + b^2 < c^2$, 0 soluții

Se observă concordanța între rezultatele discuției trigonometrice și acelei geometrice.

ULTRASUNETELE ȘI APLICAȚIILE LOR

A. VOGEL

DUPĂ cum ochiul percepe undele electromagnetice numai într-un interval foarte îngust al spectrului, de la $7 \cdot 10^{-5}$ cm pînă la $4 \cdot 10^{-5}$ cm, deși acesta se întinde de la undele kilometrice de radio pînă la razele γ a căror lungime de undă este de $10^{-9} - 10^{-11}$cm, tot așa urechea noastră percepe sunetele într-un interval foarte îngust de frecvențe. Acest interval variază de la 16 Hz pînă la aproximativ 20 000 Hz, ceea ce corespunde unor lungimi de undă de ordinul metrilor.

Sunetele a căror frecvență este mai mare de 20 000 Hz se numesc *ultrasunete.* Limitei inferioare a ultrasunetelor îi corespund lungimile de undă: $\lambda = 1{,}6$ cm în gaze, $\lambda = 6$ cm în lichide și $\lambda = 20$ cm în solide, dimensiuni foarte mari față de lungimile de undă corespunzătoare limitei superioare a ultrasunetelor obținute pînă acum ($\lambda = 0{,}6$ μ în gaze, $\lambda = 2{,}4\mu$ în lichide și $\lambda = 8$ μ în solide).

Pentru obținerea unor astfel de sunete sînt necesare forțe foarte puternice, capabile să pună în oscilație membrane sau diapazoane cu o amplitudine corespunzătoare.

Sunetele a căror frecvență este mai mică de 16 Hz se numesc *infrasunete*; ele prezintă o importanță mai mică decît ultrasunetele, care datorită proprietăților lor sînt utilizate mult în ultimul timp, atît în știință cît și în tehnică.

Această împărțire este valabilă numai pentru oameni, deoarece unele animale au proprietatea de a recepționa sunetele într-un interval mai mare de frecvențe. De exemplu, cîinii, pisicile, pot percepe ultrasunete pînă la 40 000 Hz. S-a constatat de asemenea, că animalele pe lîngă proprietatea de a percepe ultrasunetele o au și pe aceea de a le emite. Astfel,liliecii se pot orienta cu precizie în întuneric datorită faptului că emit impulsuri de unde ultrasonore. Fiecare emisie durează aproximativ 5 miimi de secundă, fiind urmată de o perioadă de tăcere. În apropierea unui obstacol numărul semnalelor emise crește. Ultrasunetele sînt emise de liliac datorită unei structuri speciale a coardelor vocale și tot prin ele le recepționează. Frecvența ultrasunetelor emise de lilieci este de aproximativ, 55 000 Hz.

Există mai multe metode de producere a ultrasunetelor: metode mecanice, termice și electromecanice.

Metodele mecanice și termice sînt folosite din ce în ce mai puțin, deoarece ultrasunetele obținute prin ele au frecvențe relativ joase și energii mici. Cele mai folosite metode de producere a ultrasunetelor sînt cele electromecanice. Ele se bazează pe două fenomene cunoscute: fenomenul magnetostrictiv și fenomenul piezoelectric.

1. Fenomenul magnetosctrictiv

În 1847, Joule a observat că o serie de metale și în special, unele aliaje introduse într-un cîmp magnetic, se contractă și se dilată. Această proprietate o are nichelul, cobaltul, fierul, etc. și aliajele: invarul (36% Ni, 64% Fe), monelul (68% Ni, 28% Cu și cîteva procente Mn, C, Fe și Si), adică metalele care prezintă un magnetism remanent aproape nul. Toate aceste metale prezintă fenomenul descris mai sus, adică fenomenul magnetostrictiv direct.

Introducînd de exemplu, o bară din aceste metale într-un cîmp magnetic alternativ, frecvența cu care aceasta își micșorează lungimea este dublă față de frecvența curentului alternativ care crează cîmpul, dacă bara nu a fost în prealabil magnetizată, și egală cu frecvența curentului, dacă bara a fost magnetizată. Această variație de lungime a barei reprezintă aproximativ 10^{-6} cm din lungimea ei inițială.

Fenomenul magnetostrictiv nu depinde de orientarea cîmpului magnetic dacă bara nu a fost înainte magnetizată; el depinde de natura materialului, de starea lui magnetică, de temperatură și de cele mai multe ori, de tratamentul la care a fost supus materialul înainte de a fi introdus în cîmp. Fenomenul magnetostrictiv depinde foarte mult de temperatură și anume, scade cu temperatura, dispărînd complet la punctul Curie *).

Dacă bara a fost magnetizată înainte de a fi introdusă în cîmp ea se va contracta și alungi atunci cînd sensul cîmpului magnetic este contrar sensului magnetizării inițiale a barei.

---

*) Temperatura deasupra căreia o substanță feromagnetică își pierde proprietățile feromagnetice.

Intensitatea fenomenului magnetostrictiv este maximă cînd frecvenţa curentului alternativ în al cărui cîmp se introduce bara este egală cu frecvenţa proprie a barei. Frecvenţa proprie, adică frecvenţa de rezonanţă a unei bare de nichel fixată la mijloc şi supusă unui cîmp magnetic paralel cu lungimea ei, se determină din formula următoare:

$$= \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

unde l este lungimea barei, n este numărul armonicelor, E modulul de elasticitate (în dyne/cm) şi ρ densitatea materialului din care este făcută bara.

În cazul unei bare de nichel care vibrează cu frecvenţa fundamentală, deci pentru care $n = 1$, relaţia care dă frecvenţa de rezonanţă devine:

$$\nu = \frac{2{,}43.10^5}{l} \text{ Hz.}$$

În această formulă, l este lungimea barei în centimetri.

Fenomenul magnetostrictiv prezintă şi efectul invers: prin alungirea şi scurtarea lor, bare din aceste metale magnetizate în prealabil, produc variaţii ale magnetizării lor.

2. Generatorul magnetostrictiv

Cel mai simplu generator magnetostrictiv este format dintr-o bară de nichel introdusă într-o bobină prin care circulă curent alternativ. Sub acţiunea cîmpului magnetic bara se va scurta şi alungi în ritmul alternanţelor curentului care circulă prin bobină.

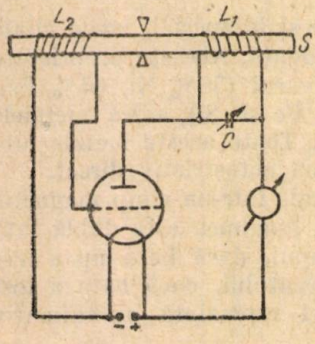


Fig. 1

În fig. 1 este prezentat montajul unui generator magnetostrictiv. În acest montaj, bara metalică are unul din capete introdus în bobina circuitului oscilant al curentului anodic L_1, iar al doilea, într-o altă bobină în circuitul grilă-filament L_2.

Sub acţiunea deformaţiilor barei se induc în bobina L diferenţe de potenţial care comandă prin grilă curentul anodic; la rîndul său acesta acţionează asupra barei şi aşa mai departe. Magnetizarea iniţială o face fie curentul anodic iniţial, fie un magnet permanent, adus în apropierea barei metalice.

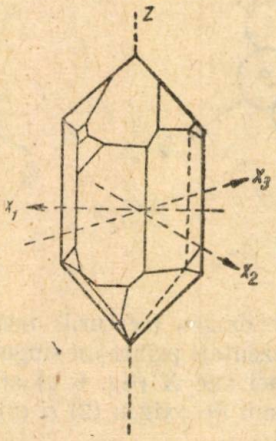
Faptul că efectul magnetostrictiv scade cînd temperatura creşte este foarte important pentru generatorul magnetostrictiv, deoarece în timpul lucrului bara se încălzeşte foarte mult, ceea ce reduce frecvenţa ei fundamentală, din care cauză se produce un dezacord între oscilaţiile barei şi cele ale curentului alternativ, deci o tulburare a condiţiilor normale de lucru.

Din această cauză utilizarea generatorilor magnetostrictivi este limitată în cazurile cînd trebuie obţinute ultrasunete de frecvenţe înalte pentru ultrasonarea solidelor. Limita frecvenţelor de lucru normal al generatorilor magnetostrictivi este de aproximativ 60 kHz. Aceşti generatori prezintă însă avantajul de a produce ultrasunete foarte puternice fără a necesita tensiuni înalte.

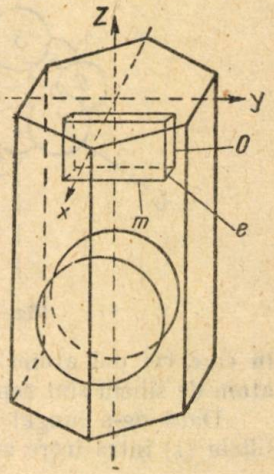
3. Fenomenul piezoelectric

Fenomenul piezoelectric direct constă în faptul că anumite cristale (de exemplu cuarţ, turmalină, sare Seignette, blendă etc.) supuse după direcţii anumite unor solicitări mecanice (compri nare sa u tracţiune) prezintă pe unele feţe sarcini electrice. Aceste sarcini sînt proporţionale cu mărimea cauzei care le-a provocat. Feţele respective îşi schimbă semnul sarcinii electrice dacă în locul unei comprimări se exercită o tracţiune, sau invers, dacă în locul unei tracţiuni se exercită o comprimar .

Cristalele care prezintă fenomenul piezoelectric sînt corpuri anizotrope, adică au proprietăţi diferite în direcţii diferite. Un cristal de cuarţ de exemplu (fig. 2) are pe lîngă o axă optică de simetrie Z şi trei axe de simetrie polare X_1, X_2, X_3. Extremităţile unei axe polare nu sînt echivalente; dacă rotim cristalul cu 180° în jurul une axe perpendiculare pe axa polară, cristalul nu se suprapune. O comprimare sau o tracţiune pe direcţia unei axe polare face să apară pe feţele perpendiculare pe ea, sarcini electrice de semn contrar.



Fg. 2



Fg. 3

Placa sau lama de cuarţ va trebui deci, să fie astfel tăiată din cristal, încît o pereche de feţe să fie perpendiculare pe o axă polară (numită şi axă electrică). În fig. 3 sînt redate două posibilităţi de tăiere a cristalului de cuarţ: sub formă de placă paralelipipedică sau sub formă de disc. În ambele cazuri două dintre feţele plăcii sînt perpendiculare pe axa X. Lama paralelipipedică are muchiile paralele cu axele X, Y. şi Z. Axa Y se numeşte axă mecanică.

O comprimare în direcţia unei axe electrice face să apară sarcini electrice pozitive, respectiv negative, pe feţele perpendiculare pe această axă; avem de-aface cu fenomenul pi zoelectric direct longitudinal.

O tracţiune în direcţia axei mecanice produce fenomenul piezoelectric direct, transversal. Dacă se efectuează o tracţiune în primul caz şi o comprimare în al doilea caz semnul sarcinilor electrice pe suprafeţe se in erseză

În cazul fenomenului piezoelectric invers dacă facem să apară sarcini electrice de semn contrar pe cele două feţe, atunci placa suferă deformări: o dilatare în direcţia axei electrice, dacă la efectul direct sarcinile apăreau pe aceleaşi feţe prin comprimare în această direcţie, şi o comprimare în cazul invers.

În direcţia axei optice (Z) fenomenul piezoelectric nu se produce.

Apariţia fenomenului piezoelectric la cristalul de cuarţ se datoreşte formei reţelei cristaline, sau mai precis, aranjării atomilor de siliciu şi de oxigen în moleculele de cuarţ. În scara microscopică, privind în lungul axei Z se observă că atomii de siliciu sînt aranjaţi în aşa fel încît formează o direcţie de rotaţie heli-

coidală. În fig. 4 este redată o celulă de cuarț. Atomul de siliciu (3) este situat mai jos decît atomul de siliciu (2), iar atomul de siliciu (2) mai jos decît atomul de siliciu (1). Atomii de oxigen care în figură sînt reprezentați prin cercuri mai mici se găsesc între atomii de siliciu.

După teoria fizicianului Bragg, fiecare atom de siliciu are două sarcini pozitive iar un atom de oxigen o sarcină negativă. Într-o celulă toate sarcinile sînt neutralizate reciproc, astfel încît celula este neutră din punct de vedere electric. Pentru simplificare considerăm molecula de cuarț ca în fig. 5,

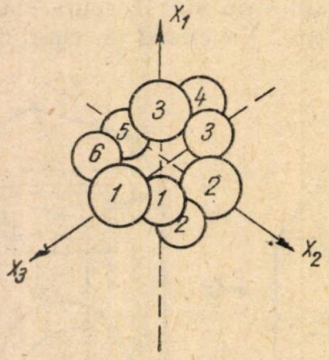


Fig. 4

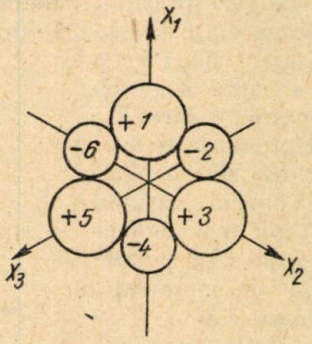


Fig. 5

în care cei doi atomi de oxigen (cercurile mai mici) repartizați pentru fiecare atom de siliciu sînt reprezentați printr-un singur cerc.

Dacă de-a lungul unei axe X (fig. 6 a) are loc o comprimare, atomul de siliciu (1) intră între atomii de oxigen (2) și (6), iar atomul de oxigen (4) între atomii de siliciu (3) și (5). Astfel apare pe suprafața A o sarcină negativă datorită apropierii celor doi atomi de oxigen, iar pe suprafața B o sarcină pozitivă. Apariția acestor sarcini pe cele două electrode A și B reprezintă tocmai fenomenul piezoelectric longitudinal direct. Dacă după cum se vede în fig. 6 b, compresiunea se exercită perpendicular pe axa X atomii de siliciu (3) și oxigen (2), respectiv de siliciu (5) și oxigen (6) se mișcă spre centru și pe electrozii C și D nu apar sarcini deoarece în apropierea celor două suprafețe C și D vor fi un număr egal de sarcini pozitive și negative. Sarcinile electrice apar de asemenea pe suprafețele A și B așezate la capetele axei electrice X, însă repartizate invers

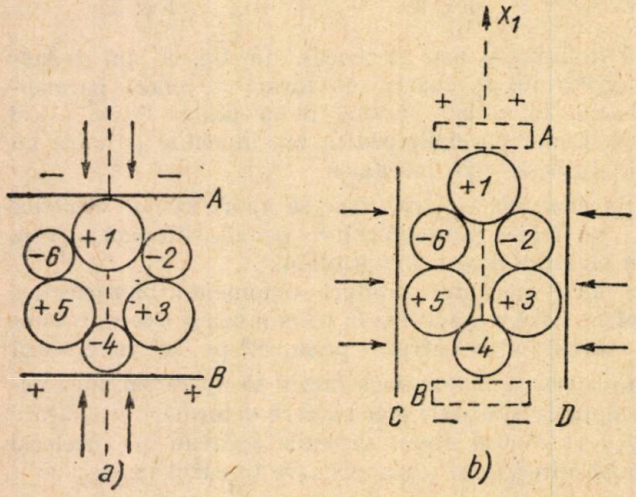
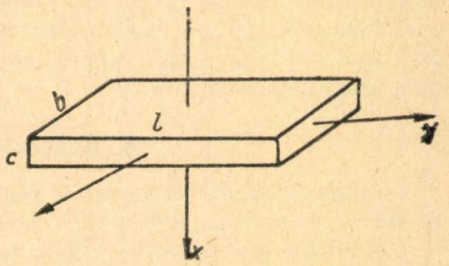


Fig. 6

decît în primul caz, deoarece atomii de siliciu (1) şi de oxigen (4) se deplasează în afară. În acest caz se obţine efectul piezoelectric transversal direct.

Sarcina apărută pe feţele cristalului este direct proporţională cu forţa mecanică aplicată $e = dF$, unde F este forţa în dyne, iar d este o constantă numită constanta piezoelectrică a cărei valoare în cazul plăcii de cuarţ « în tăietură X » este $d = 6{,}26 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} \mathrm{s}$.

Am descris mai sus fenomenul piezoelectric direct. În cazul fenomenului piezoelectric invers dacă se introduce un cristal de cuarţ într-un cîmp electric astfel încît direcţia cîmpului să corespundă unei axe piezoelectrice, el se dilată şi se contractă în anumite direcţii. Dilatarea de-a lungul unei axe electrice se produce cînd pe electrozii aşezaţi pe feţele perpendiculare pe axa electrică sînt un număr egal de sarcini negative şi pozitive care la efectul piezoelectric direct apar prin compresiune în direcţia axei respective. În cazul fenomenului invers, ca şi în cazul fenomenului direct, se observă două efecte parţiale: transversal şi longitudinal.



Fig, 7

Efectul longitudinal se obţine cînd se introduce placa de cuarţ (fig. 7), între plăcile unui condensator care are electrodul pozitiv aplicat pe faţeta bl, iar cel negativ pe faţeta opusă. În acest caz cristalul se dilată în direcţia axei X.

Aceiaşi poziţie a electrozilor provoacă o comprimare în direcţia axei Y, deci efectul piezoelectric transversal. Mărimea unei dilatări, respectiv a unei comprimări pentru o diferenţă de potenţial U pe feţele opuse se poate calcula astfel:

1) pentru efectul longitudinal: $\delta = dU$, unde d este, după cum am mai spus, constanta sau modulul piezoelectric al cuarţului;

2) pentru efectul transversal:

$$\delta = db/cU$$

În cazul efectului longitudinal, cînd deformarea mecanică a cristalului este independentă de dimensiunile plăcilor şi dependentă numai de tensiunea aplicată, dacă se aplică o tensiune de 3 000 V se obţine o dilatare sau o comprimare a plăcilor perpendiculare pe axa X de $6{,}36 \cdot 10^{-7}$ cm. După cum se vede, deformaţiile sînt foarte mici, de dimensiunile angströmilor, pentru tensiuni de mii de volţi şi de aceea se pun în evidenţă foarte greu.

Limita superioară a frecvenţei care se poate obţine cu ajutorul unei lame de cuarţ vibrînd cu frecvenţa fundamentală este de aproximativ 50 000 Hz. De aceea, pentru obţinerea unor frecvenţe mai înalte cu o placă de cuarţ anumită, trebuie excitate armonicile ei sau folosit în locul cuarţului o altă substanţă cu calităţi asemănătoare cu ale acestuia şi anume, turmalina. Aceasta avînd un modul de elasticitate mai mare poate fi tăiată în plăci mai subţiri, deci poate vibra cu o frecvenţă mai înaltă.

Frecvenţa fundamentală cu care vibrează placa de cuarţ se poate determina din relaţia:

$$\nu = \frac{n}{2l} v$$

unde v este viteza de propagare a undelor prin cuarţ, care în cazul undelor longitudinale ce iau naştere într-o placă de cuarţ vibrînd în grosime este de 5 600 m/s; n — numărul armonicilor egal cu 1 în acest caz; iar l — grosimea plăcii. Introducînd toate aceste valori în relaţia care dă frecvenţa fundamentală obţinem:

$$\nu = \frac{2.880}{l} \text{ kHz.}$$

După tăiere placa de cuarţ trebuie şlefuită; această operaţie se face cu maşini speciale a căror construcţie deşi nu este complicată este destul de greu de realizat deoarece o diferenţă de nivel a suprafeţei plăcii de cuarţ numai de 1μ poate produce distrugerea ei cînd este introdusă într-un cîmp electric.

Înainte de a fi introdusă în montajul generatorului, placa de cuarţ trebuie metalizată, adică pe faţetele ei trebuie aplicat un strat foarte subţire de metal care formează cei doi electrozi menţionaţi mai sus. Cuarţul se poate metaliza prin mai multe metode: prin depunere chimică, prin pulverizare catodică sau prin simplă galvanizare.

4. Generatorul piezoelectric

Generatorii cu cuarţ care se folosesc la producerea ultrasunetelor se împart în două categorii: montaje în oscilaţie şi montaje în rezonanţă.

Montajul reprezentat în fig. 8, are placa de cuarţ introdusă în circuitul grilă-anodă, iar al doilea, în circuitul grilă-catodă. Apariţia oscilaţiilor este indicată de un ampermetru sau miliampermetru introdus în circuitul anodic. Condensatorul C serveşte la acordarea circuitului oscilant cu frecvenţa proprie a plăcii

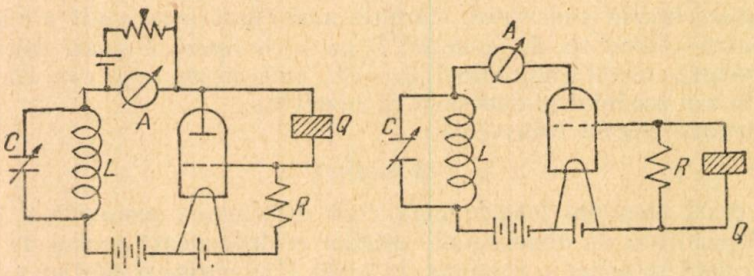


Fig. 8

de cuarţ. La rezonanţă instrumentul de măsurat indică curentul maxim. La unele montaje cuarţul are nu numai rolul de a produce oscilaţiile, dar şi acela de stabilizator al frecvenţei. De aceea generatorii în oscilaţie produc oscilaţii de frecvenţe mai stabilizate decît montajele în rezonanţă, la care cuarţul este legat în paralel cu condensatorul circuitului oscilant.

Montajele în rezonanţă se folosesc în special atunci cînd trebuie obţinute energii ultrasonore puternice pentru ultrasonarea lichidelor şi solidelor.

În ultimul timp, în afară de cuarţ, turmalină şi sare Seignette au început să fie folosite şi alte substanţe dintre care cea mai nouă este titanatul de bariu, descoperit în 1944 de savanţii sovietici V u l şi G o l d m a n. Interesant la această substanţă este faptul că în stare naturală ea nu prezintă proprietăţi piezoelectrice pe care le capătă abia cînd este introdusă într-un cîmp electric

alternativ, în sens invers sensului în care s-a făcut polarizarea prin aplicarea tensiunii continue. Din această cauză, din titanat de bariu se pot tăia plăci de diferite forme.

Proprietăţile ultrasunetelor

Deoarece ultrasunetele au lungimea de undă mică, de ordinul centimetrului sau chiar mai mică, adică mult mai mică decît dimensiunile izvorului care le produce, ele se propagă sub forma unui fascicul dirijat, ca şi lumina. Acest lucru nu este posibil în cazul sunetului audibil deoarece pentru a obţine un fascicul de unde dirijat, dimensiunile izvorului care-l produc trebuie să fie foarte mari, mult mai mari decît lungimea de undă a sunetului pe care-l emite şi care în cazul sunetului audibil este de ordinul metrului.

Spre deosebire de sunetele audibile, ultrasunetele, din cauza frecvenţei lor ridicate au o energie mare care nu se poate obţine în cazul sunetelor audibile deoarece amplitudinea unor astfel de vibraţii ar fi incompatibilă cu proprietăţile elastice ale materiei.

Din cauza frecvenţelor înalte ultrasunetele sînt foarte repede absorbite de mediul prin care se propagă. Fizicianul rus P. N. Lebedev a calculat că, pentru a fi absorbite în imediata vecinătate a izvorului care le produce, ultrasunetele trebuie să aibă o frecvenţă de aproximativ 5 000 000 Hz.

Ultrasunetele sînt puternic absorbite de aer; un strat destul de subţire de aer le poate absorbi complet; în schimb, sînt absorbite incomparabil mai puţin de lichide şi solide.

O altă proprietate a ultrasunetelor — inaudibilitatea — permite utilizarea lor în toate domeniile vieţii fără a deranja pe cei care lucrează cu ele.

Aplicaţiile ultrasunetelor

Deşi ultrasunetele au fost cunoscute cu mult înainte de a fi explicată natura lor de către fraţii Curie, aplicarea lor în tehnică a început abia de curînd. Acest lucru se datoreşte în primul rînd, dezvoltării radiotehnicei care a făcut posibilă obţinerea hipersunetelor, adică a vibraţiilor mai mari de 100 000 000 Hz.

După cum am mai menţionat, datorită diferenţei mari între lungimea de undă a ultrasunetului şi dimensiunile izvorului care-l produce se pot obţine ultrasunete sub forma unui fascicul dirijat. Acest lucru a permis folosirea ultrasunetului în tehnica submarină, la detectarea obstacolelor sau la măsurarea adîncimii mărilor şi oceanelor. Singura metodă de semnalizare sub apă se obţine prin folosirea sunetului sau în condiţii mai bune, a ultrasunetului.

La început în acest scop au fost folosite sunetele. Această metodă se bazează pe următorul principiu: un impuls sonor trimis în apa mării ajungînd la fund sau întîlnind un obstacol, se reflectă. Timpul după care sunetul reflectat se întoarce este egal cu $t = \frac{2L}{c}$ unde L este adîncimea mării, iar c este viteza de propagare a sunetului respectiv, în mare. Această metodă prezintă unele dezavantaje şi anume: din izvorul de sunete ies unde sferice care se răspîndesc în toate direcţiile; o parte din ele se pot reflecta chiar pe pereţii vasului, fiind înregistrate de receptor, ceea ce împiedică obţinerea unor rezultate exacte. În al doilea rînd, în cazul sunetelor de frecvenţe joase adîncimile mării nu pot fi măsurate deoarece sunetul reflectat se suprapune peste sunetul emis. Aceste neajunsuri au fost îndepărtate prin utilizarea ultrasunetelor.

Primele semnalizări submarine au fost făcute de Paul Langevin. În tehnica submarină se folosesc hidrolocatori formați din doi generatori: unul are rol de emițător, iar al doilea de receptor.

Generatorul hidrolocatorului emite ultrasunete cu frecvența de 15—30 kHz. De aceea în acest scop se pot folosi generatori magnetostrictivi. La hidrolocator instalația are un transformator care transformă ultrasunetul în sunete audibile. În felul acesta, datorită fenomenului Doppler-Fizeau, persoana care recepționează sunetele își poate da seama dacă obstacolul de care s-au reflectat undele stă pe loc, se apropie sau se depărtează, după frecvența sunetului recepționat. Temperatura straturilor de apă, microorganismele precum și substanțele dizolvate în apa mării pot modifica simțitor, rezultatele. De aceea pentru obținerea unor rezultate bune trebuie bine cunoscute toate aceste date privitoare la mediul în care se propagă ultrasunetul.

O altă aplicație importantă a ultrasunetului în tehnică este defectoscopia ultrasonoră, care se bazează pe proprietatea ultrasunetelor de a pătrunde prin straturi metalice foarte groase, fără a fi absorbite. Avantajul pe care-l prezintă defectoscopia ultrasonoră față de defectoscopia cu raze X sau defectoscopia magnetică constă în faptul că ea permite cercetarea structurilor metalice cu grosimea de 3—4 metri.

Perfecționările continue aduse defectoscoapelor ultrasonore au dus la realizarea unui microscop ultrasonor cu ajutorul căruia se pot studia cristalele din interiorul aliajelor. Dacă dimensiunile acestor cristale sînt apropiate de cele ale lungimii de undă a ultrasunetului folosit piesa este « opacă » pentru ultrasunet. În felul acesta cunoscînd lungimea de undă a ultrasunetului folosit putem afla și dimensiunile cristalelor metalului iradiat.

Datorită propagării ultrasunetului în lichide în acestea se formează unde staționare. În partea de lichid unde presiunea ultrasunetului este maximă se formează băsicuțe de gaze sau de aer. Cînd compresiunea este urmată de dilatare are loc procesul de rupere a moleculelor de lichid. Acest fenomen se numește « fenomenul de cavitație ».

Fenomenul de cavitație are loc de obicei în lichidele prin care se propagă ultrasunetele a căror putere este de 0,5 watt/cm^2. Această « rupere » a lichidului exercită presiuni foarte mari de ordinul miilor de atmosfere; datorită acestui fapt ultrasunetele de intensitate mare sînt folosite mult în medicină, biologie și chimie.

S-a observat că prin ultrasonarea unor substanțe se poate realiza ușor ruperea moleculelor lor. O explicație completă și valabilă în toate cazurile, a acestui fenomen nu a fost găsită pînă în prezent. Se presupune că el se datorește fenomenului de cavitație.

Aceste proprietăți ale ultrasunetului sînt folosite la distrugerea microbilor și a virusurilor. Pentru aceasta este suficient să se ultrasoneze cîteva minute, cultura respectivă.

Sub acțiunea ultrasunetelor au loc o serie de procese chimice care în alte condiții nu se realizează ușor sau nu se pot realiza deloc. De exemplu, dacă se ultrasonează o soluție de iodură de potasiu, aceasta se îngălbenește. Fenomenul se datorește faptului că, sub acțiunea ultrasunetului se distruge molecula iodurii de potasiu formată dintr-un atom de potasiu și unul de iod și se eliberează iodul, care dă soluției culoarea galbenă. Un proces analog se întîmplă dacă soluția de iodură de potasiu se oxidează cu apă oxigenată. Deci, ultrasunetul a determinat tocmai oxidarea soluției.

Formarea macromoleculelor se datorește polimerizării, adică unirii unui număr mare de molecule mici. De obicei polimerizarea se produce în prezența unui reactiv. S-a observat nu demult, că ultrasunetul înlesnește polimerizarea a două substanțe care sînt folosite la fabricarea cauciucului artificial.

Dacă în unele cazuri ultrasunetul ajută la formarea macromoleculelor, în alte cazuri acțiunea lui are drept rezultat procesul de rupere a moleculelor datorită fenomenului de cavitație; aceasta se întîmplă și în cazul cînd dimensiunile moleculelor sînt mai mari decît lungimea de undă a ultrasunetului, astfel încît o parte din moleculă se găsește într-un nod al undei, iar cealaltă într-un ventru.

Cînd ultrasunetul se propagă într-un mediu, o parte din energia lui este absorbită. Din expresia coeficientului de absorbție și al vitezei de propagare a ultrasunetului într-o substanță se pot deduce o serie de constante fizice ale mediului prin care acesta se propagă, și care prin alte metode se determină greu sau în multe cazuri nu se pot determina deloc. De aceea în ultimul timp ultrasunetele se folosesc în studiul structurii materiei.

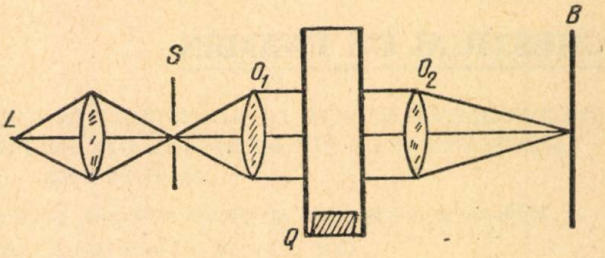


Fig. 9

În timpul propagării ultrasunetului în aer au loc o serie de comprimări și de dilatări succesive. Dacă spațiul în care se propagă ultrasunetul se luminează cu o lumină a cărei lungime de undă este egală cu aceea a sunetului emis se poate prinde pe ecran imaginea sunetului. Acest lucru a permis fizicienilor sovietici S. N. Rjevkin și S. I. Krekmer să folosească ultrasunetul la studiul proprietăților acustice ale diferitelor construcții pe modelele lor. Această metodă se folosește actualmente la studiul acusticii clădirilor.

În televiziune este necesară cîteodată, variația rapidă a intensității unui fascicul de lumină. Această modulare se poate realiza în condiții foarte bune cu ajutorul ultrasunetului. Schema unui astfel de modulator este redată în fig. 9.

Fasciculul de lumină emis de sursă este transformat cu ajutorul unei lentile într-un fascicul paralel care trece apoi printr-o baie de sticlă plină cu un lichid transparent. Din cauza propagării undelor ultrasonore lichidul devine neomogen din punct de vedere optic; fasciculul de lumină după ce trece prin lichid este focalizat cu ajutorul unei alte lentile. Din cauza neomogenității optice a lichidului fasciculul de lumină deviază și o parte din el nu mai este focalizat în același loc și dacă ecranul este mic, nu-l mai poate prinde. Prin variația intensității curentului aplicat generatorului ultrasonor se poate varia luminozitatea fasciculului de lumină prins pe ecran.

Acțiunea ultrasunetului asupra organismului depinde — ca și în cazul razelor X — de intensitatea lui. Ultrasunetele de intensitate mare produc o puternică încălzire a pielii cauzînd o arsură destul de gravă. Ultrasunetele de intensitate mică au însă, acțiune terapeutică asupra organismului bolnav, de exemplu în nevralgii, reumatism etc.

Și la noi în țară se fac cercetări asupra proprietăților ultrasunetelor și aplicațiilor lor. Nu de mult au început să funcționeze primele defectoscoape ultra-

sonore importate din U.R.S.S. și din țările de democrație populară, iar datorită muncii perseverente și îndelungate a fizicienilor noștri au fost construite generatoare ultrasonore puternice. Gh.Giurgea, lector la facultatea de Matematică și Fizică din București a construit anul acesta un interferometru ultrasonor. Cu ajutorul acestuia au fost întreprinse o serie întreagă de cercetări.

Colectivul condus de acad. E. B ă d ă r ă u studiază proprietățile grîului ultrasonat. S-a observat că parcelele de grîu ultrasonat dau o producție dublă față de acelea cu grîu obișnuit.

Am menționat numai cîteva din numeroasele aplicații ale ultrasunetelor. În ultimul timp au fost create zeci de laboratoare speciale unde fizicieni, medici, ingineri și naturaliști — folosind această ramură a acusticii — obțin noi rezultate în munca lor.

CHESTIUNI DE EXAMEN

DIN PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA ELECTROTEHNICĂ ȘI MECANIZAREA AGRICULTURII, DIN INSTITUTUL TEHNIC, CRAIOVA, AUGUST 1955

1874. Să se rezolve și să se discute rădăcinile ecuației:

$$(2m - 1)\cos 2x - 9\cos x + m - 5 = 0.$$

1875. Se dă ecuația $x^2 + ax + 2 = 0$. Să se rezolve știind că între rădăcinile ei există relația:

$$x_1^4 + x_2^4 = 17.$$

1876. Un triunghi ABC are laturile $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$. Să se ducă o paralelă DE cu BC, așa fel ca perimetrul triunghiului ADE să fie egal cu cel al trapezului $BCED$.

1877. Se dă $\operatorname{tg} x = \dfrac{2m - 1}{\sqrt{3}}$ și $\operatorname{tg} y = \dfrac{2 - m}{m\sqrt{3}}$. Să se calculeze suma $x + y$.

1878. O piramidă regulată patrată are latura bazei $4a$. Ea este circumscrisă unei sfere cu raza a. Să se afle volumul piramidei.

1879. Să se rezolve sistemul:

$$x + y = 14;\ u + v = 10;\ xy = uv;\ x + y + u + v = 200.$$

1880. Să se simplifice fracția:

$$\frac{2\sin a + \cos 3a - \cos 5a}{2\cos a + \sin 3a - \sin 5a}$$

1881. O piramidă regulată patrată are latura bazei a. Volumul său este $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Să se afle unghiurile făcute de fețele laterale și de muchii cu planul bazei.

1882. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\frac{5 + ax}{5 - ax}} = 1.$$

1883. Se dă $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{2}$ și $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \sqrt{3}$. Se cere: $\sin(x + y)$; $\sin(x - y)$; $\operatorname{tg}(x + y)$.

1884. Se consideră ecuația: $x^2 - (2 + m)\, x + 2\, m^2 = 0$. Se cere:

1) să se determine m astfel ca suma patratelor rădăcinilor să fie egală cu 5;

2) pentru ce valori ale lui m ecuația dată admite rădăcini reale.

1885. Să se rezolve sistemul:

$$\sin^2 x - \sin^2 (y - z) = a$$
$$\sin^2 y - \sin^2 (z - x) = b$$
$$\sin^2 z - \sin^2 (x - y) = c.$$

1886. Se dă aria totală $2\,S$ și diagonala d a unui paralelipiped dreptunghic. Să se calculeze dimensiunile știind că:

a) ele sînt în progresie geometrică; *b)* ele sînt în progresie aritmetică.

1887. Să se rezolve sistemul:

$$x + y + z = n\pi$$
$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin z}{c}$$

1888. Se așează pe un plan orizontal P o sferă de rază R și un con drept de rază R și înălțime $2\,R$. La ce distanță x de planul P trebuie dus un plan orizontal Q pentru ca volumul trunchiului de con cuprins între planele P și Q să fie egal de n ori volumul segmentului sferic cuprins între aceleași plane. Pentru ce valori ale lui n problema este posibilă?

1889. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

1890. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin a \sin b \sin (b - a) + \sin b \sin c \sin (c - b) + \sin c \sin a \sin (a - c) =$$
$$= \sin (a - b) \sin (b - c) \sin (c - a).$$

1891. Să se rezolve ecuația:

$$\sin (x + 20^0) + \cos (x - 10^0) - \sin (x - 40^0) = \sqrt{3}$$

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA, AUGUST 1955

1892. Se dă ecuația $mx\,(2 - x) = 2x^2 + 1$ și se cere:

a) să se discute natura rădăcinilor cînd m variază de la $-\infty$ la $+\infty$

b) să se determine m cu ajutorul relațiilor între rădăcinile și coeficienții ecuației date astfel ca între rădăcinile ecuației să avem relația:

$$\frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{20}{x_1 x_2}.$$

1893. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{3}{1 + \cos x} = 2 \sin^2 x$$

și apoi să se calculeze $\sin 2x$; $\cos 2x$; $\operatorname{tg} 2x$.

1894. Fie $ABCD$ un trapez isoscel avînd bazele $AB = 11$ cm și $CD = 5$ cm, iar înălțimea $DH = 4$ cm. Pe latura AD se ia punctul E astfel încît să avem $\frac{DE}{EA} = \frac{2}{3}$; și din E se duce o paralelă cu bazele, care taie latura BC în F. Să se afle aria totală și volumul obținut prin rotirea trapezului $ABFE$ în jurul dreptei CD.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1401

Să se arate că funcția

$$y = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}$$

ia valoarea $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ *pentru* $0° \leqslant x \leqslant 90°$; $180° \leqslant x \leqslant 270°$; $360° \leqslant x \leqslant 450°$; $630° \leqslant x \leqslant 720°$ *și ia valoarea* $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ *pentru* $90° \leqslant x \leqslant 180°$; $270° \leqslant x \leqslant 360°$; $450° \leqslant x \leqslant 630°$, *apoi să se reprezinte grafic funcția y în intervalul* (0-720°).

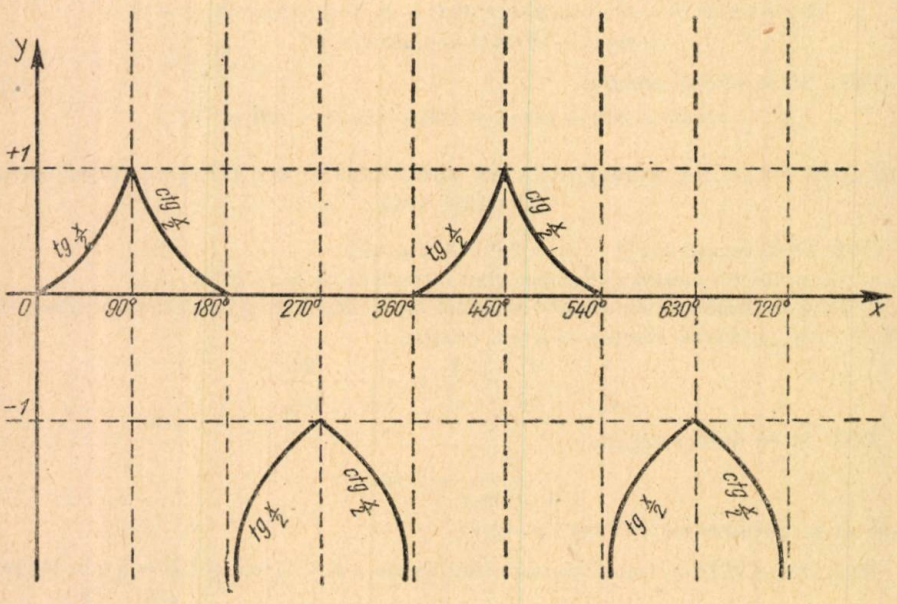
C. Ionescu-Țiu

Soluție. — Ținînd seama că

$$\sqrt{1 + \sin x} = \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right|$$

$$\sqrt{1 - \sin x} = \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right|$$

și că pentru $0° \leqslant x \leqslant 90°$; $180° \leqslant x \leqslant 270°$, $\cos \frac{x}{2} > \sin \frac{x}{2}$ iar pentru $90° \leqslant x \leqslant 180°$; $270° \leqslant x \leqslant 360°$, $\cos \frac{x}{2} \leqslant \sin \frac{x}{2}$ enunțul se verifică.



Dînd valori arbitrare arcului x, aflînd valorile corespunzătoare funcției $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ sau $y = \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$, după întervalul în care este cuprins x, și trecem aceste valori pe grafic.

Problema 1417

Să se calculeze cît timp stă soarele deasupra orizontului oraşului Tîrgovişte (latitudinea este $\varphi = 44°55'$) cînd declinaţia soarelui este $\delta = 23°27'$.

Ce oră este la Bucureşti (longitudinea $= 26°8'50''$) cînd soarele trece la meridianul oraşului Brăila $= 28°$.

Gh. Brebu, elev, Tîrgovişte

Soluţie. Folosim formula $\cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$ unde $\varphi = 44°55'$; $\delta = 23°27'$; $2H$ = timpul cît stă soarele deasupra orizontului, trasformat în grade

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta; \quad -\cos H = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta;$$
$$-\cos H = -\sin(90° - H) = \sin(H - 90°), \text{ deci:}$$
$$\sin(H - 90°) = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\ 44°55'.\ \operatorname{tg}\ 23°27'$$

Aplicăm logaritmii şi avem:

$$\log\sin(H - 90°) = \log\operatorname{tg}\ 44°55' + \log\operatorname{tg}\ 23°27' = \bar{1},99874 + \bar{1},63726 = \bar{1},63600.$$
$$\log\sin(H - 90°) = \bar{1},63600;$$
$$H - 90° = 25°37'45''; \quad H = 25°37'45'' + 90° = 115°37'45'';$$

$2H = 231°15'30'' = 15^h\,25^m2^s$ deoarece $15° = 1$ oră.

Soarele stă deasupra orizontului $15^h\,25^m2^s$.

Ştim că la o diferenţă de 15° longitudine, ora locală variază cu 1^h. Diferenţa longitudinilor Bucureşti şi Brăila este $26°8'50'' - 28° = -1°51'10''$. Dacă pentru 15° ora locală variază cu 1^h pentru $-1°51^m10^s$ ea va varia cu

$$x = \frac{-1°51'19''}{15} = -7^m24^s\frac{4}{10}$$

Deci, dacă la Brăila e ora 12 (soarele trecînd la meridianul localităţii), la Bucureşti ora locală este $12 + (-7^m24^s6/10^s) = 11^h52^s35^s4/10$. La Bucureşti este deci ora 11, 52 minute, 35,6 secunde.

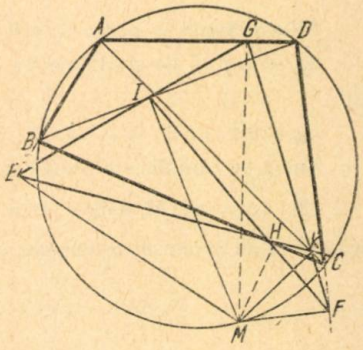
Problema 1419

Produsul distanţelor unui punct oarecare luat pe un cerc la două laturi opuse ale unui patrulater înscris în acel cerc, este egal cu produsul distanţelor aceluiaşi punct la celelalte două laturi şi de asemenea egal cu produsul distanţelor punctului la diagonalele patrulaterului.

* * *

Soluţia, I dată de **Stroe Radu**, elev, Ploieşti. — Fie R raza cercului circumscris patrulaterului. Avem de demonstrat că:

$$MF \cdot EM = MI \cdot MK = MG \cdot MH$$



Folosim teorema: produsul a două laturi într-un triunghi este egal cu produsul dintre înălţimea ce cade pe latura a treia şi diametrul cercului circumscris.

În virtutea acestei teoreme putem scrie:

$$2R \cdot MH = MB \cdot MC;\ 2R \cdot MG = AM \cdot MD;$$
$$2R \cdot MI = MB \cdot MD;\ 2R \cdot MK = MA \cdot MC;$$
$$2R \cdot ME = MB \cdot MA;\ 2R \cdot MF = MC \cdot MD$$

De unde rezultă

$$MF = \frac{MC \cdot MD}{2R};\ ME = \frac{MB \cdot MA}{2R};\ MI = \frac{MB \cdot MD}{2R};$$
$$MK = \frac{MA \cdot MC}{2R};\ MG = \frac{AM \cdot MD}{2R};\ MH = \frac{MB \cdot MC}{2R}$$

cu care relaţia se verifică imediat.

Soluția II. — Din asemănarea triunghiurilor IMG și MKH avem

$$\frac{MI}{MG} = \frac{MH}{MK} \qquad \text{deci} \quad MI \cdot MK = MG \cdot MH$$

iar din asemănatea triunghiurilor MEI și MKF avem

$$\frac{ME}{MI} = \frac{MK}{MF} \qquad \text{deci} \quad ME \cdot MF = MI \cdot MK$$

Rezultă că:

$$ME \cdot MF = MI \cdot MK = MG \cdot MH$$

Observări. *a)* Conform unei teoreme cunoscute, punctele E, H, K; I, H, F; $E, I. G.$ sînt colineare, de asemenea G, K, F. Rezultă că diagonalele patrulaterului $EICF$ sînt concurente în H.

b) Triunghiul EGK este tăiat de transversala IHF, iar triunghiul IGF de transversala EHK. Aplicînd acestor triunghiuri teorema lui Menelaus avem $EG \cdot KF \cdot HI = EI \cdot GK \cdot HF$;

$$\text{sau} \quad \frac{KF}{EI} = \frac{GK \cdot HF}{EG \cdot HI}$$

și $KF \cdot IG \cdot EH = GF \cdot EI \cdot HK$ sau $\dfrac{KF}{EI} = \dfrac{GF \cdot HK}{IG \cdot EH}$

Din aceste două relații avem:

$$\frac{GK \cdot HF}{EG \cdot HI} = \frac{GF \cdot KH}{IG \cdot EH} \quad \text{sau} \quad KG \cdot HF \cdot IG \cdot EH = EG \cdot FG \cdot HI \cdot HK.$$

Problema 1445

Să se calculeze suma:

$$S_n = log\ 2\ cos\ \alpha + log\ 12\ cos\ 2\alpha + log\ 54\ cos\ 4\alpha + \ldots + log\ 2n \cdot 3^{n-1} cos\ 2^n\alpha$$

Mircea Mănescu, Cîmpulung Muscel

Soluție. Suma se poate transforma în produs:

$$S_n = \log\ (2\cos\alpha \cdot 12\cos 2\alpha \cdot 54\cos 4\alpha \ldots 2n \cdot 3^{n-1}\cos 2^n\alpha)$$

sau

$$S_n = \log\ (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 2 \cdot 6 \cdot 18 \ldots 2 \cdot 3^{n-1} \cdot \cos\alpha \cos 2\alpha \ldots \cos 2^n\alpha)$$

Luăm pe rînd fiecare produs și avem:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ Al doilea este $2 \cdot 6 \cdot 18 \ldots (2 \cdot 3^{n-1}) = 2^n \sqrt{3^{n(n-1)}}$ (dedus pe baza formulei ce dă produsul termenilor unei progresii geometrice $P_n = a^n \sqrt{q^{n(n-1)}}$. Mai avem:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

A se vedea broșura nr. 6 din Biblioteca S.S.M.F. I. Sominski: « *Metoda inducției matematice* », la pag. 25—26.

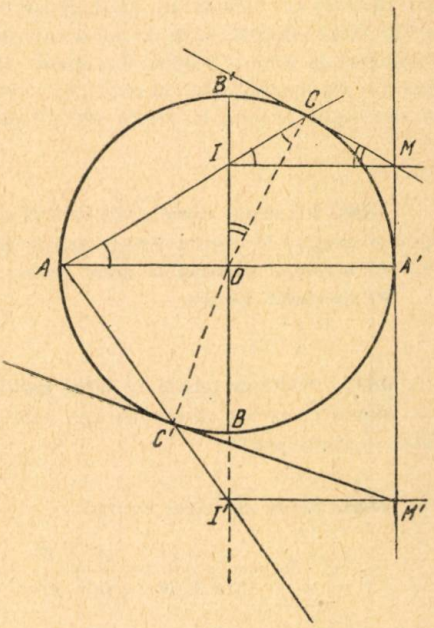
Deci vom avea:

$$S_n = \log\left(2^n \cdot n! \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha} \sqrt{3^{n(n-1)}}\right)$$

Problema 1456

Se dă un cerc cu centrul în O și două diametre perpendiculare AA' și BB'. Din punctul A ducem o secantă variabilă care taie cercul în C iar diametrul BB' în I. Tangenta în C la cerc și perpendiculara în I pe diametrul BB' se taie în M. Se cere locul geometric al lui M cînd secanta dusă prin A variază.

* * *



Soluție. Deoarece

$$IM \perp BB' \text{ deci } IM \| AA',$$

avem $\sphericalangle CIM = \sphericalangle CAA'$; însă $AO = CO$ deci $\sphericalangle CAA' = \sphericalangle ACO$. Rezultă că:

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle CIM \qquad (1)$$

Deoarece

$$\sphericalangle CIO = 90° + \sphericalangle CIM$$

și

$$\sphericalangle ICM = 90° + \sphericalangle ACO \qquad (2)$$

avem și $\sphericalangle CIO = \sphericalangle ICM$

Ținînd seama de (1) și de (2) și de faptul că în triunghiurile ICM și ICO, latura IC este comună, deducem că triunghiurile ICM și ICO sînt egale. Deci:

$$IM = CO = OA'$$

Rezultă că locul geometric al punctului M este tangenta în A' la cercul dat.

Problema 1462

a) *Să se caculeze perioada și frecvența radiației din spectrul vizibil care are lungimea de undă de* 0,4μ.

b) *Un emițător are frecvența undei emise de* 300 *kHz. Să se afle lungimea de undă*

* * *

Soluție. — a) Între perioadă, frecvență și lungimea de undă există relațiile: $T = \frac{\lambda}{v}$ și $f = \frac{v}{\lambda}$ în care: T = perioada radiației, f = frecvența radiației, λ = lungimea de undă, v = viteza de propagare a undei.

În cazul nostru v (viteza luminii) fiind de 3.10^{14} μ/s avem:

$$T = \frac{0{,}4}{3 \cdot 10^{14}} = \frac{4}{3 \cdot 10^{15}} = \frac{4}{3} \cdot 10^{15} \text{ s}$$

$$f = \frac{3 \cdot 10^{14}}{0{,}4} = \frac{3 \cdot 14^{15}}{4} = \frac{3}{4} \cdot 10^{15} \text{ oscilații/s}$$

b) Aplicînd formula: $\lambda = \frac{v}{f}$ în care: λ = lungimea de undă în km, v = viteza undelor herziene în km/sec, f = frecvența în Hz, avem:

$$\lambda = \frac{300 \cdot 000}{300 \times 1000} = 1 \text{ km}$$

PROBLEME PROPUSE

1895. Un circuit acordat cu inductanța de 253 microhenry, cu bobina înfășurată pe o lungime de 4 cm cu un strat de spire și raza carcasei de 3 cm, acoperă gama undelor de 500—1421 kilocicli. Să se calculeze capacitatea maximă și minimă a condensatorului, precum și numărul de spire al bobinei din circuit. Presupunînd că nu avem la îndemînă decît un condensator cu capacitatea maximă de 500 pF, să se calculeze capacitatea condensatorului fix ce-l legăm în serie cu cel de 500 μF pentru a înlocui condensatorul necesar circuitului.

Mihai Stănciulescu, Tîrgoviște

1896. Un canal circular de rază R are o pantă i. Să se determine înălțimea apei din canal și unghiul la centru corespunzător arcului de cerc ud pentru a avea:

a) o viteză maximă în acest canal;

b) un debit maxim.

I. Stepan, elev, Constanța

1897. Printr-un jghiab de tablă galvanizată care are forma semicilindrică de diametru $d = 20$ cm, curge un curent de apă care are un debit de 141 m³/oră. Se cere panta jghiabului și viteza apei.

* * *

1898. Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{a^0 + b^0}{(a+b)^0} + \frac{a^1 + b^1}{(a+b)^1} + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} + \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3} + \ldots + \frac{a^n + b^n}{(a+b)^n}$$

I. I. Cristea, elev, Constanța

1899. Știind că x, y, z, u reprezintă numere întregi și pozitive diferite scrise în ordinea $1 < x < y < z < u$ să se arate că

$$xyz + xyu + xzu + yzu \leqslant \frac{31}{24} xyzu - 1$$

L. Mănescu, R. Vîlcea

1900. Să se afle toate valorile lui x pentru care avem deodată următoarele inegalități:

$$\cos x > \cos 3x; \qquad \sin 4x > \sin 2x; \qquad \sin 5x > \sin x$$

C. Ionescu-Țiu

1901. Dacă $a + b + c = 0$ atunci

$$ab + bc + ca = bc - a^2 = ac - b^2 = ab - c^2$$

Ca aplicație să se rezolve ecuațiile

$$8x^3 + 2x\,(ab + bc + ca) - abc = 0$$

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{1}{3x}$$

N. Mihăileanu

1902. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația:

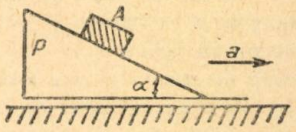
$$2x^2 + xy - xy^2 = 47$$

Miron I. Oprea

1903. Să se demonstreze că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare, valorile absolute ale funcțiilor $\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$ și $\cos(B - C)$ pot fi laturile unui alt triunghi.

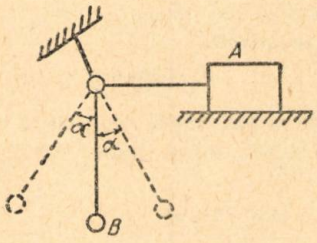
C. Ionescu Țiu

1904. Un corp greu A se reazemă fără frecare pe o pană P. Cu ce accelerație orizontală a trebuie deplasată pana pentru ca corpul A să nu alunece pe pană?



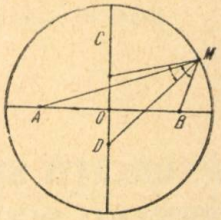
* * *

1905. Un corp A de masă M se reazemă cu frecare pe un plan orizontal. Un fir orizontal prins de acest corp, trece printr-un inel lucios O și susține la celălalt capăt un corp B de masă m asimilabil unui punct material. Se lasă corpul B liber să penduleze într-un plan vertical. Fie α unghiul dintre pozițiile extreme și verticală. Mărind treptat unghiul α corpul B pune în mișcare corpul A. Să se determine coeficientul de frecare dintre corpul A și planul orizontal.



Alexandru Stoenescu

1906. Într-un cerc cu raza R se duc doi diametri perpendiculari pe care se iau respectiv segmentele $OA = OB = \frac{2}{3}R$ și $OC = OD = \frac{1}{3}R$, ca în figură.



1° Dacă segmentul AB este văzut dintr-un punct al cercului sub un unghi α, sub ce unghi este văzut segmentul CD?

2° Să se determine punctele M de pe cerc din care AB și CD sînt văzute sub același unghi.

* * *

1907 Să se rezolve ecuația

$$x^3 - (r + 4R)x^2 + pS = 0$$

unde r, R, p, S sînt elemente într-un triunghi oarecare.

Radu Stroe Ploești

1908. Într-un triunghi oarecare notăm cu l_a, l_b, l_c distanțele dintre picioarele medianelor și înălțimilor duse pe laturile a, b, c. Să se arate că dacă $a > b > c$ atunci există relația

$$a.\, l_a + c.\, l_c = b.\, l_b$$

* * *

1909. Să se calculeze declinația δ și unghiul paralactic al unui astru, știind că latitudinea observatorului este $\varphi = 44°10'\text{N}$, înălțimea astrului măsurată la observator este $h = 26°20'45''$, iar unghiul la pol este $P = 75°25'30''$.

Gh. Badea, elev, Constanța

1910. Să se arate că dacă considerăm șirul lui Fibonacci începînd cu zero:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 31, 34, \ldots$$

un număr de rang impar și cu cel următor sînt soluții ale ecuației $x^2 + xy = y^2 + 1$.

* * *

1911. Să se arate că dacă pe laturile unui triunghi oarecare ABC ca baze construim în exterior patratetele $ABDE$, $BCFG$ și $ACHI$, atunci triunghiurile ABC, AEI, DBG și FCH sînt echivalente, iar perpendicularele duse din A, B, și C pe EI, DG și FH sînt concurente în centrul de greutate al triunghiului dat.

* * *

1912. Un balon de sticlă A cu volumul $V = 1000$ cm^3 este prevăzut cu un tub T de lungime $L = 100$ cm și secțiune $s = 1$ cm^2. În balon se află o băşică plină cu aer care ocupă un volum $V_1 = 200$ cm^3 și care comunică cu exteriorul. Tubul este introdus într-o cuvă cu mercur și este înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Mercurul se ridică în tub la același nivel cu cel din cuvă și se întinde pe o lungime $l = 20$ cm. Presiunea atmosferică $P = 75$ cm Hg.

1° Să se calculeze presiunea aerului închis în balon și în tub.

2° Se scoate aerul din băşică și se cere să se calculeze pe ce lungime se va întinde de data aceasta mercurul în tub și care este presiunea aerului din balon.

Se presupune că nivelul mercurului din cuvă rămîne invariabil.

C. Necșoiu, inginer.

1913. Pe laturile BC, AC și AB ale triunghiului ABC se construesc deoparte și de alta a fiecăreia din laturi, triunghiurile echilaterale: A_1BC, A_2BC, B_1CA, B_2CA, C_1AB și C_2AB. Să se arate că:

$$AA_1^2 + AA_2^2 = BB_1^2 + BB_2^2 = CC_1^2 + CC_2^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

* * *

1914. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 2\sqrt{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{x - 1}$

Stelian G. Mărculescu, Orașul Stalin

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: 723. Într-un triunghi de laturi a, b, c notăm înălțimile corespunzătoare acestor laturi respectiv cu h_a, h_b, h_c. Să se arate că:

$$(a + b + c)\left[a\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + b\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c}\right) + c\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}\right)\right] =$$

$$= 2abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

R. Stroe, Ploești

E: 724. Un mecanic de locomotivă cîștigă lunar 1500 lei. Înainte de reducerea prețurilor el putea să cumpere din acești bani un costum, un pardesiu de damă și îi mai rămîneau 802 lei. După reducerea de prețuri el poate să cumpere costumul și pardesiul de damă rămînîndu-i 975 lei. Știind că pardesiul costa înainte de reducere cu 26 lei mai mult decît costumul iar raportul dintre costul pardesiului și al costumului după reducere a fost de $\frac{58}{47}$ să se afle în procente, care au fost reducerile la costume și la pardesiu.

M. Gh. Filipoiu, București

E: 725. Suma patratelor numărătorului și numitorului unei fracții este 136, iar suma fracției cu inversa ei este $\frac{34}{15}$. Care este fracția?

* * *

E: 726. Să se arate că dacă $m^2 = a^2 + b^2$, $n^2 = b^2 + c^2$, $p^2 = c^2 + a^2$, $r^2 = a^2 - b^2$ $s^2 = b^2 - c^2$ și $t^2 = c^2 - a^2$, avem:

$$(m + n + p)(m + n - p)(m - n + p)(-m + n + p) +$$
$$+ (r + s + t)(r + s - t)(r - s + t)(-r + s + t) =$$
$$= 4(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

Ad. Gab. Şerb, student, Bucureşti

E: 727. Să se afle două numere știind că dacă împărțim numărul cel mare la cel mic obținem cîtul 1 și restul 1, iar dacă împărțim numărul cel mic la cel mare obținem cîtul 0,75. Care sînt cele două numere.

M. Zaharescu, București

E: 728. Un avion pleacă la ora 13 din București la Oradea cu o viteză de 150 km pe oră. După o oră pleacă din București în aceiași direcție un tren cu viteza de 40 km pe oră. Un tren expres pleacă din Oradea la București cu o viteză de 80 km pe oră și întîlnește avionul după trei ore de mers și trenul după încă o oră. Presupunînd că avionul în zborul său a urmărit traseul de cale ferată, să se afle la ce oră a plecat trenul expres din Oradea.

Miron I. Oprea

E: 729. Să se verifice identitățile

$$(1 - a)(1 + a + a^2 + a^3) = (1 + a)(1 - a + a^2 - a^3) = 1 - a^4$$
$$(1 - a + 2a^2 - a^3 + a^4)(1 + a + 2a^2 + a^3 + a^4) = (1 + a^2)^2(1 + a^2 + a^4).$$

* * *

E: 730. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC și un punct D pe cateta AB. Se ia pe AC punctul E astfel că $EA = BD$ și fie F mijlocul ipotenuzei BC. Să se arate că unghiul DFE este drept.

M. D. Zigulescu

E: 731. Să se descompună în factori:

$$a^3 - 3a + 2 \quad \text{și} \quad a^4 + a^3 + a + 1.$$

C. Draica, elev s.m.b.4, București

E: 732. Biblioteca unui cămin cultural primește 200 cărți noi în momentul cînd 25 % din cărțile înregistrate erau împrumutate, apoi mai difuzează 10 % din noul total de cărți aflate în bibliotecă. Dacă s-ar reduce cu 5 cărți numărul cărților difuzate, ar avea în rafturi 70 % din total. Se întreabă cîte cărți are biblioteca în total.

Viorel Grigore. Vaslui

E: 733. Într-o sală de conferințe din București vorbitorul se află la 0,5 m de microfon și la 25 m de ascultătorul din fundul sălii. Conferința nu este difuzată în sală, însă este difuzată de postul de emisie București. Un ascultător din Orașul Stalin ascultă conferința fiind așezat la 3 m de aparatul său de radio. Să se afle care din cei doi ascultători aude mai înainte cuvintele vorbitorului, dacă distanța între cele două orașe este 178 km, viteza sunetului în aer 340 metri pe secundă, iar viteza transmiterii prin radio de 300 000 km pe secundă.

Stelian Gh. Mărculescu

E: 734. Un bazin poate fi umplut de 4 robinete A, B, C, D. Curgînd robinetele A și B bazinul se umple în 728 secunde: robinetele B și C îl pot umple în 819 secunde robinetele C și D îl pot umple în 504 secunde; iar robinetele A și D fiind deschise, îl pot umple în 468 secunde. Să se calculeze în cîte secunde se va umple bazinul cînd este deschis numai cîte un robinet și în cîte secunde se va umple baz nul dacă sînt deschise toate cele patru robinete. Verificare.

C. Ionescu-Țiu

«OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1955—1956»

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. organizează în anul școlar 1955—1956, ca și în anii precedenți, «Olimpiada de Matematică și Fizică», așa cum s-a anunțat în G.M.F. seria B nr. 9/1955 la pag. 436.

În cele ce urmează arătăm materia care trebuie pregătită pe etape și clase. Ca îndrumar indicăm manualele unice specificînd pînă unde este cuprinsă materia respectivă. Fiecare participant trebuie să cunoască temeinic și materia claselor precedente.

Pentru etapa a II-a și a III-a nu se cer chestiunile care sînt scoase din programă prin instrucțiunile Ministerului Învățămîntului.

Pentru o mai bună pregătire, sfătuim pe participanți ca pe lîngă manualele unice și culegerile de probleme să consulte și alte cărți sau culegeri de probleme privind materia cerută, precum și G.M.F. seria B, unde se găsesc și problemele date la Olimpiadele din anii precedenți.

Etapa I. Organizată pe școli, are loc pentru matematică și fizică între 10 și 30 noiembrie 1955. Subiectele vor fi elaborate de școli

Pe etape materia se repartizează astfel:

MATEMATICA

Etapa II locală (în București pe raioane) va avea loc pentru matematică la 19 februarie 1956.

Clasa VIII-a — Algebra pînă la ecuații binome (manual pag. 72).
— Geometria pînă la relații metrice (manual pag. 43).
Clasa IX-a — Algebra pînă la logaritmi (manual pag. 128).
— Geometria pînă la ariile poligoanelor (manual pag. 93).
— Trigonometria pînă la cap. IV (manual pag. 60).
Clasa X-a și școli tehnice — Algebra pînă la divizibilitatea polinoamelor (manual pag. 195).
— Geometria în spațiu pînă la sferă (manual pag. 86).
— Trigonometria pînă la cap. X (manual pag. 98).
Anul I școli tehnice de maeștri — Operații cu expresii algebrice, cu fracții algebrice. Ecuații de gradul I cu o necunoscută. Sisteme de ecuații de gradul I. Probleme de gr. I. — Inegalități. Proprietăți. Rezolvarea inecuațiilor de gradul cu o necunoscută. — Puteri. Puterea unui produs, a unei fracții, a unei puteri, a unui monom și binom.
— Radicali. Extragerea rădăcinii dintr-un produs, fracție sau putere. Proprietăți fundamentale ale radicalilor; aducerea la același indice. Operații cu radicali. Raționalizarea numitorului.

— Geometria plană conform manualului de matematici elementare pentru școlile medii tehnice ale Ministerului Învățământului.

Anul I școli profesionale — Aritmetica. Operațiile cu numerele aritmetice. Rapoarte și proporții.

— Algebră. Operațiile cu numere și expresii algebrice. Ecuații de gr. I. Sisteme de ecuații de gr. I cu mai multe necunoscute. Probleme.

— Geometria plană, conform manualului de Matematici vol. II al Ministerului Învățământului D.G.R.M. (fosta Direcție generală a rezervelor de muncă), pînă la « Relații metrice în triunghi și cerc » inclusiv.

Anul I școli pedagogice — Aritmetica pînă la măsurarea mărimilor (în manual pînă la pag. 97).

— Algebra pînă la relații între rădăcinile și coeficienții unei ecuații de gr. II (manualul de algebră cl. VIII-a pag. 55).

— Geometria pînă la segmente proporționale în cerc (manualul de geometrie cl. VIII pag. 50).

Anul II — Aritmetica pînă la fracții zecimale (manual pag. 232).

— Algebra pînă la progresii (manual algebră cl. VIII-a pag. 92).

— Geometria plană toată (manualele cl. VII-a, VIII-a, IX-a).

Anii III și IV — Aritmetica pînă la mărimi proporționale (manual pag. 313).

— Geometria în spațiu (manual cl. X-a).

Etapa III regională (1 aprilie 1955)

Clasa VIII-a — Algebra pînă la inegalități (manual pag. 83).

— Geometria pînă la poligoane regulate (manual pag. 69).

Clasa IX-a — Algebră pînă la ecuații exponențiale (manual pag. 156).

— Geometria plană toată și geometria în spațiu pînă la unghiuri diedre (manual pag. 33).

— Trigonometria pînă la table de logaritmi (manual pag. 70).

Clasa X-a și școli tehnice — Algebra pînă la ecuații nedeterminate (manual pag. 200).

— Geometria în spațiu toată.

— Trigonometria toată.

Anul I școli tehnice de maiștri — Algebră. Ecuații de gr. II cu o necunoscută, cu coeficienți numerici și literali.

— Proprietățile rădăcinilor ecuației de gr. II. Formarea ecuațiilor de gr. II cînd se cunosc rădăcinile. Discuția rădăcinilor ecuației de gr. II. Probleme de gr. II cu o necunoscută. Ecuații rezolvabile prin descompunerea în factori. Ecuații bipatrate. Ecuații iraționale. Sisteme de ecuații de gradul II cu 2 necunoscute. Metoda eliminării prin substituție. Artificii de calcul. Probleme de gr. II cu 2 necunoscute.

— Funcții de gr. I și II. Reprezentarea grafică. Metoda grafică de rezolvare a unui sistem de 2 ecuații de gr. I și II cu 2 necunoscute.

— Geometria în spațiu conform manualului de matematici elementare pentru școlile medii tehnice.

Anul I școli profesionale — Algebră. Ecuații de gr. II și sisteme simple de ecuații de gr. II.

— Trigonometrie. Noțiuni despre liniile trigonometrice.

— Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.

Anul I şcoli pedagogice — Aritmetica pînă la divizibilitatea numerelor (manualul de aritmetică pînă la pag. 132).

— Algebra pînă la ecuaţii binome (manualul de algebră, cl. VIII-a pag. 72).

— Geometria pînă la poligoane regulate (manualul de geometrie cl. VIII-a, pag. 69).

Anul II şcoli pedagogice — Aritmetica: probleme recapitulative.

— Algebra: probleme recapitulative.

— Geometria în spaţiu pînă la poliedre (manual cl. IX-a, pag. 54).

Anul III şi IV şcoli pedagogice — Aritmetica: probleme recapitulative.

— Geometria în spaţiu: probleme recapitulative.

Etapa IV (29 aprilie) la Bucureşti

Anul I şcoli tehnice de maiştri. Algebră. Progresii aritmetice şi geometrice. Formule pentru aflarea unui termen oarecare şi a sumei termenilor. Media aritmetică, media ponderată. Progresii geometrice infinit descrescătoare.

— Trigonometria. Funcţii trigonometrice ale unghiurilor de orice mărime.

— Periodicitatea funcţiile trigonometrice. Formule de reducere.

— Funcţiile trigonometrice ale sumei şi diferenţei a 2 unghiuri precum şi ale dublului şi jumătăţii unui unghi.

— Elemente de calcul diferenţial. Teoria limitelor. Derivate. Derivata unei puteri întregi pozitive, a unei sume, a unui produs, a unei fracţii. Funcţie de funcţie şi derivata ei. Derivatele funcţiilor trigonometrice directe şi inverse. Derivata logaritmului şi a funcţiei exponenţiale. Derivata unei puteri oarecare.

Anul I şcoli profesionale. Aplicaţii tehnice în legătură cu materia prevăzută la celelalte etape.

Anul I şcoli pedagogice. Aritmetica: probleme recapitulative.

Algebra şi geometria: toată materia din manualele de cl. VIII-a.

Anul II — Şcoli pedagogice. Aritmetica: probleme recapitulative.

— Algebra, geometria plană şi în spaţiu: toată materia din manualele de cl. IX-a.

Anul III şi IV — Şcoli pedagogice. Aritmetica: toată materia şi problemele recapitulative.

— Geometria în spaţiu: toată materia din manualul de cl. X-a.

Pentru clasele VIII-a — X-a şi şcoli tehnice — **toată materia din manualele clasei respective inclusiv materia neprevăzută în programa analitică la care se mai adaugă cele de mai jos:**

Clasa VIII-a. Algebra: Raţionalizarea numitorilor care cuprind şi radicali de ordin superior şi transformarea expresiilor de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$; ecuaţii reciproce de gr. III, IV şi V.

— *Geometria*: Relaţia lui Stewart; puterea punctului faţă de un cerc; axa radicală a două cercuri; centrul radical a trei cercuri; construcţia axei radicale. Teorema lui Ptolomeu pentru patrulatere inscriptibile.

Clasa IX-a. Aritmetica: Operaţii aritmetice. Divizori. Numere prime. Cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun. Fracţii ordinare, fracţii zecimale, fracţii periodice; aflarea fracţiei generatoare. Rădăcina pătrată. Rapoarte. Proporţii. Regula de trei simplă şi compusă. Amestecuri. Numărul divizorilor unui număr.

Geometria: Omotetia. Teoremele lui Menelaus şi Ceva. Trigonometria: Expresiile razelor cercurilor înscrise şi exînscrise unui triunghi. Aria unui patrulater în funcţie de diagonale şi unghiul lor.

Clasa X-a și școli tehnice. Algebra: Suma puterilor asemenea a termenilor unei progresii aritmetice. — Cel mai mare divizor comun a două polinoame. Relații între rădăcini și coeficienți la ecuațiile de gr. III și IV. Calculul rădăcinilor întregi și fracționare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți numerici reali. Ecuații binome și trinome (rezolvare algebrică și cu ajutorul numerelor complexe).

Geometrie: Elemente de geometria tetraedrului. Sfera înscrisă și circumscrisă unui tetraedru. Puterea unui punct față de o sferă. Plan radical a două sfere, ax radical a trei sfere, centru radical a patru sfere.

Trigonometrie: aplicații la statică.

FIZICĂ

Etapa II-a

Locală (în București, raională) — 26 februarie 1956

Clasa VIII. Mecanica: cinematica și statica pînă la: centrul de greutate al corpurilor (manual pag. 154).

Clasa IX. Mișcarea de rotație, legea atracției universale (manual clasa VIII); Căldura, pînă la cap. « Schimbarea stării de agregare a materiei » (manual cl. IX, pag. 107).

Clasa X și școli tehnice. Oscilații și unde. Electricitate statică. Legile curentului electric pînă la Inducția electromagnetică (manual cl. X pag. 217).

Școli profesionale. Mecanica, căldura și aplicațiile tehnice, pînă la Electricitatea și Electrotehnica, cap. IV din programa școlară: Fizica Tehnică » a Ministerului Învățămîntului 1955.

Etapa III

Regională — 6 aprilie 1956

Clasa VIII. pînă la Hidro-aerodinamică (manual cl. VIII pag. 207).

Clasa IX. pînă la lucrul mecanic al gazelor și vaporilor (manual cl. IX pag. 140).

Clasa X și școli tehnice. Electricitatea, pînă la Optica (manual clasa X-a pag. 315).

Școli profesionale. Se adaugă cap. IV: Electricitatea și Electrotehnica, pînă la cap. V. Optica din programa școlară: Fizica Tehnică, a Ministerului Învățămîntului 1955.

Etapa IV

pe țară — 29 aprilie 1956 — la București

Toată materia prevăzută în manualele pentru fiecare clasă, inclusiv capitolele din manuale care nu sînt prevăzute în programa analitică.

Se adaugă lucrările practice de laborator pe care le vor executa elevii admiși la etapa finală.

Clasa VIII. Condițiile de echilibru a unui corp solid care are o axă de rotație. Determinarea greutății specifice a unui corp solid cu balanța hidrostatică și cu picnometru. Determinarea greutății specifice a unui corp lichid cu balanța hidrostatică cu picnometru și areometru. Determinarea coeficientului de frecare între două corpuri.

Clasa IX. Determinări de călduri specifice cu calorimetrul. Determinarea temperaturii unui corp prin metoda calorimetrică. Verificarea legii lui Boyle-Mariotte. Determinarea randamentului unei mașini termice simple. Determinarea căldurii latente de vaporizare a apei. Determinarea umidității relative.

Clasa X și școli tehnice. Determinarea accelerației gravitației cu ajutorul pendulului. Verificarea legii Joule-Lenz. Măsurarea unei rezistențe electrice cu puntea Wheatstone. Determinarea distanțelor focale la oglinzi și lentile. Determinarea indicelui de refracție (metoda acelor). Măsurarea intensității unui izvor luminos cu ajutorul fotometrului Bunsen.

Școli profesionale. Determinări de densități cu balanța hidrostatică, picnometrul și areometru. Determinarea de temperaturi cu ajutorul calorimetrului. Măsurători electrice de intensitate și tensiune. O instalație electrică cu aprindere succesivă de becuri. O instalație de sonerie la rețea cu transformator și întrerupător.

Pentru lucrările executate, candidatul va întocmi un referat.

Se vor da și probleme — experiențe, adică se va pune la dispoziția elevilor, aparatura și materialul, iar elevii vor indica ce experiențe se pot executa și chiar vor executa experiențele cu materialul dat.

OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI ȘI FIZICIENI 1956

PENTRU ELEVII CLASELOR A V-a, A VI-a ȘI A VII-a

Problemele clasei a V-a

V. 1. — Acceleratul face distanța București-Oradea în 12 ore, iar personalul în 15 ore. Știind că acceleratul merge cu 10 km pe oră mai repede decît personalul, să se afle distanța de la București la Oradea.

V. 2. — O carte și un registru costă împreună 23 lei. Dacă micșorăm cu 2 lei prețul registrului și mărim prețul cărții cu 4 lei, atunci cartea devine de 4 ori mai scumpă decît registrul. Cît costă fiecare?

V. 3. — Diferența a două numere este 271. La împărțirea lor se obține cîtul 7 și restul 13. Să se afle aceste numere.

V. 4. — În decursul anului, la o fabrică de mobile producția de mese a crescut în fiecare lună cu 10 față de luna trecută, iar în tot cursul anului s-au fabricat 1920 de mese. Cîte mese s-au fabricat în luna iunie? dar în decembrie?

V. 5. — Într-o școală sînt mai puțin de 200 pionieri. Dacă se formează grupe de cîte 6, de cîte 7 și de cîte 8 pionieri, rămîne mereu o grupă necompletă alcătuită din 5 pionieri. Cîți pionieri sînt în acea școală?

V. 6. — Trei zidari au tencuit în 28 ore o cameră de 5 m lungime, 4 m lățime și 4 m înălțime. Tencuirea tavanelor este odată și jumătate mai anevoioasă decît a pereților și camera a avut 3 ferestre de 1,60 m lățime și 2,50 m înălțime și o ușă de 2 m lățime și 3 m înălțime. Să se afle în cît timp doi zidari vor tencui o altă cameră de 4 m lungime, 3 m lățime și 3 m înălțime care are două ferestre de cîte 1 m lățime și 2 m înălțime și o ușă de 1,60 m lățime și 2 m înălțime.

V. 7. — Să se înlocuiască cu cifre literele a și b din numerele: $7a\,4b$; $64\,ab$; astfel ca aceste numere să fie divizibile prin 8 și 9, dar nedivizibile prin 5.

V. 8. — Să se calculeze:

$$\frac{2+\dfrac{5}{\dfrac{3}{4}}-\dfrac{\dfrac{4}{3}}{5}:\dfrac{6}{7}-\left(1-\dfrac{1}{12}\right)}{1+\dfrac{2}{3+\dfrac{4}{5}}-\dfrac{5-\dfrac{7}{6}}{2+\dfrac{3}{4-1,5}}}$$

V. 9. — De la Galați la Bratislava pleacă din două în două zile, la ora 10, cîte un vas fluvial a cărui cursă durează 4 zile. De la Bratislava pleacă spre Galați din două în două zile, și tot la ora 10, cîte un vas fluvial a cărui cursă durează 3 zile. Știind că în ziua cînd un vapor pleacă din Bratislava nu pleacă altul din Galați, se întreabă: cîte vase ce vin la Galați pot fi întîlnite de un vas ce pleacă spre Bratislava și cîte întîlnește în cursa sa un vas ce pleacă din Galați?

V. 10. — Într-un săculeț se găsesc 10 bile albe, 15 bile negre și 20 bile roșii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să le scoatem, fără a ne uita în săculeț, pentru a fi siguri că am scos 5 bile de aceiași culoare. Să se arate judecata făcută pentru găsirea rezultatului.

Problemele clasei a VI-a

VI. 1. — Într-un triunghiu ABC se dă $\sphericalangle ABC = 41°$ și $\sphericalangle ACB = 69°$. Se duce bisectoarea AD și înălțimea BE, care se taie în F. Să se calculeze $\sphericalangle BFD$.

VI. 2. — Nichelina pentru rezistențe electrice este un aliaj format din 67% cupru, 30,5% nichel și restul mangan. Să se afle cît cupru și cît mangan este necesar la 200 grame nichel. Să se afle densitatea nichelinei astfel obținute, știind că densitatea cuprului este 8,92; a nichelului 8,80 și a manganului 7,39.

VI. 3. — Pe calea ferată dublă dintre București și Ploești se întîlnesc două trenuri: un marfar cu viteza 36 km pe oră și lungimea de 286 metri și un personal cu viteza de 54 km pe oră avînd o lungime de 112 metri. Să se afle timpul cît a durat trecerea unui tren pe lîngă celălalt, cele două trenuri fiind socotite că merg în sens contrar; apoi, în cazul că ar merge în același sens.

VI. 4. — Drumul parcurs în lunecarea unui corp pe un plan înclinat este proporțional cu pătratul timpului necesar lunecării. Un corp lunecă în 7 secunde, 100 metri. Să se afle ce drum parcurge un corp care a lunecat pe plan timp de 16 secunde.

VI. 5. — La o stație de mașini și tractoare sosește un vagon cisternă care conține 8500 kg motorină cu densitatea 0,87. În cîte butoaie a 200 litri se va putea transporta această cantitate de motorină?

VI. 6. — Vrem să ridicăm pe o platformă, cu forța brațelor noastre de 20 Kgf, o ladă încărcată care cîntărește 50 Kgf. De ce mecanisme învățate la fizică ne putem servi. Cum vom proceda. Faceți schițele care să arate modul de lucru.

VI. 7. — Presiunea atmosferică este echilibrată de o coloană de mercur înaltă de 760 mm, mercurul avînd densitatea de 13,6. Ce înălțime ar avea o coloană de apă care ar echilibra presiunea atmosferică? Dar una de alcool (spirt) cu densitatea 0,9?

VI. 8. — Cînd adunăm un număr de două cifre cu răsturnatul lui (de exemplu, 25 + 52, 78 + 87, etc) obținem ca rezultat, sau un număr de două cifre în care cifrele sînt egale între ele, sau un număr de trei cifre în care cifra de la mijloc este egală cu suma cifrelor extreme. Cum se explică aceasta?

VI. 9. — Se dă triunghiul ABC în care $AB=BC$. Se duce bisectoarea unghiului exterior CBD și pe ea se ia $BE=AC=3$ cm. Știind că $EC=4$ cm să se afle perimetrul triunghiului ABC.

VI. 10. — Ce presiune se exercită din partea aerului atmosferic pe coperta cărții de Fizică, dacă barometrul ne arată 760 mm și densitatea mercurului este 13,6. Exprimați această presiune în grf, apoi în kgf.

Problemele clasei a VII-a

VII. 1. — Într-un cerc se înscrie un triunghi oarecare ABC. Perpendiculara dusă din A pe AC taie cercul în M, iar perpendiculara dusă tot din A însă pe AB taie cercul în punctul N. Să se demonstreze că dreptele MN și BC sînt paralele.

VII. 2. — Un număr de două cifre (ab) adunat cu dublul răsturnatului său (adică de două ori numărul ba) dă 111. Să se afle numărul.

VII. 3. — O piesă metalică făcută dintr-un aliaj de alamă (zinc și cupru) cîntărește 490 gr. Cufundată în apă ea pierde 70 gr. Cîte grame de cupru cu densitatea 9 și cît zinc cu densitatea 5 conține piesa?

VII. 4. — Într-un triunghi oarecare ABC se duc bisectoarele interioare AA_1, BB_1 și CC_1. Să se exprime unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$ cînd se cunosc unghiurile triunghiului ABC. Caz particular: $A=65°30'$; $B=35°56'$.

VII. 5. — Într-un hambar au fost de m ori mai multe cereale decît în altul. După ce în primul hambar s-au adăugat cîte a tone timp de p zile, iar în al doilea, cîte b tone în timp de q zile, în primul au fost cu c tone mai mult decît în al doilea. Cîte tone au fost la început în fiecare hambar? Să se rezolve problema și pentru $m=3$, $a=8$, $p=5$, $b=3$, $q=6$, $c=2$.

VII. 6. — Pentru electrificarea unei comune se utilizează sîrmă de cupru cu secțiunea de 3 mm². La trecerea curentului electric sîrma opune o rezistență de 17 ohmi. Ce greutate va avea sîrma de cupru utilizată și de cîți stîlpi va fi nevoie pentru instalarea rețelei știind că densitatea cuprului este de 8,9; rezistența specifică a cuprului este $\rho=0{,}017$ ohmi și că stîlpii se fixează la intervale de 50 m.

VII. 7. — La o balanță brațele în care se pun greutățile și marfa trebuie să fie egale. Un cumpărător a constatat că la balanța de la magazin brațele nu sînt egale deoarece punînd marfa de o parte și greutățile de alta și apoi invers, greutatea mărfii nu era aceeași. Totuși cumpărătorul a cerut să i-se cîntărească 1 kg într-un fel și 1 kg de marfă în celălalt fel. Să se arate dacă marfa vîndută are mai mult sau mai puțin decît două kilograme.

VII. 8. — Descrieți o mașină producătoare de energie pe care ați văzut-o funcționînd. Arătați principiile pe care se bazează, cum transformă o energie în alta și întrebuințările acestei mașini.

VII. 9. — Cîte calorii sînt necesare pentru încălzirea unei săli de clasă cu volumul de 124 m³, de la temperatura de 6°C la 20°C știind că un litru de aer

cîntărește 1,293 grame; iar căldura specifică a aerului este de 0,24 calorii mici. Cîtă apă cu temperatura de 10°C ar ajunge la fierbere cu aceiași cantitate de căldură ca la încălzirea sălii?

VII. 10. — O sumă care constituie fondul unei clase, la finele anului trebuie împărțită în părți egale elevilor clasei respective. Dacă ar fi fost 4 elevi mai mult, partea fiecăruia ar fi fost cu 2 lei mai mică; iar dacă ar fi fost 3 elevi mai puțin partea fiecăruia ar fi fost cu 2 lei mai mare. Să se afle suma și numărul elevilor din clasă.

INDICAȚII PENTRU PARTICIPANȚII LA OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI ȘI FIZICIENI 1955—1956

— Soluțiile problemelor vor fi rezolvate personal de către fiecare elev participant la « Olimpiadă ».

Acele probleme pe care școlarul le rezolvă cu ajutorul altora, trebuie să constituie numai un prilej de a-și lichida lipsurile sale de cunoștințe.

— Se socotesc participanți la « Olimpiadă » toți elevii de la care se primesc soluții la majoritatea problemelor propuse pentru clasa din care fac parte.

— Fiecare soluție explicată pe larg, va fi scrisă cu îngrijire însoțită de numărul problemei sau exercițiului. Elevii vor avea grijă ca la sfîrșitul soluției să fie trecut numele complet al rezolvitorului urmat de numele localității, al raionului, al școlii și clasei din care face parte.

— Problemele copiate nu vor fi luate în seamă.

— La evidențierea participanților se va ține seamă de fiecare rezolvare trimisă, dacă este completă, clar explicată, cu soluția cît mai simplă și însoțită de toate calculele necesare.

— Participanții la « Olimpiadă » vor expedia o singură dată problemele clasei din care fac parte și pe care au putut să le rezolve. Ele se vor prinde laolaltă și se vor introduce într-un plic pe care se va scrie numele elevului participant, clasa școala, localitatea și raionul.

— Plicurile conținînd problemele rezolvate se cor trimite la sediile filialelor Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. din orașul reședință a regiunii respective, PÎNĂ LA 25 FEBRUARIE 1956.

Din mai jos, adresele filialelor raionale unde se vor trimite soluțiile problemelor:

ARAD, regiunea Arad, str. Dragalina 6; BACĂU, regiunea Bacău, str. Nicolae Bălcescu 14 BAIA MARE, regiunea Baia Mare, Școala medie de băieți; BÎRLAD, regiunea Bîrlad, str. Nicolae Bălcescu 9; BUCUREȘTI, regiunea București, str. Academiei nr. 14; CLUJ regiunea CLUJ. B-lul Republicii 37; CONSTANȚA, regiunea Constanța, Școala medie de băieți « Mircea cel Bătrîn », str. Traian 19; CRAIOVA, regiunea Craiova Școala medie de băieți nr. 2 (Buzești); GALAȚI regiunea Galați, Institutul Agronomic, str. Dobrogeanu Gherea 27; DEVA, regiunea Hunedoara, Școala Pedagogică, str. G. Barițiu 2; IAȘI, regiuea Iași, Facultatea de Matematică, Seminarul de Matematică; TÎRGU MUREȘ, Regiunea Autonomă Maghiară, Școala medie de băieți nr. 1, Piața Bernadi 12; ORADEA, regiunea Oradea, Str. Eminescu 2; PITEȘTI, regiunea Pitești, Școala medie de băieți; PLOEȘTI, regiunea Ploiești str. Gh. Doja 98; ORAȘUL STALIN, regiunea Stalin, Institutul de Mecanică, b-dul I. V. Stalin 28; SUCEAVA, regiunea Suceava, Școala medie de băieți; TIMIȘOARA, regiunea Timișoara. Institutul Pegadogic, b-dul Vasile Pîrvan 4.

— Elevii evidențiați la această etapă vor fi admiși la etapa a II-a care va consta dintr-o lucrare scrisă la matematică și fizică, dată în localitatea unde se află filiala regională respectivă; data acestei etape se va anunța ulterior

— Elevii evidențiați și la etapa a II-a vor primi diplome și premii; iar rezultatul va fi publicat în Gazeta matematică și Fizică, seria B.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 iunie 1955 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme: **Berechet M. Oprea** (clasa X-a S. M. 20 București), **Cristea I. Ion** (clasa X, Constanța), **Șerb Gab. Adrian** (clasa X-a, Pitești), **Elenberg Manfred** (clasa X-a, S.M. 12 București), **Stepan I. Ioan** (Anul III hidrotehnică Constanța), **Țurlea I. Corneliu** (clasa X-a Craiova), **Rotaru N. Constantin** (clasa X-a Suceava), **Mateescu I. Ioan** (clasa X-a R. Vîlcea), **Lupuțiu Ioan** (clasa X-a Ploești), **Preda Adrian** (clasa X-a C. d. Argeș), **Uță Marin** (Absolvent U.M. Orașul Stalin), **Ene C. Aurel** (clasa IX-a C. d. Argeș), **Colibaba Tiberiu** (clasa X-a Galați), **Stroe Radu** (clasa X-a Ploești), **Pupăzan N. Nicolae** (absolvent U.M. Sibiu), **Ghergu N. Ion** (clasa X-a Slatina), **Gheorghiu V. Gheorghe** (clasa X-a Ploești), **Bădescu Marcel** (clasa X-a S. M. 4, București), **Alter Moise** (clasa X-a, Tecuci), **Cătărig T. Alex.** (clasa X-a, Tg. Mureș), **Marinescu Gheorghe** (clasa X-a, Ploești), **Iordache I. Dan** (clasa X-a, Constanța), **Serdeșnic Aurel** (Lugoș-Caransebeș), **Ștefanelli C. Dorin** (clasa X-a, Tg. Mureș), Matic I (clasa IX-a, Tg. Mureș), **Brînduș Lucian** (clasa X-a, Orașul Stalin), **Panaitescu Gheorghe** (clasa X-a, Iași), **Cîmpineresçu Valeriu** (Făget), **Țiru Emil** (clasa X-a, Focșani), **Voinea I. Alexandru** (clasa X-a, Craiova), **Parepa C. Grigore** (absolvent Mizil), **Sorescu I. Victor** (clasa X-a, Pitești), **Gervescu M. Ioan** (clasa VII-a, Roznov, Piatra Neamț), **Hodor Constantin** (clasa VII-a, P. Neamț), **Conțiu Ioan** (clasa IX-a, Baia Mare), **Buzea Radu** (clasa X-a, Brăila), **Apetrei Gh. Nicolae** (clasa X-a, Botoșani), **Duduica Radu** (clasa X-a, S. M. 17, București), **Vasiliev Lucia** (Anul III hidrotehnică, Constanța), **Opriș Cristache** (clasa X-a, Ploești), **Bucur Gheorghe** (clasa IX-a, Pucioasa), **Constantin I. Nicolae** (clasa X-a, Ploești), **Popescu Paul** (anul III măsurători terestre, București) **Basarab Șerban** (clasa IX-a, S.M.I. București), **Andricioaiei I. Gheorghe** (clasa VIII-a, Botoșani), **Draica Constantin** (clasa VIII. B.S.M. 4, București), **Teodorescu Ioan** (clasa X-a, Buzău), Buzău), **Sgăvărdea D.** (absolvent, Caransebeș), **Ceaușel I. Gheorghe** (Vadul Poștii, Buzău), **Colțea Valeriu** (clasa X-a, Cîmpina), **Bătinețu M. Dumitru** (absolvent Pietroșani, Zimnicea), **Breban Mircea** (clasa X-a, Oradea), **Panaitopol V. Laurențiu** (clasa VIII-a, Giurgiu), **Bușilă Gheorghe** (clasa X-a, Galați), **Șarpe I. Dumitru** (clasa IX-a, Corabia), **Rus I. Ioan** (clasa X-a, Oradea), **Stroescu Elena** (clasa X-a Seral, Craiova), **Chirică Andrei** (clasa IX-a, Ploiești), **Delibaș Constantin** (clasa VIII-a, Ploești), **Nicolescu Claudiu** (clasa IX-a, Tg. Mureș), **Tudor Sp. Tiberiu** (clasa VIII-a, Tg. Mureș).

* * *

Pînă la 1 iunie 1955 s-au mai primit cel puțin cîte zece soluții bune din numerele 1, 2, 3 și 4 ale Gazetei Matematice și Fizice seria B. Soluțiile însemnate cu un asterisc (*) sînt deosebite, cuprind generalizări, observații interesante sau problema respectivă este rezolvată prin mai multe metode. Numele rezolvitorilor cu astfel de soluții care sînt bine redactate se anunță și la publicarea problemei rezolvate. Dăm numele rezolvitorilor din localitățile care încep cu literele A—Z, după cum urmează:

AIUD (reg. Cluj). clasa IX-a. *Epure Ion* (1520, 521, 525, 526, 527, 528, 579, 580, 594, E: 619, 620), *Ficher Gheorghe* (1471, 472, 478, 515, 517, 518, 520, 522, 525, 526, 528, 555), *Suciu I. Ioan* (1516, 517, 518, 520, 523, 524, 525, 526, 528, 532, 594).

ADJUD (reg. Bîrlad) Școala de 7 ani din Păunești. Clasa V-a. *Novac Gh. Gherghe* (E: 595, 601, 603, 608, 612, 614, 617, 620, 625, 630), Clasa VI-a. *Apostu C. Ioana* (E: 592, 601, 602, 608, 611, 614, 620, 622, 625,) *Stoica V. Niculae* (E: 592, 599, 601, 612, 614, 619, 620, 622, 625, 630, 631), Clasa VII-a. *Avădanei Steliana* (E: 592, 596, 597, 599,

601, 608, 612, 614, 619, 620, 622), *Ciobanu C. Arthur* (E: 592, 596, 597, 601, 608, 612, 614, 615, 617, 620).

ALBA IULIA (Hunedoara). Clasa X-a. *Bodea Ioan* (1472, 481, 486, 493, 494, 517, 521, 524, 525, 526, 527, 531, 534, 545), *Torsan Ilie* (1496, 560, 561, 562, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 585, 589, 590, E: 621, 626).

ALEXANDRIA. Absolvenţi *Desculţu Traian* (1508, 510, 520, 524, 525, 545, 546, 553, 554, 555, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 584, 585, 588, 590, 591, 600, 602, 603, E: 621). *Georgescu I. Emil* (1460, 499, 513, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 528, 532, 533, 546, 589, E: 592, 597, 598, 599, 600, 602, 603, 605, 607, 608, 611, 612,P).

ARAD. Clasa X-a. *Furtună Ileana* (1476, 477, 481, 501, 511, 522, 532, E: 591) 592, 597).

BACĂU. Clasa IX-a. *Clapon Virgil* (1472, 474, 475, 477, 484, 486, 496, 520, 526, 527, 532, 540, E: 592, 597, 602, 603, 608), *Lupaşcu Sl.* (1472, 477, 481, 482, 484, 486, 520, 521, E: 592, 597, 598, 602, 603, 607, 608, 668), *Manole Pavel* (1469, 470, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 484, 485, 486), *Vasilache Mihai* (1482, 501, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 589, 591), *Vasiliu Monica* (1526, 527, 545, E: 592, 593, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 608, 612, 619, 626).

BAIA MARE Clasa IX-a. *Babici Valer* (1474, 475, 486, 493, 494, 495, E: 592, 600, 601, 607, *Conţiu Ioan* (1472, 474, 475, 483, 484, 486, 493, 494, 495; 496, 511, 516, 517, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 536, 540, 555, 565, 566, 568, 569, 570, 574, 575, 578, E: 582, 597, 598, 600, 602 ,603, 605, 608, 610, 611, 615, 618, 621, 622).

BÎRLAD Clasa X-a. *Bercovici Paula* (1539, 541, 542, 543, 545, 549, 550, 551, 556,565).

BOTOŞANI (Suceava). Clasa VIII-a. *Andricioaei I. Gheorghe* (1474, 484, 486, 490, 496, 497, 509, 513, 517, 518, 524, 525, 526, 527, 529, 536, 558, 585, 588, 592, 607, E: 591, 592, 594, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 607, 608, 610, 612, 615, 618, 620, 621, *Arion Adrian* (1474, 478, 485, 486, 493, 494, 495, 496, 497, 558, 562, 565, 568, 569, 602, E: 517, 524, 525, 527, 528, 529, 536, 592, 594, 596, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608, 612, 614, 615, 618, 621, 624, 625, 636, 637), *Baciu D. Dumitru* (1474, 486, 492 493, 494, 508, 517, 524, 528, E: 597, 608, 614, 615, 618), *Gherman Corneliu* (1474, 484, 486, 490, 493, 494, 496, 497, 513, 515, 517, 518, 524, 525, 526, 529, 585, 588, 592, 602, E: 591, 592, 593, 594, 597, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608, 612, 614, 615, 618, 620, 621), *Lămiţa Gheorghe* (1474, 486, 493, 494, 495, 496, 497, 517, 518, 524, 529, 562, 565, 597, 600, 601, 608), Clasa IX-a. *Apetrei Gh. Nicolae* (1473, 474, 475, 478, 481, 482, 484, 493, 494, 516, 518, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 587, 594, 602, 603, 604, E: 597, 607, 610, 614, 615, 618, P). Clasa X-a. *Şapira S. Noch* (1475, 484, 494, 499, 513, 520, 522, 526, 528, 532, 589), *Vartolomei Mihai* (1472, 475, 478, 481, 483, 494, 513, 527, 528, 529, 532), student F. F. *Cuprian Ioan* (1473, 481, 513, 522, 527, 529, 532, 589, 603, E: 596, 606, 618, 619, 621).

BRAILA. Clasa X-a. *Buzea Radu* (1469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 491, 493, 494, 495, 497, 498, 499, 501, 502, 503, 506, 509).,*Melica Gh.* (1469, 471, 472, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 484, 486, 488, 489, 491, 495, 497, 498, 499, 501, 503, 508, 509), *Sişman Nicolae* (1477, 479, 483, 485, 493, 498, 499, 503, 506, 509, 525, 526, 532).

BUCUREŞTI. *Şcoala medie nr. 1 băieţi.* Clasa IX-a. *Basarab Şerban* (1486, 496, 498, 503, 518, 520, 522, 525, 526, 528, 532, 536, 540, 548*, 555, 561, 566, 567, 569, 574, 575, 580, 585, 591, 603, 606, 607, E: 591, 615, 618) *Schileru I. Dinu* (1516, 522, 524, 528, 529, 585, 594, 604, 606, E: 617, 625, 526, 637, 630), Clasa X-a. *Constantin Ion* (1471, 473, 474, 476, 498, 501, 503, 508, 513, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 529, 530, 532, 533, 534, 536, 555, 558, P), *Lupaş Tiberiu* (1441, 1449, 458, 462, 468, 476, 477, 478, 513, 518, 524, 525, 526, 528), *Şcoala medie băieţi nr. 2* Clasa VIII-a. *Teodorescu Nicolae* (1469, 483, 488, 492, 495, 497, 508, 509, 513*, 515*, 517, 518, 521, 524, 528, 529,

532, 536, 552, 558, E: 591, 607), *Ţurcanu Aurel* (1467, 496, 518, 524, 525, 528, 529, 532, 545, 591, 592, E: 581, 586, 597, 601, 605, 607, 614), Clasa X-a, *Moga S. Alexandru* (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 567, 568, 569, 570, 574), *Şcoala medie de băieţi nr. 4 « Aurel Vlaicu »*, *Griviţa Roşie*. Clasa VIII-a. *B. Draica Constantin* (1472, 545, 560, 561, 563, 564, 566, 569, 575, 580, 585, 588, 591, 592, 599, 602, 634, 640, 646, 648, E: 625, 628, 634, 640, 643, 646, 647, 649, 650, 652), *Rădulescu Constantin* (1460, E: 607, 611, 612, 614, 621, 638, 640, 643, 644, 647, 648, 650), *Stamatoiu Petre* (1473, 528, 561, 565, 568, 640, 642, 646, 650, 653, E: 603, 624, 629, 637, 638, 640, 641, 643, 644, 646, 648, 649, 650, 652), Clasa X-a. *Bădescu Marcel* (1473, 477, 533—549, 572, 580, 635, 636, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 651, 652, 653 P), *Viscopoleanu Octavian* (1427, 513, 515, 520, 528, 562, 566, 567, 568, E: 600, 607, 610, 614), Şcoala medie de băieţi nr. 6 Absolvent *Virgolici Virgil* (1442, 453, 455*, 465, 470, 472, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 493, 495, 486, 491, 508, E: 574, 580, 581, 583, 586, 587, 588, 592, 593, 595, 597, 598 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 607, 608, 609). *Şcoala medie de băieţi nr. 7.* Clasa IX-a. *Maftei Nicolae* (1524, 526, 532, 533, 541, 566, 567, 569, 581, 590, 592, 602, 611, 614, 615, 617, 618, 622, 642, 625, 634, 636, P). Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa VI-a *Predoiescu. Marieta* (E: 592*, 595, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 616, 621), Clasa X-a. *Bînă Ileana* (1572, 574, 575, 576, 578, 580, 582, 635, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 648, 649, 651, 652, 653). Şcoala medie de băieţi nr. 11. « D. Cantemir ». Clasa X-a. *Oancea T. Florin* (1515, 516, 518, 520, 524, 525, 528, 529, 533, 534, 589, E: 608, 615, 618), *Sîrbu Anton* (1470, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 480, 483, 486, 499), Şcoala medie de băieţi nr. 12, Clasa X-a, *Elenberg Manfred* (1441, 442, 443, 449, 451, 453, 456, 459, 460, 464, 465, 467, 470—486, 491, 493, 496*, 498, 499, 500*, 506—509, 511, 513, 515, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 525, 526, 528, 529, 532, 534, 542, 546, 548*, 549, 552, 553, 555, 558, 585, 589, 590, 601, 603.) Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa VIII-a. *Manea Mihai* (1479, 491, 498, 499, 513, 520, 522, 524, 526, 528, 529, 532, E: 610, 614, 615, 618, P), *Tudor M. Gheorghe* (1517, 518, 524, 527, 528, 529, 536, E: 592, 594, 597, 599, 602, 608), Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa IX-a. *Teodorescu Viorica* (1478, 496, 520, 525, 565, 567, 568, E: 597, 600, 609, 634), Şcoala medie de băieţi nr. 17 Clasa X-a. *Dinu Florin* (1493, 504, 565, 568, E: 592, 600, 601, 602, 608), *Duduica Radu* (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 577, 578, 579*, 580, 581, 582, 585, 593, 594, 600, 601, 602, 603, 604, 607, E: 602, 618, 621, 626, 634), *Popa Adrian* (1525, 540, 560, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 585, 588, 591, 594, 602, 603*, 606, 607, P), *Pop R. Andrei* (1474, 486, 493, 494, 495, 496, E: 599, 602, 606, 608,) Clasa X-a. *Marinescu Nicolae* (1459, 460, 461, 464, 474, 480, 482, 483, 485, 490, 496, 508, 509, 513, 518, 521, 522, 526, 532, 533, 536, 553, 584, 589, 590, 603). Şcoala medie de băieţi nr. 18. Clasa X-a. *Popovici I. Radu* (1561, 566, 567, 569, 574, 578, 582, 590, 592, E: 611, 621, 622, 624, 625, 527, 630, 634, 637), Şcoala medie nr. 19. Clasa X-a. *Nicolescu Ileana* (1516, 527, 540, 562, 565, 566, 567, 569, 574, 575, 577, 580, 582, E: 607, 612, 614, 615, 618, 619, 620, 625, 626, 629, 634, 638, 639, 640, 641, 643, 647, 650), *Şcoala medie de băieţi nr. 20.* Clasa VIII-a. *Zorapapel Tiberiu* (1478, 484, 496, 497, 524, 525, 528, 565, 568, 570, E: 591, 592, 594, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 608, 612, 614, 615, 616, 621, 625), Clasa X-a. *Berechet M. Oprea* (1442, 443, 449, 453, 456, 458, 459, 460, 461, 464, 465, 467, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 495, 496, 498, 499, 500, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 513, 515, 517, 518, 520, 522, 524, 525, 526, 528, 529, 532, 533, 534, 541, 546, 552, 553, 554, 555, 558, 583, 585, 589, 590, 591, 594, 596, 602, 603*, 605*, 606, 607, P), *Şcoala medie tehnică de măsurători terestre.* Anul III. *Popescu Paul* (1467, 470, 477, 482, 484, 485, 489, 490, 503, 506, 509, 525, 536, 540, 546, 553, 554, 558, 560, 561, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 577, E: 611, 612, 613, 614, 615, 616, 618, P), Şcoala medie Fier-

binţi (Snagov) Clasa VIII-a. *Preda Vasilica* (1474, 524, 528, 569, 588, E: 592, 597, 599, 600, 602, 603, 608, 615, 621). *Studenti Mitroi Gheorghe* (1472, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 494, 495, 497, 498, 513, 516, 528, 529, 530, 532, 538, 546, 547), *Schip Z. Harri* (1443, 459, 493, 513, 515, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 529, 532, 536, 546, 550, 555, 558, 561, 564, 565, 566, 567, 574, 584, 586, 589, 590, 602, 604, P).

BUZĂU Şcoala de 7 ani Munteni (Slobozia): S-au primit de la 23 elevi din clasa VI-a soluţii identice la problemele E: 592, 600, 602, 603, 629, 633, 634, iar problemele E: 591, 604, 635, cu soluţii greşite şi identice. Aceste fapte nu sînt o cinste nici pentru elevi, nici pentru şcoala din Munteni) *Şcoala medie Buzău.* Clasa IX-a. *Fotescu Mariana* (1496, 520, 522, 526, 532, E: 597, 599, 600, 601, 608, 612, 614, 615), *Cucu Paul* (1520, 521, 526, 528, 532, 465, 570, 574, E: 597, 615, 618, 621), Clasa X-a. *Petrescu Doina* (1482, 483, 513, 515, 561, 564, 567, 568, 580, 582), *Teodorescu Ioan* (1469, 470, 471, 472, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 498, 499, 504, 506, 508, 509), Absolvenţi: *Bică D. Nicolae* (1512, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 533), Absolvent Vadu Poştii. *Ceauşel Gheorghe* (1512, 514, 525, 531, 558, 560, 562, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 577, 578, 582, 585, 588, 589, 590, 591, 594, 602, 603, 605, 606).

CĂLĂRAŞI. Absolvent *Mazilu N. Constantin* (1516, 518, 539, 542, 549, 553, 555, 558, 585, 589, 590, 594, 601, 603, 604, 605, 606).

CÎMPINA Clasa X-a. *Coltea Valeriu* (1472, 473, 474, 475, 476, 479, 481, 482, 483, 485, 487, 516, 520, 522, 523, 524, 526, 561, 562, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 575).

CARANSEBEŞ. Absolvent *Sgăvărdea D.* (1463, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 479, 480, 481, 491, 487, 493, 494, 495, 498, 499, 501, 504, 508, 513, 515, 517, 518, 520, 522, 525, 526, 528, 529, 532, 536, 542, 545, 576), Clasa X-a. *Lăbău Aninie* (1540, 553, 554, 585, 587, 589, 590, 600, 603, 606), Absolvent Lugoj. *Serdejnic Aurel* (1471, 472, 474, 475, 476, 478, 480, 481, 482, 484, 485, 486, 487, 491, 493, 494, 495, 998, 499, 561, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 580, 588, 589, 590, 591, 592, 594, 601, 602, 603, 606, E: 597, 608, 611, 614, 618, 619, 620, 621, 624, 625, 626, 630, 636, 637).

CARACAL Clasa VIII-a. *Niculescu D. Stelian* (1474, 493, 588, E: 592, 597, 600, 602, 608, 611, 614, 615, 618, 620, 621, P).

CLUJ. Facultatea Muncitorească. Anul II. *Caţe Nicolae* (1480, 517, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 577), *Pistol Nicolae* (1480, 485, 517, 521, 533, 561, 562, 564, 565, 566, 568, 569, 570, 574, 576, 588, 589, 590, 591, 594), *Păun Constantin* (1480, 485, 489, 498, 517, 524, 561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 477).

CONSTANŢA. Clasa X-a. *Cristea I. Ioan* (1538, 539, 540, 542, 544, 546, 547, 548, 549, 556, 583, 584, 585, 586*, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594*, 595*, 596, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, P, N). *Iordache I. Dan Alexandru* (1449, 453, 454, 456, 458, 459, 460, 461, 462, 464, 465, 466, 467, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 498, P), Clasa IX-a. *Cornea Gheorghe* (1486, 493, 494, 496, 621, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 531, 532, 534,) Clasa VIII-a. *Ivănuş I. Stere* (1424, 495, 503, 528, 529, 545, E: 594, 598, 608, 609), Absolvent *Andreşoiu Glauco* (1476, 484, 510, 513, 520, 521, 523, 524, 526, 527, 529, 532, 533, E: 601, 603), Şcoala hidrotehnică. Anul III. *Ştepan I. Ioan* (1472—475, 477, 478, 480—483, 485—489, 491, 493, 495, 498, 499, 504, 506, 508, 510, 517, 519—521, 523—528, 531, 534, 536—540, 542, 545, 553—555, 566, 567, 569, 574, P), *Vasiliev Lucia* (1413, 421, 472, 474, 475, 476, 480, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 502, 505, 508, 511, 513, 515, 516, 517, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 534, 542, E: 592, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607).

CORABIA. Şcoala medie mixtă. Clasa IX-a. *Delu Ştefan* (1472, 481, 483, 497, 516, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 540, 555, 588, 590, 597,

602, P), *Şarpe I. Dumitru* (1439, 475, 476, 481, 482, 486, 516. 518, 520. 522, 524, 529, 532, 560, 562, 565, 567, 568, 574, 578, 579, 580, 599, 602, 603, 608, E: 603, 608, 615, 618, 622, 626).

CRAIOVA. Şcoala medie de băieţi nr. 1. Clasa VIII-a. *Ionescu N. Constantin* (E: 576, 586, 587, 588, 625, 638, 640, 646, 653, 664), Clasa IX-a. *Voinea I. Alexandru* (1479, 481, 494, 496, 521, 525, 528, 533, 540, 560, 561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 578, 580, 582, 588, 602, 603, 635, 638, 640, 641, 642, 643, 644, 646, 653, P), Clasa X-a. *Truţă Coriolan* (1469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 495, 496, 487, 488), *Ţurlea I. Corneliu* (1473, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 486, 487, 489, 498, 498, 499, 501, 502, 508, 509, 510, 511, 513, 517, 518, 520, 521, 522, 525, 526, 528, 529, 532, 533, 534, 536, 546, 550, 552, 553, 554, 558, 574, 582, 583, 585, 587, 590, 594, 601, 603, 607, P) (55 probleme). Şcoala medie de băieţi nr. 2. Clasa IX-a. *Lăban Mirea* (1472, 540, 544, 555, 561, 567, 587, 588, 589, 591, 592, E: 592, 594, 596, 597, 598, 602), *Voinea C. Dorin* (1472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 478, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 493, 494, 495, 497, 498, 499, 506, 510, 511), Clasa X-a. *Clim Sorin* (1442, 449, 453, 458, 459, E: 581, 582, 584, 586, 588), *Lică I. Ilie* (1472, 483, 493, 499, 513, 515, 516, 520, 522, 524, 526, 528, 532, 555, 566, 567, 569,579, E: 592, 608, 634), *Ghenea Constantin* 1566, 567, 574, 579, E: 610, 614, 615, 618, 620 621, 622), *Truşcă Luca* (1472, 554, 555, 561, 567, 588, 589, 591, E: 592, 594, 602), Absolvent *Chimoiu I. Dumitru* (1512, 514, 539, 540, 585, 588, 589, 590, 591, 592, E: 611, 615, 621, 622), Şcoala medie serală mixtă nr. 2. Clasa X-a. *Stroescu Elena* (1471, 472, 474, 475, 478, 481, 482, 483, 486, 493, 494, 495, 512, 516, 521, 526, 529, 531, 532, 546, 553, 554, 590, 594).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa IX-a. *Ene Aurel* (1453, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 489, 490, 491, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 503, 504, 505, 506, 508, 509, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 531, 532), *Gotineac Mihai* (1478, 526, 528, 529, 558, 565, 567, E: 618, 619, 620, 621), *Neagoe Laurenţiu* (1575, 585, 588, 591, 592, E: 612, 614, 618, 619, 620, 621), *Simion Gheorghe* (1516, 520, 524, 525, 526, 527, 529, 532, 534, 540, 562, 565, 567, 568, E: 597, 600, 601, 603, 608, 612, 614, 615, 619, 620, 621, 624, 627, 632, 633), *Teodorescu I. Dorin* (1524, 527, 534, 540, 567, 579, 580, E: 592, 602, 608, 625), Clasa X-a. *Preda Adrian* (1458, 471, 472—486, 489, 490, 491, 493, 494, 495, 497, 498, 499, 503, 504, 506, 508, 509, 511, 513, 515, 516, 517, 518, 520—529, 531, 532, 533, 552, 553, 554, 555, 558, P).

DARABANI. (Suceava). Absolvent *Tudose Cosmin* (1516, 526, 527, 532, 533, 534, 567, 574, 582, E: 634).

DEJ. Clasa IX-a. *Cociu Constantin* (1518, 520, 524, 526, 528, 529, 530, 532, 533, 603).

DOROHOI. Absolvent *Viorel A. Grigore* (1536, 541, 545, 546, 553, 554, 584, 589, 590, 594, 600, 603, E: 613, 615, 616, 618, P).

FĂGĂRAŞ. *Şipoş Gheorghe* (1512, 516, 521, 522, 523, 526, 529, 532, 533, 555).

FĂGET. (Timişoara). Clasa VIII-a *Lăpungeanu Petru* (1486, 493, 495, 523, 540, E: 554, 588, 591, 597, 605, 606), Învăţător *Gladna Romînă Cimponerescu Valeriu* (1472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 498, 499, 513, 517, 518, 522, 524, 526, 528, 529, 560, 561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 578, 581).

FOCŞANI. Clasa VIII-a. *Buşe M. Constantin* (1476, 477, 517, 525, 548*, 565, 566, 568,569, 570, 591, 592, 602, 607, 611, 615, 618, 629, 636, 637), Clasa IX-a. *Sivoglu N.* (1475, 477, 478, 480, 482, 483, 493, 518, 521, 523, 524, 525, 526, 528, 532, 536, 552, E: 592, 596, 597, 600, 601, 602, 606, 608), Clasa X-a. *Teodorescu Laurenţiu* (1470, 472, 473, 479, 502, 536, 539, 548, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 594, 600, 602, 603, 604, 607), *Ţiru Emil* (1471, 475, 483, 517, 518, 522, 525, 536, 544, 550, 552, 553, 560, 561, 562, 563,

564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 578, 579, 580, 588, 589, 590, 591, 602, 603, 604, 605, 606, E: 615, 621, 626, 637).

GALAŢI. Şcoala medie de băieţi nr. 1. Clasa IX-a. *Neagu Constantin* (1472, 486, 493, 496, 526, 528, 532, 602, E: 597, 599, 615), Clasa X-a. *Chiculiţă Mihai* (1470, 472, 473, 474, 479, 480, 482, 483, 485, 486, 493, 508, 513, 515, 524, 527, 528, 529, 532), *Stegărescu Viorel* (1472, 474, 478, 479, 481, 482, 493, 494, 498, 522, 524, 526, 528, 529, 533), Absolvent. *Colibaba Tiberiu* (1560—581, 636, 640, 641, 642, 644—653, P), (37 probleme), Elevi matrozi Clasa IX-a. *Chiş Mihai* (1472, 475, 493, 494, 520, 522, 526, 527, 529, 552, E: 597), Clasa X-a. *Apetrovici M.* (1584, 585, 588, 589, 590, 591, 594, 600, 603, 604, E: 525, 540, 614, 615, 616, 618), *Buşilă Gheorghe* (1479, 499, 525, 534, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 569, 570, 572, 574, 580, 582, 584, 585, 588, 589. 590, 591, 594, 600, 601, 603, 604, E: 614, 615, 616, 618, 621, P), *Ciurdea Eugen* (1525, 540, 553, 584, 585, 588, 589, 590, 591, 594, 600, 601, 603, 607, E: 614, 615, 616, 618, P), *Neagu Ştefan* (1493, 494, 495, 520, 524, 527, 528, 532, E: 597, 599, 600, 615), *Ştefan Teodor* (1472, 474, 475, 483, 485, 486, 493, 494, 513, 516, 525, 526, 528, 529, 632, 554, 584, 585, 590, 594, 600, 603, E: 597, 600, 601, 608, 615, 616, 621), *Tache G. Ştefan* (1472, 474, 475, 482, 483, 486, 493, 494, 513, 515, 516, 521, 522, 526, 529, 532, 533, 536, 539, 541, 545, 590).

GHEORGHENI. Clasa IX-a. *Mîndru Traian* (1520, 524, 550, 567, 574, 606, E: 598, 610, 611, 612, 615, 616, 618), Clasa X-a. *Coşa Aurel* (1472, 474, 483, 485, 486, 494, 495, 498, 520, 522, 526, 528, 529, 532, E: 592), *Cristea Miron* (1472, 474, 475, 478, 479, 481, 483, 485, 486, 493, 494, 516, 518, 520, 521, 523, 524, 526, 528, 529, 530, 532, 536, 550, E: 592, 597, 598, 600, 606, 607, 608, 610, 615, 616, 620), *Rozenberg Silvia* (1477, 478, 480, 520, 527, 529, 531, 533, 589, 602), *Sărăţeanu Alexandru* (1472, 473, 474, 475, 478, 480, 481, 482, 486, 493, 494, 511, 526, 532).

GIURGIU. Clasa VIII-a. *Panaitopol V. Laurenţiu* (1473, 476, 478, 495, 496, 497, 525, 528, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 578, 585, 588, 591, 592, 602, 603, 604, 606, E: 594, 609, 616), Clasa IX-a *Ptiea D. Cezar* (1449, 460, 583, E: 576, 583, 584, 586, 587, 588, 619, 620), Clasa X-a. *Codreanu M. Petre* (1471, 472, 473, 474, 475), 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 489, 490, 493, 494, 495, 496, 499, 509. *Mişcol M. Mircea* (1538, 539, 541, 560, 561, 563, 564, 565, 566, 567, 569, 572, 574, 580, 581, 582, 585, 587, 588, 589, 590, 594, 604, 606. *Panaitopol Elena* (1442, 449, 459, 460, 474, 475, 476, 478, 485, 486, 493, 494, 495, 497, 513, 516, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 534, 536).

HUŞI. *Feiga Tania* (1472, 474, 475, 482, 483, 493, 494, 513, 515, 522, 526, 532, E: 603).

IAŞI. *Costinescu Anca* (588, 592, 601, 602, 603, 607, E: 588, 592, 597, 598, 600, 602, 605, 607, 611, 618, 621, 634), *Cuşmaru Ilie* (1525, 527, 528, 532, 548*, 588, 591, 592, 604, 606, E: 593, 596, 601, 603, 605, 611, 614, 615, 618, 621, 622,). *Crişu Constantin* (1474, 486, 493, 494, 504, 525, 588, 592, 604, 606, E: 601, 603, 605, 611, 614, 615, 621), *Cuza Constantin* (1454, 486, 493, 588, 591, 599, E: 592, 596,601, 603, 606, 608, 611, 614, 615), *Soil Leib* (1493, 504, 588, 591, 592, 594, 596, 601, 603, 604, 605, 608, 615, 621), *Şor Leiber* (1486, 493, 525, 527, 528, 532, 588, 592, 604, E: 601, 602, 603, 605, 607, 611, 612, 614, 615, 618), *Feldman Milu* (1528, 532, 588, 591, 592, E: 605, 607, 611, 612, 614), Clasa X-a. *Ciornei Alexandru* (1472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 483, 485, 486, 493, 494, 499, 506, 513, 515, 522, 524, 525, 526, 528, 532, 533, 534, 558), *Panaitescu Gheorghe* (1513, 515, 518, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 534, 536, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 577, 578, 579, 582).

MEDIAŞ U. M. *Jilăveanu Gheorghe* (1523, 584, 588, 589, 591, 592, 600, E: 601, 603, 614, 619, 620, 622, 623).

MIZIL. Absolvent. *Parepa C. Grigore* (1470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 489, 490, 491, 494, 495, 496, 498, 499, 506, 508, 512, 519, 525, 537, 590, 591, 592, 603, 606, 607).

NĂSĂUD. Clasa VIII-a. *Greluş Pascu* (E: 592, 593, 598, 599, 600, 601, 602, 606, 607, 608), *Liviu Harosa* (1499, 592, E: 583, 591, 592, 593, 602, 610, 612, 620), Clasa X-a. *Someşan Victor* (1472, 473, 474, 475, 479, 480, 481, 483, 486, 516, 518, 520, 522, 526, 527, 528, 529, 532, 589).

ORADEA. Clasa X-a. *Brcban Mircea* (1471, 477, 506, 533, 537, 546, 551, 562, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 580, 582, 585, 588, 589, 590, 591, 594, 596, 600, 601, 603, 604, 607, P), *Buciuman Cornel* (1449, 451, 460, 461, 465, 472, 475, 481, 483,), *Guiaşu Silviu* (1471, 473, 484, 487, 501, 503, 508, 511, 512, 514, 517, 530, 535, 538, 540, 542, 545, 547, 553, 554, 555, 558, 589, 590, 591, 592), *Porţeanu Mircea* (1479, 486, 511, 521, 560, 563, 567, 574, 578, 582, 589, 590, E: 616), *Rus A. Ioan* (1441, 454, 469, 477, 487, 490, 491, 496, 497, 540, 545, 550, 551, 583, 585, 588, 590, 591, 592, 594, 596, 601, 604, 607, E: 591).

ORAŞUL STALIN. Şcoala medie de băieţi nr. 1. Clasa VIII-a. *Ciurea Vlad* (1460, 524, 527, E: 598, 602, 607, 608), *Jinga Gheorghe* (1471, 474, 478, 486, 493, 494, 496, 527, 588, 592), Clasa IX-a. *Drăgulinescu Marin* (1472, 474, 475, 478, 481, 482, 493, 494, 495, 496, 498),

Clasa IX-a. *Brînduş Lucian* (1472, 474, 475, 476, 481, 484, 485, 491, 493, 494, 516, 517, 519, 520, 521, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 534, 540, 542, 545, 550, 567, 574, 579, 580, 587, 588, 591, 592, 597), *Ciobanu I. Ioan* (1517, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 536, 603), *Minea Florin* (1443, 449, 451, 456, 458, 460, 464, 466, 474, 478, 486, 493, 494), Clasa X-a. *Tofan Mircea* (E; 611, 612, 615, 616, 618, 619, 620, 621, 622), Şcoala medie de fete nr. 5. Clasa IX-a. *Mesaroşiu Constanţa* (1516, 518, 522, 526, 528, 529, 532, E: 611, 615, 618), *Petruş Ileana* (1472, 475, 476, 485, 522, 526, 528, 529, 534, E; 611, 615, 618), Absolvent U. M. *Uţă Marin* (1424, 463—466, 469—489, 491, 493, 494, 495, 501, 503—506,508, 509, 510, 511, 583, 584, 585, 586, 588, 589, 590, 591, 592, 600, 602, 603, 604, 605, 607, P).

PIATRA NEAMŢ. Şcoala de 7 ani Roznov. Clasa VII-a. *Hodor C. Constantin* (1493, 494, 495, 527, E: 591—608, 611, 612, 614, 617, 620, 621), *Gervescu M. Ioan* (1493, 494, 495, E: 592—623), *Leaţ Gh. Mihai* (1493, 494, 495, 527, E: 591—598, 600, 602, 604, 605, 607—612, 614, 617, 620, 621).

PIETROŞANI (Zimnicea). Absolvent. *Bătineţu M. Dumitru* (1441, 442, 443, 448, 449, 453, 454, 459, 460, 461, 464, 465, 468, 469, 472, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 483, 485, 486, 487, 488, 493, 494, 497, 499, 508, 527, P).

PITEŞTI. Clasa X-a. *Bogaciu Valeriu* (1469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 483, 484, 485, 486, 487), *Dogariu Valeriu* (1441, 442, 443, 444, 447, 448, 449, 453, 454, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 468), *Gulie I. Nicolae* (1560, 561, 562, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 578, 580, 582, 594, 603, 605), *Pungoci Mihai* (1513, 561, 562, 563, 566, 567, 568, 569, 570, 577, E: 596), *Sorescu I. Victor* (1470, 471, 477, 485, 488, 489, 490, 491, 495, 496, 501, 503, 506, 508, 509, 510, 512, 514, 517, 518, 521, 533, 534, 535, 538, 540, 542, 545, 554, 556, 601, 603, 605, 607, P), *Serb Gabriel Adrian* (1368, 370, 393, 401, 426, 508, 511, 525, 553—592, 594—596, 599—607, P) (61 probleme), Clasa X-a fete *Simona Manda* (1474, 475, 481, 482, 483, 493, 494, 495, 498).

PLOEŞTI. Clasa VIII-a. *Delibaş Constantin* (1474, 476, 484, 485, 486, 493, 495, 513, 516, 518, 523, 524, 525, 528, 529, 534, 536, 552, 558, 585, 604, 606, E: 592, 597, 598, 600, 602, 607, 608, 611, 615, 618), *Dincă Nicolae* (1474, 485, 486, 493, 497, 513, 516, 524, 525, 528, 529, 534, 536, 566, 568, 569, 570, 577, E: 580, 584, 585, 586, 587, 588, 592, 594, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 608, 610, 615, 621, 634, P), *Popeţ Corneliu* (1474, 479, 588, 591, 592, E: 597, 603, 607, 608, 610), *Rusu Dan* (1473, 474, 476, 478, 479, 482, 484, 485, 486, 493, 496, 516, 524, 528, 529, 531, E: 597, 602, 603), Clasa IX-a. *Chirică Andrei*

(1442, 452, 453, 454, 456, 458, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 475, 478, 480, 481, 483, 484, 485, 486, 510, 520, P), *Chivu C. Dumitru* (1443, 449, 472, 474, 475, 476, 478, 483, 484, 486, 493, 494, 496, E: 587), *Enache C. Gheorghe* (1443, 449, 451, 472, 474, 475, 476, 478, 483, 484, 486, 493, 494), *Georgescu Doru* (1436, 437, 442, 443, 449, 451, 465, 472, 474, 475, 477, 481, 482, 484, 485, 486, 493, 494, 495, 516, 520, 521, 522, 523, 524, 530, 532, 533), *Georgescu Sorin* (1472, 474, 475, 481, 482, 486, 520, 522, 526, 528, 532, 536), *Leonte V.* (1449, 451, 474, 475, 481, 484, 486, 493, 495, 496, 522, 535, 558), *Manciu Rodica* (1520, 522, 526, 528, 532, 540, E: 597, 608, 615, 619), *Ştefănescu Dan* (1432, 436, 443, 449, 471, 474, 475, 483, 484, 486, P), Clasa X-a. *Constantin I. Nicolae* (1472, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 495, 498, 516, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 532, 533, 538, 540, 546, 589, 600, 602, 603), *Dumitrescu Emil* (1478, 486, 516, 520, 525, 528, 529, 584, 585, 589, 591, 594, 603), *Gheorghiu V. Gheorghe* (1470, 471, 472, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 489, 490, 492, 494, 496, 499, 503, 512, 513, 514, 516, 517, 518, 520, 522, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 533, 548* , 552, 555), *Ciobanu Iulian* (1475, 481, 482, 486, 520, 525, 526, 528, 529, 532, 533, 546, 558, 589, 590, 594, 603), *Opriş Cristache* (1441, 442, 449, 459, 462, 472, 473, 474, 475, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 512, 515, 516, 520, 521, 522, 524,—529, 532, 533, 536, 538, 546, 558, 589, 590, 600, 602, 603), *Lupuţiu Ioan* (1519, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 536, 539, 540, 541, 545, 546, 547, 548*, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 583, 584, 585, 586, 588, 589, 591, 594, 600, 602, 603, 604, 606, 607, P), *Iordache Valeriu* (1516, 518, 520, 521, 526, 529, 532, 594, 596, 600, 603), *Marinescu Gheorghe* (1471, 472, 473, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 482, 483, 485, 486, 489, 493, 494, 498, 513, 516, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 728, 529, 531, 532, 533, 534, 536), *Mitulescu Valentin* (1472, 483, 515, 520, 522, 524, 526, 532, 583, 607), *Pătraşcu Victor* (1525, 527, 529, 530, 533, 554, 588, 589, 590, 592, 603), *Popişteru Nicolae* (1472, 474, 475, 483, 486, 520, 524, 526, 528, 532, 589, 590, 594, 604), *Popovici Iulian* (1536, 537, 538, 539, 540, 541, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 557, 558, 583, 584, 585, 586, 588, 589, 590, 591, 592, P), *Stroe Radu* (1441, 456*, 457, 458, 473, 483, 484, 485, 490, 491, 495, 509, 511, 512, 513, 515, 517, 525, 530, 536, 550, 556, 583, 588, 589, 594*, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, P), *Toader Ştefan* 1472, 473, 474, 475, 482, 483, 493, 494, 513, 516, 520, 526, 532, 590, 600), *Vissarion Cornel* (1472, 473, 474, 475, 478, 480, 483, 485, 486, 489, 495, 498, 499, 516, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 529, 531, 532, 533, 553, 589, 594, 604), *Vulpescu Marcel* (1472, 475, 482, 486, 493, 494, 495, 499, 513, 516, 525, 526, 528, 529, 532, 606, E: 593, 603, 608), Aboslvent. *Teodorescu Ştefan* (1460, 461, 462, 464, 465, 469, 472, 473, 474, 475, 476, 479, 480, 481, 484, 485, 486, 491, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 502, 508, P).

PUCIOASA. Clasa IX-a. *Bucur Gheorghe* (1482, 506, 525, 530, 555, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 582, P), *Stan N. Dumitru* (1472, 474, 475, 482, 486, 493, 494, 499, 520, 522, 524, 526, 527, 532, E: 592, 597, 598, 600, 602, 607).

RÎMNICUL SĂRAT. Clasa X-a *Teodor Sergiu* (1475, 512, 513, 516, 521, 522, 526, 527, 586, 588, 589).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa VIII-a. *Ancuţoiu I. Gheorghe* (1516, 517, 523, 524, 527, 528, 529, 545, 552, 565, 566, 568, 578, 588, 591, 592, E: 594, 600, 601, 607, 608, 610, 611, 615, 618), *Bulucea C.* (1493, 494, 495, 496, 497, 516, 524, 525, 527, 528, 529, 588, 591, 592, E: 591, 594, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 607, 608, 611, 615, 618, 621), Clasa IX-a. *Băiaşu D. Nicolae* (1520, 523, 525, 526, 532, 587, 602, E: 592, 600 , 606, 615, 618, 621), Clasa X-a. *Mateescu I. Ioan* (1469—487, 489—491, 493—495, 512, 513, 515, 517, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 576, 577, 578, P).

REGHIN. Muncitor. *Antonescu Victor* (1470, 471, 499, 501, 511, 525, 527, 530, 584, 585, 587, 588, 589, 590, 597, 600, 603, 606, 607, E: 593, 596, 612, 614, 615, 618, 619, 620, 621, 622, P).

REŞIŢA. Clasa IX-a. *Rugaci Livia* (1474, 575, 486, 497, 513, 526, 527, 528, 597, 600, 620), Clasa X-a. *Velincov Carmen* (1472, 474, 475, 482, 483, 486, 493, 494, 497, 498, 499, 511), *Weiss Adolf* (1471, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 483, 485, 486, 498, 499).

ROMAN. Clasa X-a. *Stoica C. Constantin* (1478, 498, 504, 511, 513, 515, 516, 521, 522, 524, 425, 526, 527, 529, 532, 534, 555, E: 571, 583, 584, 607, 608).

SIBIU. Clasa X-a. *Petrescu Cornel* (1460, 470, 471, 475, 483, 484, 504, 508, 509, 511). Anul II. Măsurători terestre. *Connerth Liana* (1472, 483, 498, 526, 527, 532, 541, E: 607, 608, 620), Absolvenţi. *Zimmermann Nicolae* (1538, 546, 547, 589, 591, 592, 600, E: 594, 595, 596, 597, 601, 605, 606, 608, 609, 612, 614, 615, 618, 619, P), U. M. *Pupăzan V. Nicolae* (1501, 503, 504, 506, 508, 509, 511, 560—572, 574—578, 580—583, 585, 588, 589, 590, 592, 594, 595, 602, 603, 605, 606, 607).

SIGHET. Şcoala Pedagogică. Anul III. *Marica Simion* (1493, 494, 495, 523, 527, 528, 529, 566, 570, 578, 580, 582).

SIGHIŞOARA. Absolvent. *Forcun Mihail* (1513, 515, 516, 524, 562, 563, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 580, 582, 585, 589, 590, 594, 596, 599, 600, 603, 604, E: 592, 597, 600, 606, 615, 618).

SLATINA. Clasa IX-a. *Niţu N. Marin* (1472, 474, 475, 478, 483, 486, 493, 494, 499, 508, 524, 525, 526, 528, 532, 540, 544, P), *Şerbănescu N. Tiberiu* (1472, 478, 483, 491, 499, 509, 516, 518, 520, 521, 522, 525, 528, 536, 542, E: 594, 618, 619), Clasa X-a. *Antonescu Păun* (1491, 494, 496, 525, 549, 590, 594, 601, 603, 607, P), *Gherga N. Ion* (1465, 544, 560—579, 581, 582, 585, 589, 590, 594, 601, 602, 603, 606, 607, E: 610, 615, 616, 618, 621, 624, 625, 627, 628, 630, 631, 634, 637, P).

SUCEAVA. Clasa IX-a. *Ciubotaru C. Constantin* (1449, 458, 516, 520, 521, 525, 529, 540, 545, E: 602, P), Clasa X-a. *Rotaru N. Constantin* (1447, 455, 459, 471, 489, 490, 491, 508, 509, 510, 512, 514, 523, 525, 531, 533, 534, 544, 552, 553, 560, 561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 582, 583, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 594, 599, 601 *, 602, 603, 604, 605, 606, 607, E: 591, 606, 610, 612, 614, 615, 616, 618, 619, 620, 621, 626, 627, 630, 634, 637).

TÎRGU JIU. Clasa IX-a. *Amzulescu Liana* (1520, 522, 523, 524, 540, 558, 562, 565, 567, 568, 569, 574, 578, 588, 591, 603, E: 596, 606, 619), Clasa X-a. *Floroiu Gabriel* (1469, 471, 472, 474, 475, 476, 477, 478, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486).

TÎRGOVIŞTE. Clasa X-a. *Albu Ştefan* (1472, 475, 481, 482, 484, 501, 522, 526, 528, 532).

TÎRGU MUREŞ. Clasa VIII-a. *Marian Gh. Mircea* (1474, 477, 478, 479, 486, 490, 491, 502, 506, 524, 525, 528, E: 591, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 607, 611), *Nistor Corneliu* (1472, 474, 475, 476, 477, 478, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 495, 508, 509), *Tudor Sp. Tiberiu* (1474, 478, 486, 493, 494, 495, 496, 516, 523, 524, 525, 528, 529, 532, 536, 545, 592, E: 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 614, 615, 620, 621), Clasa IX-a. *Jormir Lucian* (1473, 474, 475, 476, 482, 493, 494, 495, 516, 520, 521, 525), *Martic C.* (1471, 472, 474—486, 493, 494, 496, 501—504, 506, 508, 509, 510, 511, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 528, 529, 530, 531, 532, 534, 536, E: 592, 593, 596, 597, 598, 600, 601, 602, 6 5, 608, *Nicolescu Claudiu* (1471, 472, 474—486, 493, 494, 501—506, 508—511, 516, 518, 520, 521—524, 525—534, 536, 544, E: 592, 596, 597, 600, 601, 603, 605, 606, 607, 608), *Suciu Ioan* (1520, 522, 526, 528, 532, 536, E: 586, 587, 588, 592, 597, 600, 602, 608), *Hota Marcel* (1477, 481, 516, 520, 522, 524, 525, 526, 529, 532, E: 592, 579, 598, 600, 601, 602, 603, 605, 607, 608),

Goşa Octavian (1472, 476, 478, 481, 482, 484, 485, 520, 522, 528, 530, 532, E: 592, 597, 600, 602), *Sadagorski Dan* (1472, 474, 475, 477, 478, 479, 484, 486, 493, 495, 502, 522, 525, 526, 532), *Ţîru Gavril* (1472, 475, 477, 478, 484, 486, 493, 495, 502, 522, 525, 526, 532 E: 601, 608, Clasa X-a. *Cătărig T. Alexandru* (1473, 476, 479, 474, 478, 480, 481, 482, 486 491, 496, 493, 494, 502, 506, 508, 509, 518, 521, 522, 523, 524, 527, 529, 532, 536, 554, 559, 594, E: 597, 598, 600, 601, 607, 608, P), *Ştefanelli C. Dorin* (1473, 474, 475, 477, 478, 479, 481, 484, 489, 494, 506, 511, 513, 515, 580, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 533, 536, E: 592, 597, 600, 601, 602, 607, 608), *Rusnac R. Mihai* (1472, 474, 476, 478, 482, 483, ,520, 522, 524, 526, 528, 532).

TÎRGU OCNA. Clasa X-a. *Ghețu Ioan* (1473, 475, 477, 478, 479, 481, 482, 483, 499, 513, 520, 522, 526, 528, 529, 532).

TECUCI. Clasa X-a. *Alter Misă* (1470 471, 473, 477, 478, 479, 480, 481, 484, 490, 495—499, 502, 508, 513, 515—518, 520—522, 524—526, 578—534, 536, 537, 546, 551, 552, 554, 555, 558, 560—582, 585, 588, 594, 595, 602, 605, 607), *Herşcovici Avram* (1486, 493, 498, 503, 528, 534, 555, 561, 577, 587, 589, 590, 599, E: 618), *Negoescu Emil* (1518, 525, 530, 533, 536, 537, 546, 554, 555, 558, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 585, 588, 594, 601. 602), *Teleman Felician* (1474, 477, 485, 512, 513, 515, 516, 520, 521, 525, 531, 536, 540, 546, 554, 560, 561, 564, 566, 567, 569, 574, 580, 582, 589, 590).

TIMIŞOARA Şcoala medie băeți nr. 1. Clasa VIII-a. *Mihăileanu N. Constantin* (1513*, 515, 520, E: 622, 640, 644, 646, 647, 649, 650), Clasa IX-a. *Arsenovici Tiberiu* (1472, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 491, 493, 494, 495, 496, 497), *Bărglăzan Mircea* (1480, 513, 51(, 520, 521, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 540, 545, E: 591, 592, 597, 599, 600, 601, (02, 603, 605, 606, 607, 608), *Popa Laurentiu* (1472, 474, 475, 477, 478, 480, 481, 484, 486, 493, 474, 495, 497, 513, 516, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 529, 532, 533, 536, 540, 555), *Vaselievici Alex.* (1486, 494, 495, 521, 527, 532, 540, 567, 580, E: 592, 600, (01, 602, 603, 608, 612, 614, 615, 618, 619, 620, 621, 625), Şcoala medie nr. 3 fete. Clasa IX-a. *Szende Eva* (1475, 493, 495, 520, 522, 526, 534, E: 597, 598, 600, 603), Şcoala medie de băieți nr. 5. Clasa IX-a. *Nerodea Tiberiu* (1493, 494, 495, 520, 523, 526, 527, 532, 540, 567, 580, 594, 597, 600, 601, 602, 603, 608, 612, 614, 615, 618, 619, 620, 621, 625, 629, 634 P). Şcoala medie de fete nr. 7. Clasa VIII-a. *Junger Agala* (156, 566, 568, 569, 577, E: 601, 602, 603, 625, 634), Şcoala pedagogică de învățători. Anul I. *Ştefan Iosefa* (1493, 494, 495, E: 571, 580, 586, 587, 588, 594, 595, 601, 612, 614, 620, 621). Anul III. *Sigmuth Richard* (1449, 493, E: 576, 578, 579, 586, 588, 612, 62 , 625).

TULCEA. Absolvent. *Şandru Petre* (1472, 473, 474, 475, 476, 479, 481, 482, 483, 486, 492, 494).

TURNU MĂGURELE. Clasa X-a. *Vlădescu Rodica* (1472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 480, 482, 483).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. *Ionescu Mihai Radu* (1481, 525, 565, 566, 567, 568, 569 574, 575, 580, 582, 602, 603, E: 611, 612, 614, 615, 618, 619, 620, 621, 625, 626, 633, 634, 636). Clasa X-a. *Strungaru N. Crişan* (1512, 514, 521, 523, 533, 539, 546, 640, E: 611, 612, 614, 618), *Vladu Viorel* (1512, 513, 515, 516, 518, 520, 524, 526, 527, 528, 531, 532, 533, 539, 545, E: 592, 597, 600, 607).

URLAŢI. Clasa VIII-a. *Custocea N. Soru* (1558, E: 591, 592, 597, 599, 601, 602, 603, 605, 608, 611, 620,). *Georgescu C. Sebastian* (1515, 527, E: 592, 597, 598, 603, 608, 609, 611, 612, clasa IX-a. *Diamanta Petru* (1475, 499, 520, 522, 524, 526, E: 592, 597, 600, 602, 603, 615, 618), *Iorgulescu Alexandru* (1476, 478, 479, 498, 499, 508, 540, 565, 566, 567, 569, 574, 588, 602, E: 620, 621, P).

VASLUI. Clasa VII-a. *Barbu Viorel* (E: 594, 596, 600, 601, 603, 604, 606, 608, 612, 614, 620, 621), Comuna Laza. *Floareș Alexandru* (1472, 477, 483, 494, 495, 497, 513, 519, 502, 535, 546, 555).

ZALĂU. Clasa IX-a. *Farcaș Beniamin* (1523, 525, 588, 591, 592, 601, 603, E: 607, 614, 619, 621).

* * *

— La exercițiile și problemele *propuse pentru școala de 7 ani* se primesc rezolvări numai de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a și a VIII-a, sau de la elevii anului I ai școlilor tehnice de maiștrii, sau din anul I și II ai școlilor profesionale sau pedagogice de învățători. Nu se iau în seamă soluțiile problemelor propuse pentru școala de 7 ani dacă sînt trimise de elevii claselor a IX-a, a X-a sau de studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic de *zece*, sau necorect redactate. Nu se mai primesc rezolvări de probleme după trecerea a *trei luni* de la publicarea enunțurilor problemelor respective sau de la publicarea eratei, dacă a fost cazul.

În cazul unor probleme propuse care sînt mai greu de rezolvat sau de la care nu am primit soluții bune, termenul de primirea soluțiilor se poate prelungi. *Se mai primesc soluții* la problemele: 1387, 1393, 1422, 1435, 1438, 1450, 1455, 1505, 1507, 1548, 1616, 1617, 1618, 1626, 1630, 1660, 1661, 1662, 1676, 1700, 1702, 1708, 1716, 1723, 1756, 1757, 1762, 1764, 1769, 1783, 1789, 1797, 1804 și următoarele, iar de la elementar la E: 585, 659, 677, 690 și următoarele.

Din problemele primite nu se anunță cele incomplet rezolvate, cele care conțin greșeli, cele neglijent redactate, cele care au greșeli de calcul, desene neîngrijit făcute sau sînt copiate după altele.

De asemenea nu se publică problemele propuse de către colaboratori dacă sînt cunoscute sau nu sînt însoțite de soluția lor *clar redactată*.

C. 1314. — Întreprinderea Poligrafică nr. 4

Prețul Lei 1 exemplarul

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de ... Tehnică
BUC... ...
OBMEH - C... E
VYME... A - W... ANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VI — Decembrie 1955

12

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul VI. Nr. 12 — decembrie 1955

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Congresul al II-lea al P.M.R.*	533
2.	*Din realizările matematicii şi fizicii în perioada dintre cele două congrese ale Partidului Muncitoresc Romîn*	535
3.	*Transformarea afină de Alexandru Tóth*	537
4.	*Cîteva aplicaţii ale legii lui Avogadro de Prof. D. Tănase*	545
5.	*Caleidoscop matematic*	549
6.	*Pentru cercurile de fizică*	552
7.	*Rezultatul întrecerii între cercurile de matematică şi fizică din şcoli medii pe anul 1955*	555
8.	*Chestiuni de examen (1915—1926)*	557
9.	*Probleme rezolvate (E : 534, E : 536, E : 548, E : 610, 1366, 1372, 1406, 1411, 1416, 1428, 1429, 1480, 1499, 1500, 1504)*	558
10.	*Probleme propuse (1927—1945)*	566
11.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E. 735—E. 746)*	568
12.	*Poşta redacţiei*	569
13.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	570
14.	*Tabla de materii*	580

ANUL VI 12 DECEMBRIE

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Múzeumi Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VI * Nr. 12 Decembrie 1955

CONGRESUL AL II-lea AL P.M.R.

În februarie 1948, partidul, călăuzindu-se după preţioasa indicaţie cuprinsă în Rezoluţia Conferinţei Naţionale, de a întări colaborarea şi unitatea de acţiune dintre Partidul Comunist Romîn şi Partidul Social-Democrat prin înfăptuirea unităţii politice, a izbutit să restabilească pe deplin, unitatea organizatorică, politică şi ideologică a clasei muncitoare. Astfel a luat fiinţă Partidul Muncitoresc Romîn.

Congresul Partidului Muncitoresc Romîn din februarie 1948 a desăvîrşit ceea ce se realizase încă dinainte de congres în domeniul unificării politice şi organizatorice. Crearea partidului unic al clasei muncitoare nu a fost o simplă hotărîre, deoarece la acest Congres cele două partide se prezentau cu organizaţii unice şi cu conduceri unice. Înfăpturirea acestei unităţi a izvorît în mod organic din unitatea de acţiune în cadrul Frontului Unic Muncitoresc, din acţiunea de lămurire ideologică şi apropiere tovărăşească închegată în lupta dusă în comun.

Au trecut de atunci şapte ani şi zece luni, ani de luptă îndîrjită şi de strălucite victorii ale poporului muncitor, care se pregăteşte astăzi să întîmpine Congresul al II-lea al Partidului. Oamenii muncii privesc cu mîndrie gloriosul drum de luptă străbătut în aceşti ani sub conducerea comuniştilor.

Primul nostru plan cincinal a fost îndeplinit înainte de termen în majoritatea din principalele ramuri industriale. Au fost date în funcţiune 79 de noi întreprinderi mari din toate ramurile economiei naţionale, iar alte 94 au fost dezvoltate şi înzestrate cu utilaj modern; au fost puse în funcţiune, total sau parţial, 8 termo şi hidrocentrale. In cei 7 ani şi 10 luni care au trecut de la primul congres al partidului, producţia globală industrială a crescut de peste 3 ori şi jumătate. Producţia bunurilor de consum s-a dublat în 1955 faţă de 1950. Transformarea socialistă a agriculturii a dat roade importante. A crescut şi creşte mereu numărul asociaţiilor de producţie agricolă, al întovărăşirilor agricole, creşte şi se întăreşte alianţa dintre clasa muncitoare şi ţărănimea muncitoare. In decembrie 1954 s-a lichidat sistemul de aprovizionare pe bază de cartele şi raţii, trecîndu-se la comerţul desfăşurat.

In faţa întregului popor muncitor stă astăzi sarcina îndeplinirii şi depăşirii primului plan cincinal şi trecerii la al doilea plan cincinal, în decursul căruia cu forţe sporite va continua lupta pentru construirea socialismului şi făurirea unei vieţi fericite pentru cei ce muncesc. Cel de-al doilea cincinal va însemna un nou şi puternic pas înainte pentru ţara noastră pe calea avîntului economiei şi culturii.

Plenara C.C. al partidului a hotărît convocarea pentru ziua de 23 decembrie 1955 a Congresului al II-lea al Partidului Muncitoresc Romîn. Congresul va face bilanţul realizărilor obţinute de poporul nostru muncitor în anii care s-au

scurs de la primul Congres și va trasa căile spre noi realizări în construirea socialismului. Ordinea de zi a Congresului este: raportul de activitate al C.C. al P.M.R., raportul comisiei centrale de revizie, raportul asupra Directivelor Congresului al II-lea cu privire la cel de al doilea plan cincinal de dezvoltare a economiei naționale pe anii 1956—60, raportul cu privire la modificarea Statutului P.M.R. și alegerea organelor centrale ale partidului.

Directivele Congresului al II-lea al Partidului constituie un măreț program de acțiune îndreptat spre continua dezvoltare a economiei naționale, pentru crearea unei abundențe de produse cu scopul creșterii continue a nivelului de viață material și cultural al maselor muncitoare.

Numeroasele probleme ce decurg pentru oamenii de știință din sarcinile economice puse de partid în scopul dezvoltării rapide a agriculturii și industriei bunurilor de larg consum, cer pentru rezolvarea lor eforturi susținute. Oamenii de știință din țara noastră au în fața lor exemplul științei sovietice, de la care pot învăța care este munca savantului legat de popor, cum trebuie să realizeze unitatea dintre știință și producție, cum trebuie să contribuie cercetările științifice la rezolvarea problemelor practice. Exemplul savanților sovietici constituie un imbold în munca întregii noastre intelectualități.

Deopotrivă, chimiști și fizicieni, zootehniști și agrobiologi au de adus o temeinică contribuție. Ridicarea producției în agricultură implică sarcina studierii condițiilor fizice necesare culturilor în scopul descoperirii celor mai bune metode de utilizare a factorilor naturali — lumină, apă, căldură, aer. Fizica și chimia fizică pot contribui la rezolvarea acestor probleme și de asemenea pot studia legile migrării apei în sol și prin aceasta, rezolvarea unor probleme importante cum ar fi acumularea și păstrarea umidității în regiunile secetoase, sau asanarea solului acolo unde umiditatea excesivă impiedică dezvoltarea agriculturii. Dar mai sînt și alte probleme, cum ar fi problema mecanizării agriculturii, a electrificării, a creșterii puterii de germinare a semințelor prin ultrasonare, în rezolvarea cărora matematicienii, fizicienii și energeticienii pot să contribuie cu succes.

Dezvoltarea continuă și într-un ritm rapid a industriei grele impune ridicarea nivelului tehnic al producției în toate ramurile economiei naționale, prin creșterea mecanizării și automatizării, prin perfecționare tehnică.

Hotărîrea guvernului sovietic de a ajuta unele țări să-și organizeze cercetările privitoare la folosirea pe scară largă a energiei nucleare, ne dă posibilitatea să abordăm cu ușurință cercetările în acest domeniu. Reactorii nucleari vor permite dezvoltarea într-un ritm mai rapid a industriei, iar izotopii radioactivi vor face posibile mari progrese atît în industrie și agricultură cît și în diferite domenii ale științei.

Oamenii de știință înarmați cu concepția materialist-dialectică, concepția despre lume a partidului clasei muncitoare, avînd la îndemînă cuceririle științei sovietice și bucurîndu-se de cele mai favorabile condiții pentru dezvoltarea activității științifice, cei ce lucrează pe ogorul științei pot dobîndi noi și noi succese în munca lor, care să răspundă problemelor ridicate de viață, de cerințele construcției socialiste.

Tineretului nostru, schimbul de mîine al constructorilor de azi, îi revine sarcina de a se pregăti cît mai temeinic însușindu-și cunoștințele necesare pentru a putea răspunde cu cinste înaltelor îndatoriri ce îi vor reveni în toate sectoarele de activitate.

O pregătire temeinică este necesară atît pentru acei elevi care vor continua munca în școli superioare, institute și facultăți, cît și pentru acei care vor urma diferite școli profesionale și tehnice pentru a deveni buni tehnicieni în întreprinderile și uzinele patriei noastre.

Sub steagul partidului, sub conducerea sa înțeleaptă, să pășim spre noi victorii pe tărîmul științei și culturii.

DIN REALIZĂRILE MATEMATICII ŞI FIZICII ÎN PERIOADA DINTRE CELE DOUĂ CONGRESE ALE P.M.R.

PENTRU prima oară în istoria ţării noastre, regimul democrat-popular a creat condiţii favorabile pentru o largă desfăşurare a ştiinţei şi tehnicii.

Au trecut vremurile cînd oamenii de ştiinţă erau trataţi cu nepăsare şi dispreţ, fiind adesea lipsiţi de cele mai elementare condiţii de trai şi activitate creatoare.

Partidul şi guvernul se îngrijesc zi de zi de dezvoltarea ştiinţei — care nu poate fi separată de dezvoltarea economiei naţionale — prin înfiinţarea de numeroase institute de cercetări ştiinţifice, laboratoare, staţiuni experimentale, etc. Datorită grijii permanente a partidului şi guvernului oamenii de ştiinţă se bucură de condiţii optime pentru desfăşurarea activităţii lor creatoare. Ajutorul politic şi material dat în mod permanent muncii de creaţie, contribuie la creşterea nivelului ştiinţei legate de viaţa nouă, pe care poporul nostru şi-o făureşte.

Printre creaţiile regimului nostru democrat-popular, menite să promoveze ştiinţa, să vină în sprijinul perfecţionării cadrelor didactice şi să cultive dragostea pentru muncă a tineretului, este şi Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R.

Una din ideile esenţiale ale «Societăţii» a fost legătura indisolubilă care trebuie să existe între cercetarea teoretică şi realitate, între ştinţă şi viaţă. «Gazeta Matematică şi Fizică, seria A, pentru cadre didactice şi studenţi, şi seria B în limba romînă şi maghiară, pentru elevi — publicaţii ale Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice, — dezvoltă gustul pentru studiul acestor ştiinţe şi contribuie la ridicarea continuă a nivelului învăţămîntului matematicii şi fizicii în învăţămîntul superior, mediu şi elementar în scopul de a da Patriei, elemente cît mai bine pregătite.

În anii puterii populare cercetătorii matematicieni şi fizicieni urmărind să descopere şi să studieze legile naturii, pentru a le folosi cît mai larg, pentru a le pune în slujba omului, au realizat progrese însemnate. Astăzi, spre deosebire de trecut, matematicienii şi fizicienii noştri, fără a neglija cercetările teoretice, au căutat să lege ştiinţa cu practica, cu viaţa. Această legătură constituie unul din principiile care stau la baza activităţii Academiei R.P.R. Traducerea în viaţă a acestui principiu se realizează prin colaborarea ce există între Institutul de Matematică pe deoparte, şi Institutul de Fizică, de Mecanică Aplicată, de Energetică, pe de altă parte. Matematica are nu numai rolul de instrument, dar şi pe acela de colaborator în cercetare, în procesul cunoaşterii, iar fizica prin descoperirile ei, a devenit o ştiinţă de bază pentru tehnică, industrie, agricultură. Rezultatele obţinute în această direcţie cum ar fi de exemplu, cele relative la dezvoltarea aplicaţiilor noilor maşini electrice cu parametri variabili, la studiul flambajului coloanelor de foraj petrolifer, la cercetarea efectelor compresibilităţii în mecanica fluidelor, la teoria aripei, la studiul tensiunilor termice în tuburi cu pereţi subţiri etc., ilustrează roadele muncii de colaborare.

În cadrul Institutului de Matematică s-au obținut rezultate interesante în cercetările de analiză funcțională, în determinarea soluțiilor periodice sau mărginite ale unor ecuații diferențiale ce se prezintă în studiul fenomenelor naturii, în studiul structurilor algebrice, în cercetarea funcțiilor de variabilă reală sau complexă, a funcțiilor poliarmonice, a grupurilor topologice, a ecuațiilor și sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, a teoriei invariante a propagării undelor, etc.

Cartea matematică românească a cunoscut de asemenea o dezvoltare deosebită. Astfel lucrarea acad. S. Stoilow « *Teoria funcțiilor de variabilă complexă* », un prim volum al unui tratat modern care va avea un rol deosebit în evoluția matematicii noastre, volumul « *Aerodinamica* » de acad. E. Carafoli, volumul « *Introducere matematică în mecanica fluidelor* » de prof. Caius Iacob, membru corespondent al Academiei R.P.R., cele două volume de « *Geometrie diferențială* » ale acad. Gh. Vrănceanu, cele două volume « *Metode vectoriale în fizica matematică* » de prof. N. Teodorescu, membru corespondent al Academiei R.P.R., volumul de « *Geometrie analitică* » al colectivului Creangă (Iași), — toate lucrări distinse cu premiul de stat — dovedesc importanța pe care cartea matematică o are în Republica Populară Română.

De asemenea, volumul « *Lecții de algebră* » de Vera Myller-Lebedev, cele două volume de « *Mecanica fluidelor* » de acad. E. Carafoli în colaborare cu T. Oroveanu, volumele « *Analiza matematică* » ale acad. Miron Nicolescu, volumul « *Introducere în algebră* » de acad. Gr. C. Moisil, precum și alte lucrări ce sînt în curs de apariție, ne arată că activitatea matematicienilor din țara noastră a fost bogată în ultimii ani.

În fizică de asemenea, s-au înregistrat realizări însemnate. Astfel, un colectiv al Institutului de Fizică al Academiei R.P.R. condus de inginer Paul Petresu, membru corespondent al Academiei R.P.R., a realizat un spectroscop industrial portabil, menit să execute analize calitative direct în atelier. În cadrul aceluiași Institut, acad. E. Bădărău împreună cu un colectiv, a realizat becuri solare care transmit din filament un spectru foarte asemănător cu cel al soarelui; de asemenea, acad. E. Bădărău, împreună cu G. Giurgea, a ajuns la rezultate interesante în privința creșterii puterii de germinare a semințelor prin unde ultrasonore. Colectivul condus de regretatul academician St. Vencov, a realizat o sticlă pentru ochelarii sudorilor, capabilă să rețină radiațiile nocive ale arcului de sudură. Tot în domeniul spectroscopiei (herziene) sînt cercetările profesorului Th. Ionescu cu privire le nivelele energetice ale ionilor negativi, cercetări care aduc contribuții la cunoașterea ionosferei și rolul ei în radiocomunicații. Colectivul prof. I. Agîrbiceanu a efectuat de asemenea o serie de lucrări interesante cu privire la spectrele de fluorescență ale unor molecule, la randamentul acestui fenomen, la fluorescența soluțiilor și gradul lor de polarizare, la acțiunea factorilor perturbatori, etc. Mecanismul inhibiției fluorescenței de către unii inhibitori (substanțe care împiedică reacțiile dăunătoare) a fost precizat din punct de vedere teoretic printr-o lucrare importantă a prof. Em. Lucatu. În laboratorul de optică al Universității « C. I. Parhon » a fost construit pentru prima oară în țara noastră, dispozitivul de fotoelasticimetrie care pe baza fenomenelor de interferență permite studiul distribuției eforturilor în interiorul diverselor piese (machete). În legătură cu fabricarea aparatelor optice amintim și construcția monocromatorului de tip nou pentru ultravioletul apropiat, elaborat de prof. Gh. Atanasiu. O lucrare originală de electricitate este și magnetronul imaginat, construit și experimentat de prof. Emil Pătrașcu; apoi spectrofotometrul cu celule fotoelectrice cu strat de baraj, conceput de prof, R. Grigo-

rovici. Tot în acest domeniu amintim și lucrările mai vechi ale prof. Traian Gheorghiu, membru corespondent al Academiei R.P.R., lucrări referitoare la aplicațiile celulelor fotoelectrice cu gaz în spectrofotometrie, în polarimetrie, în cercetarea absorbției și puterii rotatoare, iar actualmente, colectivul condus de prof. Traian Ggheorghiu, din care face parte și prof. Aurel Nicolau ș. a., a izbutit în cercetările asupra semiconductorilor, să prepare siliciu pur necesar pentru aceste lucrări. Problema semiconductorilor prezintă un mare interes teoretic, dar și practic în domeniul electricității și radioelectricității. Alte cercetări efectuate tot sub conducerea prof. Traian Gheorghiu, privesc pilele termoelectrice. Prof. E. Stefănescu cu colectivul său a obținut pe cale electrică produse care îi permit să prepare substanțe plastice electroizolante noi, de mare importanță în lucrările de electrificare și în special, în problemele de protecție a muncii. Colectivul conf. univ. Ciorăscu, studiază obținerea straturilor de aliaje și rezistența lor electrică. Amintim de asemenea lucrările colectivului Ing. Toma pentru construirea mașinilor de calcul electronice; colectivul candidat în științe Ghelberg, asupra emisiei monocristalelor de nichel.

Cartea de fizică romînească este în schimb, mai puțin dezvoltată. Astfel, nu au apărut decît lucrările «*Introducere în acustică*» și «*Realizări noi în ultra acustică*» de acad. E. Bădărău și volumul «*Electromagnetism*» de prof. V. Novacu, membru corespondent al Academiei R.P.R., iar în curs de editare este volumul «*Teoria relativității*» de prof. univ. Andrei Popovici și altele.

Din cele expuse se poate constata că oamenii de știință din țara noastră legînd cercetările lor de necesitățile producției au reușit în acești ani să efectueze numeroase cercetări de înalt nivel științific. În acest mediu prielnic progresului, creat de regimul democrat popular, se va dezvolta și mai departe matematica și fizica, aducînd contribuția lor la ridicarea economiei, la creșterea nivelului de trai a celor ce muncesc și paralel cu aceasta, contribuind la tezaurul științei mondiale.

TRANSFORMAREA AFINĂ

ALEXANDRU TÓTH

Conferențiar la Universitatea «I. Bolyai», Cluj

SĂ considerăm un pentagon (1, 2, 3, 4, 5) desenat pe o placă dreptunghiulară de sticlă (S). Placa are una din muchii așezată pe o masă (S') cu care face un unghi oarecare (fig. 1). Razele soarelui aruncă pe masă umbra pentagonului (1, 2, 3, 4, 5). Astfel, cu ajutorul razelor solare (considerate paralele), se crează o corespondență biunivocă între punctele celor două figuri. sau mai general, între punctele celor două plane, adică, fiecărui punct al planului S îi corespunde un punct și numai unul singur pe planul S' și invers. E clar că umbra oricărei drepte va fi tot o dreaptă. Deci, prin corespondența astfel stabilită între punctele celor două plane, unei drepte de pe un plan îi corespunde tot o dreaptă pe celălalt plan. Astfel, dreptei 12 D de pe planul S îi carespunde dreapta $1'\,2'\,D$ de pe planul S'. Se observă de asemenea că două laturi corespunzătoare ale celor două pentagoane, sau mai general două drepte corespunzătoare de pe cele două plane se întîlnesc totdeauna într-un punct al dreptei de intersecție al planelor S și S', adică pe dreapta d.

Rotind planul S în jurul dreptei d pînă cînd cele două plane (S şi S') coincid, ambele pentagoane ajung în acelaş plan. Între punctele celor două pentagoane se păstrează următoarele relaţii caracteristice:

1. segmentele care leagă punctele corespunzătoare sînt paralele;
2. dreptele corespunzătoare se întîlnesc pe dreapta d.

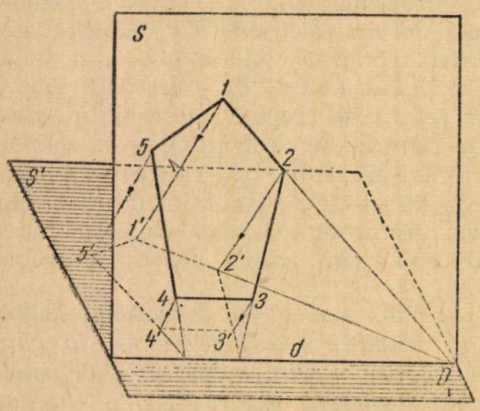


Fig. 1

Dacă între punctele a două figuri geometrice plane există aceste două relaţii, figurile se numesc « *figuri afine* ». Dreapta d se numeşte *axa afinităţii*. Segmentele paralele care leagă punctele corespunzătoare — *razele afinităţii* — determină direcţia afinităţii.

Ţinînd seama de cele două relaţii de mai sus, dintr-o figură oarecare putem obţine alte figuri. Cu alte cuvinte, putem obţine transformatele afine ale figurii date. Într-adevăr, cele două relaţii de mai sus definesc o transformare geometrică numită *transformarea afină*.

Dacă A şi A' sînt puncte afin corespunzătoare şi d axa afinităţii, punctul afin corespunzător P' al unui punct oarecare P se construeşte în modul următor (fig. 2):

Ducem dreapta PA care taie axa d în punctul P^+. Unim punctele P^+ şi A'. Din P ducem o paralelă cu AA' pînă ce taie dreapta P^+A'. Punctul de intersecţie va fi punctul căutat P'.

În această construcţie ne-am referit numai la cele două relaţii de mai sus.

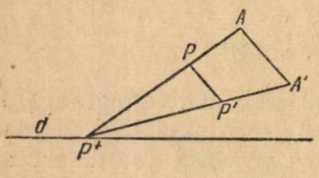


Fig. 2

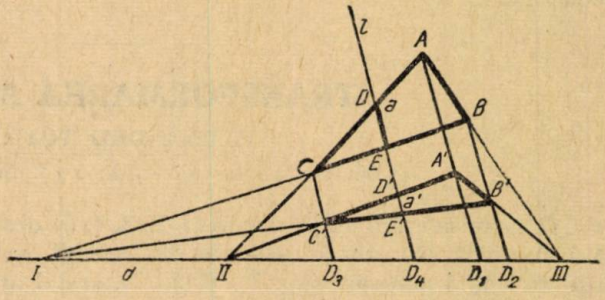


Fig. 3

Să considerăm triunghiul ABC şi fie dreapta d axa afinităţii (fig. 3). Vrem să construim transformata afină a triunghiului ABC. Fie A' punctul corespunzător al punctului A. Conform relaţiei 1° ducem din B şi C paralele cu AA'. Prelungim segmentul AC pînă taie axa d în punctul II. Unim A' cu II şi obţinem punctul C' (conform relaţiei 2°.) La fel construim şi punctul B'. Dreapta AB taie axa d în punctul III. Ducînd $A'III$ obţinem punctul B'. Punctele A', B' C' sînt vîrfurile figurii căutate.

Fie l o dreaptă, l' transformata ei afină şi d axa afinităţii (fig. 4). Din asemănarea triunghiurilor formate se deduce:

$$\frac{A'D_1}{AD_1} = \frac{B'D_2}{BD_2} = \frac{C'D_3}{CD_3} = \lambda$$

Valoarea acestor rapoarte(λ) este constantă şi caracteristică pentru o anumită afinitate: ea poartă numele de *raportul afinităţii*. Se poate spune că în această afinitate segmentele AD_1, BD_2 şi CD_3 s-au micşorat proporţional.

În cazul particular $\lambda = +1$ cele două figuri afine coincid. Dacă $\lambda = -1$ şi razele afinităţii sînt perpendiculare pe axa afinităţii avem de-a face cu o simetrie în raport cu axa afinităţii. Dacă $\lambda = \pm\infty$ afinitatea este nedeterminată.

Din studiul figurii 4 rezultă că dacă punctele A, B, C se găsesc pe o dreaptă l atunci şi punctele A', B', C' se găsesc pe o altă dreaptă l', iar dreptele l şi l' se întîlnesc într-un punct G al axei d.

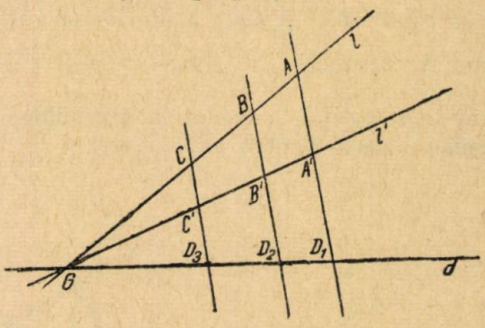


Fig. 4

Revenind la fig. 3, din egalitatea rapoartelor $\frac{B'D_2}{BD_2}$ şi $\frac{C'D_3}{CD_3}$ se deduce că dreptele BC şi $B'C'$ se întîlnesc de asemenea pe axa d în punctul I. Din aceste proprietăţi rezultă că transformata afină a triunghiului ABC este tocmai triunghiul $A'B'C'$.

Rezultă şi concluzia că fiind date axa afinităţii şi două puncte afin corespunzătoare, afinitatea este perfect determinată. Pornind de la aceste date se poate construi transformata afină a oricărei figuri. Construind punctele corespunzătoare ale punctelor ei într-un număr oarecare. Astfel mai sus am reuşit să construim transformata unui triunghi.

Fiind dată o figură geometrică; axa afinităţii şi un punct al figurii corespunzătoare pot fi alese arbitrar. În cazurile mai sus studiate perechile de puncte corespunzătoare se găseau de aceiaşi parte a axei. Dacă raportul afinităţii (λ) este negativ, axa vine între cele două puncte corespunzătoare.

Punctele comune ale axei şi ale unei figuri sînt şi punctele transformatei ei afine.

Să construim spre exemplu, transformata afină a patratului (1, 2, 3, 4) (fig. 5). Patratul (1, 2, 3, 4) şi transformatul lui afin — paralelogramul (1′, 2′, 3′, 4′) sînt tăiate de axă în punctele C şi D care sînt comune pentru ambele figuri.

Din fig. 5 se constată că printr-o afinitate, dreptele paralele se transformă în alte drepte tot paralele. Astfel $(1,2) \parallel (3,4)$ şi la fel $(1', 2') \parallel (3', 4')$. Se constată de asemenea că dreptele paralele cu axa, se transformă în drepte paralele tot cu axa.

Se constată de asemenea că segmentele egale se transformă în segmente egale. Exemplu: $(1, 2) = (4,3)$, la fel şi segmentele corespunzătoare $(1', 2') = (4', 3')$. Această proprietate se enunţă mai general spunînd că afinitatea păstrează raportul simplu al segmentelor.

Unghiul în general, nu se păstrează într-o afinitate. Astfel în fig. 5, unghiurilor patratului îi corespund unghiuri diferite în paralelogram. Spunem că afinitatea nu este o corespondență « conformă ».

Să examinăm relația dintre ariile a două figuri afine (fig. 3).

Fie l una din razele afine, a și a' segmentele ei comune cu triunghiurile.

$$\frac{D'D_4}{DD_4} = \frac{E'D_4}{ED_4} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{a'}{a} = \lambda$$

Din aceste egalități urmează că $a' = \lambda a$. Ambele triunghiuri fiind între paralelele BB' și CC', ariile lor se raportează ca și segmentele care pornesc din A, respectiv A'. Dar raportul acestora este tocmai $\frac{a'}{a}$, adică λ. Deci raportul ariilor celor două triunghiuri este tot λ. Proprietatea aceasta se generalizează pentru orice figură.

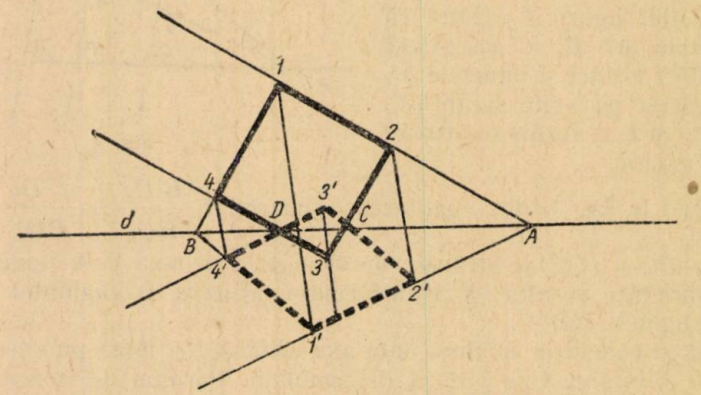


Fig. 5

Pornind de la această proprietate putem afirma că figurile afine ocupă un loc intermediar între figurile congruente și asemenea, sub acest aspect. Construind o figură asemenea cu una dată înseamnă că o mărim sau micșorăm în două direcții, în aceiași măsură și obținem două figuri între ariile cărora există relația:

$$A' = \lambda^2 A$$

unde am notat cu A și A' ariile lor și cu λ raportul lor de asemănare. Pe cînd în cazul a două figuri afine am văzut că avem relația $A' = \lambda A$ (λ raportul afinității). Aceasta revine a spune că afinitatea mărește sau micșorează figurile într-o singură direcție.

Recapitulînd cele dezbătute, proprietățile mai însemnate ale afinităților pot fi rezumate în următoarele puncte:

1. razele care leagă perechile de puncte corespunzătoare sînt paralele;
2. dreptele corespunzătoare trec prin punctele corespunzătoare și se întîlnesc pe axa afinității;

Pe dreptele care leagă perechi de puncte corespunzătoare, axa afinității determină niște segmente ale căror raport este constant și caracteristic;

3. afinitatea este determinată prin axa afinității și două puncte corespunzătoare;

4. afinitatea este o corespondență colineară;

5. punctele de intersecție ale unei figuri cu axa afinității aparțin și transformatei sale afine;

6. într-o afinitate, dreptelor paralele le corespund tot drepte paralele;

7. dacă o dreaptă este paralelă cu axa afinității, paralela va fi și dreapta afin corespunzătoare;

8. afinitatea păstrează raportul segmentelor;

9. afinitatea nu este o corespondență conformă;

10. raportul ariilor a două figuri afine este tocmai raportul afinității.

Punctele 1. și 2. exprimă proprietăți fundamentale, ele determină afinitatea. Celelalte teoreme sînt echivalente, una se poate înlocui cu alta, una se deduce din cealaltă.

★

În figurile 3 și 5 triunghiurile respectiv, patratele sînt într-o «poziție afină». Schimbînd poziția unuia din triunghiuri sau patrate relațiile fundamentale cu care am definit afinitatea în general, nu se păstrează. Dar figurile se numesc afine și în noua lor poziție. Proprietățile enunțate în punctele 4°., 6°., 8°., 9°., și 10°. se păstrează. Vorbim de afinitate și în acest caz, dar într-un sens mai larg al cuvîntului. Spre a face o deosebire între cele două feluri de afinități, afinitatea în sensul mai restrîns — în felul în care a fost tratată aici — se numește afinitate axială. Am văzut definiția ei. Afinitatea în sensul larg se definește în modul următor:

o corespondență biunivocă și colineară între punctele planului în care diviziunea a trei puncte de pe orice dreaptă rămîne invariantă se numește afinitate. O astfel de afinitate se poate compune din succesiunea cîtorva afinități axiale.

★

Ne sînt cunoscute încă din școala medie, cîteva transformări geometrice: translația, rotația, simetria, omotetia, asemănarea. Afinitatea este o transformare mai generală decît acestea și le cuprinde drept cazuri particulare. Se observă că în definiția dată pentru afinitate sînt cuprinse și transformările întîlnite în școala medie. Într-adevăr, în toate aceste transformări, colinearitatea punctelor și diviziunea a trei puncte de pe orice dreaptă se păstrează.

Despre marea importanță a transformărilor geometrice s-a scris în paginile Gazetei Matematice și Fizice, seria B. S-a arătat valoarea lor teoretică și practică (v. articolele: Cîteva aplicațiuni tehnice ale transformărilor geometrice. R.M.F. an II, nr. 3; Transformarea prin polare reciproce. R.M.F. an III, nr. 9; Inversiunea. R.M.F. an IV, nr. 9).

În ce privește transformările afine ele au deasemenea aplicații bogate în diferite domenii, în geometrie descriptivă, în stereometrie, în statică grafică, etc. În capitolul următor ne vom folosi de această transformare pentru a studia proprietățile elipsei, prezentînd astfel, sub un alt, aspect, utilitatea transformărilor.

Elipsa transformată afină a cercului. Să construim figura afină a cercului, afinitatea fiind dată prin axa și două puncte corespunzătoare O și O'. Să considerăm cercul de centru O și rază r. Pe circumferința cercului luăm punctele $A, B, C, \ldots$ și construim punctele lor afin corespunzătoare $A', B', C', \ldots$ Luînd

cît mai multe puncte pe cerc vom putea obține mai exact figura lui afină. Să vedem care sînt proprietățile acestei figuri.

1. Dacă A și B sînt puncte diametral opuse ale cercului, avem:

$$A'O' : O'B' = AO : OB = 1$$

conform proprietății de sub punctul 8°. capitolul precedent. Rezultă că punctul O' împarte în două părți egale distanța $A'B'$. Deci figura obținută admite un centru. Centrele cercului și al figurii sale afine sînt puncte corespunzătoare.

Segmentul care unește două puncte ale figurii obținute se numește *coardă*. Corzile care trec prin centru se numesc *diametri*.

2. Să examinăm mărimile diametrilor figurii afine. Facem abstracția de cazurile cînd raportul afinității este egal cu ± 1 sau $\pm \infty$ cazuri, care sau nu duc la curbe noi, sau nu ne dau afinități veritabile.

În cazul unui diametru al cercului, care este paralel cu axa afinității, vom obține un diametru corespunzător de aceeași mărime și în sistemul celălalt. Dacă A este un punct al cercului și OA taie axa în punctul X avem:

$$OA : O'A' = XO : XO'; \quad OA = O'A' \text{ are loc dacă } XO = XO'$$

Egalitatea ultimă are loc numai în două cazuri:

a) X este la infinit, adică OA este paralel cu axa;

b) Dacă XOO' este un triunghi isoscel, deci X este la intersecția axei cu mediatoarea segmentului OO'. În cazul cînd razele afinității sînt perpendiculare pe axe, aceste cazuri coincid. În celelalte cazuri $OA \neq O'A'$ și diametrilor cercului corespund în figura afină diametri de altă mărime, mai mari sau mai mici.

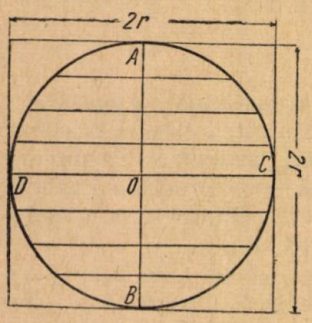


Fig. 6

Deci figura afină a cercului nu este tot un cerc ci o altă curbă cu centru, care se numește *elipsă*.

3. Folosindu-ne de împrejurarea că *elipsa este* figura afină a cercului vom deduce multe din proprietățile ei din proprietățile cercului. Acele proprietăți ale cercului care rămîn invariante în afinitate se transmit și elipsei.

Introducem denumirile următoare: diametrii elipsei corespunzători unei perechi de diametri perpendiculari la cerc se numesc diametri conjugați. Acei doi diametri conjugați care sînt perpendiculari între ei se numesc axele elipsei. Extremitățile axelor sînt puncte ale elipsei numite vîrfurile elipsei.

a). Locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc paralel cu un diametru este un alt diametru perpendicular pe primul (fig. 6).

Această proprietate transmisă elipsei se transformă în următoarea:

Din doi diametri conjugați ai elipsei unul (oarecare) este locul geometric al mijloacelor coardelor paralele cu celălalt (fig. 7).

b) Tangentele duse la extremitățile a doi diametri perpendiculari ai cercului sînt paralele două cîte două și cele patru tangente astfel obținute formează un patrat (fig. 6). De aici urmează:

Tangentele duse la extremităţile unuia dintre doi diametri conjugaţi ai elipsei sînt paralele cu celălalt diametru şi cele patru tangente duse la extremităţile a doi diametri conjugaţi formează un paralelogram (fig. 7).

c) Patratele circumscrise cercului sînt de arii egale. De aici: paralelogramele circumscrise elipsei, ale căror laturi sînt paralele cu doi diametri conjugaţi, sînt de arii egale. Dacă notăm lungimile axelor elipsei cu $2a$ şi $2b$, iar lungimile a doi diametri conjugaţi cu $2a_1$ şi $2b_1$ avem:

$$4ab = 4a_1 b_1 \cdot \sin \varphi$$

(φ fiind unghiul format de cei doi diametri conjugaţi).

d) Notînd cu r raza unui cerc şi cu a şi b semiaxa mare şi semiaxa mică a elipsei afin corespunzătoare, să calculăm aria elipsei.

În acest scop avem nevoie de raportul afinităţii (λ).

Triunghiul format de semiaxa mare şi semiaxa mică a elipsei va avea aria $\frac{ab}{2}$. Semiaxelor elipsei le corespunde în afinitate, două raze perpendiculare ale cercului. Aria triunghiului format de aceste raze va fi: $\frac{r^2}{2}$.

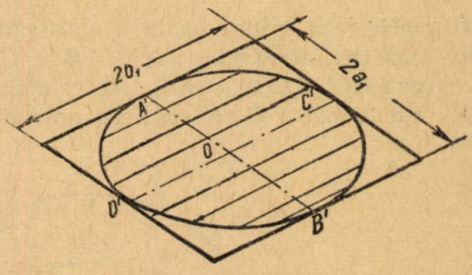


Fig. 7

Raportul ariilor celor două triunghiuri va fi:

$$\frac{ab}{2} : \frac{r^2}{2} = \lambda \quad \text{deci } \lambda = \frac{ab}{r^2}.$$

Aria cercului este: πr^2

Conform proprietăţii de sub punctul 10°, al capitolului precedent avem: aria elipsei $= \lambda \times$ aria cercului $= \frac{ab}{r^2} \cdot r^2\pi = ab\pi$. Deci se obţine aria elipsei luînd produsul semiaxelor şi a numărului π.

Lungimea elipsei nu poate fi calculată pe această cale. Ea se calculează mult mai greu, cu formula:

$$l = \pi (a + b)\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \dots\right]$$

Construcţia elipsei cu ajutorul afinităţilor.

a) Să considerăm un cerc oarecare. Luăm ca axa afinităţii un diametru al cercului. Fie razele afinităţii perpendiculare pe acest diametru (fig. 8). În acest caz extremităţile uneia dintre axele elipsei vor coincide cu extremităţile acestui diametru (A, B), iar cealaltă axă (C', D') va fi perpehdiculară pe acest diametru. Pentru a construi punctul P' al elipsei, corespunzător unui punct P arbitrar al cercului, ducem dreapta CP care taie axa afinităţii într-un punct G. Unim punctul G cu C' şi unde această dreaptă taie raza afinităţii care trece prin P, acolo va fi punctul căutat P'. Astfel putem construi orice punct al elipsei.

b) Dacă PP' taie axa AB în P_1 (fig. 8) avem:

$$\frac{PP_1}{P'P_1} = \frac{CO}{C'O} = \frac{a}{b}$$

unde a şi b sînt semiaxele elipsei.

În această afinitate particulară distanţa punctelor corespunzătoare ale cercului şi elipsei, socotite de la axa afinităţii, se raportează ca cele două axe ale elipsei.

Dacă ducem cercul cu centrul în O şi cu raza OC', acest cerc va fi tăiat de OP în punctul P_2. Avem:

$$PP_1 : P'P_1 = a : b = OP : OP_2 \quad \text{şi} \quad P_2P' \parallel OP_1$$

În consecinţă, elipsa poate fi construită şi în modul următor: fiind dat cercul de rază OC, construim axele AB şi $C'D'$. Ducem cercul cu centrul în O şi cu raza OC'. Dacă o rază taie cele două cercuri concentrice în punctele P şi P_2, din punctul P ducem perpendiculara pe axa afinităţii (pe AB), iar din P_2

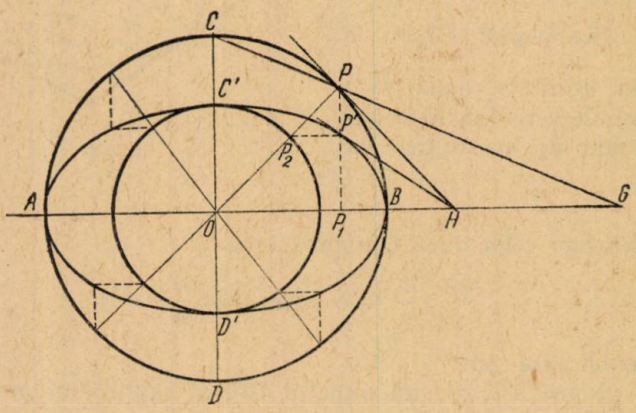


Fig. 8

paralela cu această axă. Aceste drepte se întîlnesc în punctul P', un punct al elipsei. Elipsa fiind o curbă cu două axe de simetrie, găsim uşor încă alte 3 puncte, pornind de la punctul P'.

În legătură cu elipsa se pun încă multe probleme de construcţii, astfel, să-i construim tangenta într-un punct oarecare.

Tangenta în punctul P' al elipsei este corespunzătoarea afină a tangentei în punctul P al cercului (fig. 8). Deci ducînd tangenta PH a cercului obţinem punctul de intersecţie cu axa afinităţii, punctul H, Unind punctul H cu punctul P' obţinem tocmai tangenta căutată a elipsei, tangenta $P'H$.

S-ar putea ridica încă, multe probleme în legătură cu elipsa. Am prezentat doar cîteva din multele şi frumoasele aplicaţii ale tranformărilor afine.

Folosind proprietăţile studiate ale afinităţilor, să se rezolve următoarele probleme:

1. Sînt date axa afinităţii (d), două puncte corespunzătoare (A, A') şi un punct P pe dreapta AA'. Să construim în acest caz particular, punctul corespunzător P'.

2. Fiind dată axa (d) și două puncte corespunzătoare (A, A') să se construiască punctul afin corespunzător al punctului P, dacă $AA' \parallel d$ (două cazuri: P se găsește pe AA', sau nu se găsește).

3. Sînt date axa afinității d și două puncte corespunzătoare P și P' Să se construiască dreapta corespunzătoare dreptei l. Două cazuri: P se găsește pe dreapta l, ori nu se găsește pe ea.

4. Să se arate că afinitatea este determinată dacă cunoaștem:

a. trei perechi de puncte corespunzătoare,

b. două perechi de drepte corespunzătoare,

c. două drepte și două puncte corespunzătoare.

5. Să se construiască cîte două drepte corespunzătoare care să treacă prin punctele corespunzătoare O, O' (a, a' și b, b') și care să fie perpendiculare în ambele sisteme. (Sînt două cazuri: razele afinității sînt perpendiculare pe axă; ori nu sînt perpendiculare).

6. Se cunosc axele elipsei. Cu ajutorul cercurilor înscrise și circumscrise să se determine punctele în care elipsa este tăiată de o dreaptă arbitrară, fără a desena elipsa.

CÎTEVA APLICAȚII ALE LEGII LUI AVOGADRO

D. TĂNASE,

Prof. s. m. 18, București

LEGEA lui Avogadro « Volume egale de gaze diferite luate în aceleași condiții de temperatură și presiune cuprind același număr de molecule », a fost enunțată de către savantul italian al cărui nume îl poartă, în anul 1811, sub formă de ipoteză. Cu doi ani mai tîrziu, adică în 1813, aceiași lege a fost formulată de fizicianul Ampère.

Această lege poate fi demonstrată ușor cu ajutorul teoriei cinetico-moleculare.

Să presupunem că avem două volume de cîte 1 cm^3 de două gaze diferite, la aceiași presiune și temperatură. Conform teoriei cinetico-moleculare a gazelor, valoarea presiunii se calculează din relația:

$$\text{(a)} \qquad pV = \frac{2}{3} N \left(\frac{mu^2}{2} \right) = RT$$

unde N este numărul de molecule din volumul respectiv (1 mol),

m — masa reală a unei molecule,

u — viteza medie moleculară,

V — volumul gazului,

p — presiunea gazului,

R — constanta universală a gazelor,

T — temperatura gazului exprimată în grade absolute.

Pentru cele două gaze avem presiunile:

$$\bar{p}_1 = \frac{2}{3} \frac{N_1}{V_1} \left(\frac{m_1 \bar{u}_1^2}{2} \right) \quad \text{și} \quad \bar{p}_2 = \frac{2}{3} \frac{N_2}{V_2} \left(\frac{m_2 u_2^2}{2} \right)$$

Conform legii lui Avogadro, $\overline{p}_1 = \overline{p}_2$, deci:

$$\frac{2}{3}\frac{N_1}{V_1}\left(\frac{m_1\overline{u}_1^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\frac{N_2}{V_2}\left(\frac{m_2\overline{u}_2^2}{2}\right);$$

de asemenea $V_1 = V_2 = 1$ cm², de unde: $N_1\left(\frac{m_1\overline{u}_1^2}{2}\right) = N_2\left(\frac{m_2\overline{u}_2^2}{2}\right)$.

Experimental s-a observat că prin amestecarea a două gaze diferite la aceeaşi temperatură, echilibrul termic nu variază, ceea ce arată că energia cinetică medie moleculară a acestor gaze trebuie să fie aceeaşi la aceeaşi temperatură, adică: $\frac{m_1\overline{u}_1^2}{2} = \frac{m_2\overline{u}_2^2}{2}$, de unde rezultă că:

$$N_1 = N_2$$

adică un volum de 1 cm³ de orice gaz cuprinde acelaşi număr de molecule la aceeaşi temperatură şi presiune.

Din cele expuse mai sus, rezultă că o moleculă-gram (un mol) din orice gaze care se găsesc la aceeaşi temperatură şi presiune ocupă acelaşi volum numit volum molar (*Vm*).

Se numeşte moleculă-gram sau mol contitatea dintr-un corp exprimată în grame şi egală cu greutate sa moleculară. De exemplu:

$$1 \text{ mol } H = 2{,}016 \text{ g}$$
$$1 \text{ mol } O = 32 \text{ g}$$
$$1 \text{ mol } N = 28 \text{ g}.$$

Densităţile acestor gaze sînt: $\rho_{H_2} = 0{,}000096$ g/cm³; $\rho_{O_2} = 0{,}001429 \frac{g}{cm^3}$ şi $\rho_{N_2} = 0{,}001239 \frac{g}{cm^3}$.

Calculînd volumul după relaţia $V = \frac{m}{\rho}$, găsim pentru toate gazele la temperatura de O°C şi presiunea de 760 mm col. Hg. (torri) un volum $V \approx 22415$ cm³ $= 22,\ 415$ *l*.

Prin diferite metode fizice s-a determinat numărul de molecule dintr-un mol de substanţă şi i s-a dat numele de numărul lui Avogadro, a cărui valoare este:

$$N = 6{,}023 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecule}}{\text{mol}}$$

Numărul de molecule dintr-un cm³ de gaz la temperatura de O°C şi presiunea de 760 mm. col. Hg. este:

$$n = \frac{N}{V\,molar} = \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}}{22\,415} \approx 2{,}7 \cdot 10^{19} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}.$$

Acesta se numeşte numărul lui Loschmidt.

1. Cu ajutorul numărului lui Avogadro se poate calcula masa reală a atomului unui element oarecare.

De exemplu:

$$m_{H_2} = \frac{\text{Greut. molec.}}{2N} = \frac{2{,}016}{2.6{,}023^{23}} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\,\text{g (gaz biatomic)}$$

$$m_{O_2} = \frac{32}{2.6{,}023 \cdot 10^{23}} = 2{,}66 \cdot 10^{-23}\,\text{g}.$$

Din aceste două exemple observăm că masa reală a atomului este foarte mică, de aceea în practică se foloseşte masa relativă (greutate atomică şi moleculară relativă). Greutatea atomică şi moleculară relativă se iau în raport cu $\frac{1}{16}$ din masa atomului izotopului O^{16}.

2. Cu ajutorul legii lui Avogadro se poate determina greutatea moleculară a gazelor şi a vaporilor.

Să considerăm două volume egale de gaze diferite, luate la aceeaşi temperatură şi presiune, reprezentate prin pătratele din fig. 1.

Să presupunem că unul din gaze este oxigenul. Cele două volume de gaze au greutăţile P' şi P'', iar greutăţile lor moleculare sînt p' şi p''.

Putem scrie relaţiile:

$$\overline{P}' = n\overline{p}' \qquad (1)$$

şi

$$\overline{P}'' = n\overline{p}'' \qquad (2)$$

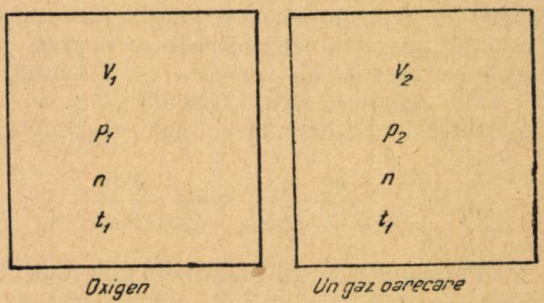


Fig. 1

unde n este numărul de molecule din V_1 şi V_2, care este acelaşi. Impărţind egalităţile (1) şi (2) membru cu membru, avem:

$$\frac{\overline{P}'}{\overline{P}''} = \frac{n\overline{p}'}{n\overline{p}''} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{P}'}{\overline{P}''} = \frac{\overline{p}'}{\overline{p}''} \qquad (3)$$

adică, raporul greutăţilor a două volume egale de gaze diferite luate în aceleaşi condiţii de temperatură şi presiune este egal cu raportul greutăţilor lor moleculare.

Să considerăm că cele două gaze au densităţile ρ_1 şi ρ_2 cu care putem scrie relaţiile:

$$P' = V_1 \rho_1 \quad (4) \quad \text{şi} \quad P'' = V_2 \rho_2 \qquad (5)$$

Împărţind egalitatea (4) la (5) obţinem:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{V_1 \rho_1}{V_2 \rho_2} \quad \text{sau} \quad \frac{P'}{P''} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad (6)$$

deoarece $V_1 = V_2$.

Din relaţiile (3) şi (6) obţinem $\frac{p'}{p''} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ (7), adică: raportul greutăţilor moleculare a două gaze diferite este direct proporţional cu raportul densităţilor celor două gaze luate în aceleaşi condiţii de temperatură şi presiune.

Din relaţia (7) scoatem: $p'' = p' \frac{\rho_2}{\rho_1}$.

Considerînd densitatea oxigenului în raport cu aerul (densitatea relativă) $\rho_1 = 1{,}105$ şi greutatea moleculară relativă $p' = 32$, scriem relaţia:

$$p'' = \frac{32}{1{,}105}\rho_2 \quad \text{sau} \quad p'' = 28{,}96\,\rho_2. \tag{8}$$

Cu ajutorul acestei relaţii putem determina greutatea moleculară a diferitelor gaze sau substanţe în stare de vapori (departe de punctul de saturare), cunoscînd densitatea lor, care se poate determina prin metode fizice.

Constanta 28,96 poate fi considerată greutatea moleculară medie a aerului, care este un amestec de gaze.

3. Cu ajutorul volumului molar se pot determina de asemenea, densitatea absolută şi greutatea specifică a unui gaz.

Volumul molar al gazului ideal, după cum s-a văzut mai sus, este 22,415 l (dm^3) în condiţii normale; el variază cu temperatura şi presiunea. Această valoare poate fi considerată şi pentru gazele reale însă cu aproximaţie, deoarece acestea nu urmează decît aproximativ legile gazelor ideale.

De exemplu, densitatea absolută a oxigenului se calculează împărţind greutatea moleculară la volumul molar normal

$$\rho_{O_2} = \frac{m}{V\text{mol. Normal}} = \frac{32\,g}{22\,415\,dm^3\,N} = 1{,}429\ \text{g/dm}^3 \quad \text{sau} \quad 1{,}429\,\frac{\text{kg}}{m^3\,N}$$

Pentru alte gaze, care diferă mai mult de gazul ideal, diferenţa între greutatea specifică calculată din relaţia dată mai sus şi aceea determinată experimental este mai mare; de cele mai multe ori însă, greutatea specifică calculată din greutatea şi volumul molecular este suficient de precisă pentru calculele tehnice.

4. Cunoscînd volumul molar, putem calcula constanta universală a gazelor (R), din relaţia:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \ldots = R$$

Valoarea numerică a constantei R şi unităţile de măsură rezultă din unităţile alese pentru ceilalţi termeni din relaţia:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = R,$$

aşadar:

p_0 este presiunea atmosferică (At),

V_0 este volumul molar exprimat în $\frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}$,

T_0 este temperatura gazului în grade absolute.

$$R = \frac{1\ \text{At.}\ 22\,415\,\frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}}{273{,}16°\text{K}} = 82{,}06\,\frac{\text{At cm}^3}{\text{mol°K}}$$

sau dacă exprimăm presiunea în $\frac{kgf}{cm^2}$, avem:

$$R = \frac{1{,}0332 \cdot 22415}{273{,}16} = 84{,}7 \frac{kgf\,cm^3}{cm^2 \cdot mol°K} = 84{,}7 \frac{kgf \cdot cm}{mol°K} = 0{,}847 \frac{kg \cdot m}{mol°K}$$

1 At (atm. fizică) $= 1{,}0332 \frac{kgf}{cm^2}$.

Din calculul de mai.sus vedem că pentru R se folosesc drept unități de măsură unitățile lucrului mecanic (energie). Aceasta se poate stabili și cu ajutorul ecuației dimensionale

$$[R] = \frac{[pV]}{[T]} = \frac{\frac{MLT^{-2}}{L^2} \cdot L^3}{T} = ML^2 T^{-3}.$$

Valoarea lui R exprimată în calorii, cum se procedează de multe ori în calcule, este:

$$R = 0{,}8479 \frac{kgm}{mol°K} : \quad 426{,}8 \frac{kg \cdot m}{mol°K} = 0{,}00198 \frac{kcal}{mol°K} = 1{,}98 \frac{kcal}{mnl°K}.$$

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Matrice pătrate cu proprietăți interesante. Un tablou de numere așezate pe linii și coloane este numit în matematici « matrice ». Dacă numărul liniilor este egal cu acel al coloanelor, tabloul este o matrice pătrată. Ne propunem să găsim o astfel de matrice cu nouă elemente așa ca *suma numerelor de pe orice linie, coloană sau diagonală să fie aceeași*:

a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3

Problema pe care vrem s-o rezolvăm revine la găsirea unor numere $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ care trebuie să satisfacă relațiile

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = a_1 + a_2 + a_3 =$$
$$= b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_2 + c_3 = a_3 + b_2 + c_1.$$

Cele șapte ecuații cu nouă necunoscute formează un sistem omogen nedeterminat. Dacă presupunem date trei din cele nouă litere atunci le putem exprima pe celelalte cu ajutorul acestora.

Este de preferat să luăm drept cunoscute:

$A = \frac{1}{9}$ (din suma elementelor matricei); $B = a_1 - A$ și $C = c_1 - A$.

În acest caz matricea căutată devine:

$A+B$	$A-(B+C)$	$A+C$
$A-(B-C)$	A	$A+(B-C)$
$A-C$	$A+(B+C)$	$A-B$

Dacă $A > B > 2C > 0$ se poate constata că tabloul conține nouă numere diferite a căror așezare în ordine crescătoare este:

$$A-(B+C);\ A-B;\ A-(B-C);\ A-C;\ A;\ A+C;$$
$$A+(B-C);\ A+B;\ A+(B+C).$$

Să introducem primele nouă numere ale șirului natural într-un tablou ca cel de mai sus. Suma elementelor matricei va fi: $1+2+3+\ldots+9=45$. Deducem $A=5$ și pentru că primele două numere sînt 1 și 2 trebuie să avem: $A-(B+C)=1$ și $A-B=2$ deci $B=3$ și $C=1$ Tabloul căutat este

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Prin rotirea acestei matrice în jurul centrului « 5 » astfel ca latura (8; 1; 6) să ocupe pe rînd locul celorlalte laturi ale patratului, obținem noi matrice cu aceleași proprietăți ca ale primei. De asemenea după ce rotim matricea în jurul axei (1, 5, 9) formăm o nouă matrice din care deducem apoi prin rotirea în jurul centrului alte trei patrate noi Toate matricele patrate posibile, care se pot forma cu primele nouă numere ale șirului natural sînt următoarele:

8 1 6	4 3 8	2 9 4	6 7 2	6 1 8	2 7 6	4 9 2	8 3 4
3 5 7	9 5 1	7 5 3	1 5 9	7 5 3	9 5 1	3 5 7	1 5 9
4 9 2	2 7 6	6 1 8	8 3 4	2 9 4	4 3 8	8 1 6	6 7 2

Matrice patrate de felul celor arătate mai sus sînt denumite de unii autori « patrate magice ». Numele acesta vine de la faptul că în evul mediu s-au atribuit fără nici un temei acestor tabele cu numere, unele proprietăți miraculoase.

Variind valorile lui A, B și C obținem nesfîrșit de multe patrate noi cu aceleași proprietăți.

Dintr-un patrat dat se obțin altele cu aceleași însușiri, prin adunarea la fiecare număr al tabloului a unei aceleiași cantități r; sau înmulțind elementele tabloului cu un număr oarecare k. Patrate noi se mai obțin dintr-un patrat dat, prin rotirea acestuia în jurul centrului — ca mai sus — sau prin rotirea în jurul axei mijlocii și apoi în jurul centrului.

Un patrat interesant este și următorul

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Acesta este format numai din numere prime diferite.

Asamblarea figurilor geometrice. În practică se pune uneori problema ca dintr-una sau mai multe bucăţi de tablă cu forme geometrice determinate, să se formeze figuri, fără pierdere de material, care prin asamblare să ne dea o altă figură cu o formă stabilită dinainte. Problema este complexă şi rezolvarea ei diferă de la caz la caz. Să formăm, de pildă, din cinci patrate egale un singur patrat.

Fie cinci patrate alăturate, ca în figură, care constituie un dreptunghi format din porţiunile de arie: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Ducem din B perpendiculara BC pe prelungirea diagonalei EF. Patratul $ABCD$ este echivalent cu aria celor cinci patrate date. Într-adevăr, dacă notăm cu a latura unui patrat dat, rezultă din asemănarea triunghiurilor BCF şi EHF că avem:

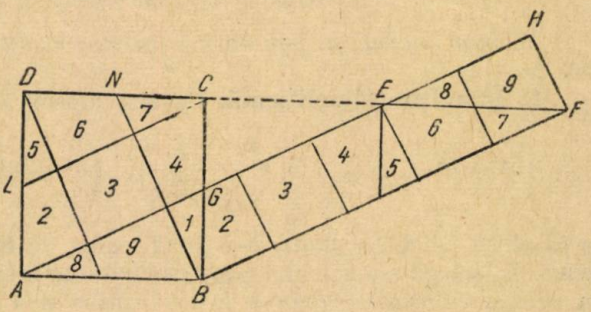


Fig. 1

$$BC = \frac{BF \cdot HF}{EF} = \frac{5a \cdot a}{a\sqrt{5}} = a\sqrt{5}$$

şi prin urmare $BC^2 = 5a^2$.

Dacă ducem liniile $BN \parallel DK$ şi $AG \parallel CL$, patratul cel mare se descompune în porţiuni respectiv egale cu porţiunile (1; 2;...9), ale dreptunghiului format din cele cinci patrate date. Asamblarea se face alipind părţile (1, 2...9) în modul cum sînt ele aşezate în interiorul patratului $ABCD$.

3. O demonstraţie pentru formula $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$.

Formăm un triunghi cu unghiurile $\widehat{A} = \alpha$ şi $\widehat{B} = \beta$, atunci $\widehat{ACD} = \alpha + \beta$.

Dacă notăm laturile triunghiului cu a, b, c, avem succesiv:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AD}{b} = \frac{AD \cdot a}{b \cdot a}.$$

Expresia $AD.a$ reprezintă dublul ariei triunghiului ABC, de aceea această expresie poate fi înlocuită prin $c.\ CE$, unde CE este înălţimea pe latura c.

Avem astfel

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CE \cdot c}{a \cdot b} = \frac{CE\,(BE + AE)}{a \cdot b}$$

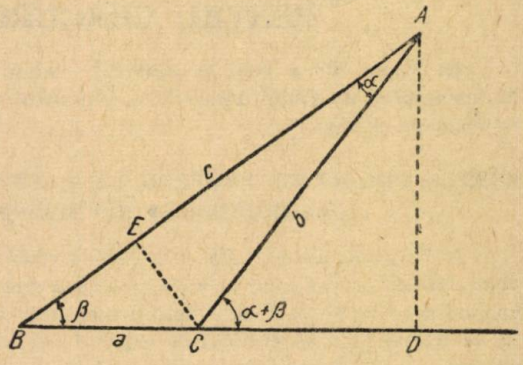


Fig. 2

sau

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CE}{b} \cdot \frac{BE}{a} + \frac{CE}{a} \cdot \frac{AE}{b}.$$

Se știe că $\frac{CE}{b} = \sin\alpha$; $\frac{BE}{a} = \cos\beta$; $\frac{CE}{a} = \sin\beta$ și $\frac{AE}{b} = \cos\alpha$ înlocuind aceste expresii în formula de mai sus obținem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

În mod analog se pot obține formule pentru $\sin(\alpha - \beta)$; $\cos(\alpha + \beta)$ și $\cos(\alpha - \beta)$.

4. Înmulțire simplificată. Un elev a avut de înmulțit expresiile:

$$\left(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{2}{a-1}\right); \quad \left(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 - \frac{2}{a+1}\right)$$

și ca să nu calculeze mult, n-a ținut seama de fracțiile din interiorul parantezelor. La școală s-a calculat produsul la tablă fără a neglija fracțiile și s-a ajuns la același rezultat. Elevul a fost surprins și a cerut explicații. La cercul de matematică i s-a explicat cauza. Prima paranteză reprezintă $\frac{a^5 - 1}{a + 1}$ iar a doua pe $\frac{a^5 + 1}{a - 1}$ Rezultatul înmulțirii celor două paranteze este dat de

$$\frac{a^5+1}{a-1} \cdot \frac{a^5-1}{a+1} = \frac{a^5-1}{a-1} \cdot \frac{a^5+1}{a+1} =$$

$$= (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \cdot (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1).$$

Așa se explică de ce a obținut elevul nostru un rezultat corect deși nu a ținut seama de fracțiile din paranteze, ceea ce în alte împrejurări reprezintă o greșeală.

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

In scopul de a veni în ajutorul acelora care vor participa la « Olimpiadele de Matematică și de Fizică 1955—56 », publicăm materialul de mai jos, extras din Fizica v. școle nr. 5 1955.

CÎTEVA PROBLEME PROPUSE LA OLIMPIADA DE FIZICĂ A UNIVERSITĂȚII «LOMONOSOV» DIN MOSCOVA, de V. P. SALNOV

1. De pe un aerostat aflat la o înălțime constantă, cade o greutate oarecare. La o secundă după căderea primei greutăți, cade și a doua greutate. Ambele greutăți sînt legate cu un fir inextensibil lung de 93, 1 m. După cît timp de la căderea celei de-a doua greutăți firul începe să se întindă? La ce distanță de aerostat se va găsi a doua greutate după 12 s, socotite din momentul căderii? Rezistența aerului se neglijează.

Soluție. — *Lungimea sforii* $l = S_1 - S_2$, *unde* S_1 *și* S_2 *reprezintă respectiv spațiile parcurse de prima și a doua greutate pînă în momentul cînd firul s-a întins.*

Prin urmare, $l = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-1)^2}{2}$ *de unde* $t = \frac{2l+g}{2g} = 10s.$

Deci căderea celei de-a doua greutăți durează 9s.

2. Un corp solid de formă cilindrică are lungimea l și aria bazei s. O forță constantă F, perpendiculară pe bază (fig. 1) acționează asupra uneia din bazele cilindrului.

Ce forță acționează asupra bazei opuse a cilindrului?

Ce forță acționează asupra unei secțiuni oarecari C a cilindrului paralelă cu baza?

Sub acțiunea forței F corpul se deplasează într-un mediu fără rezistență.

Soluție. — *Forța care acționează asupra secțiunii C, trebuie să fie astfel încît (dacă ne imaginăm că cilindrul este tăiat după secțiunea C), partea rămasă a cilindrului, CB continuă să se deplaseze cu aceiași accelerație cu care s-ar fi deplasat întreg cilindrul AB sub acțiunea forței F.*

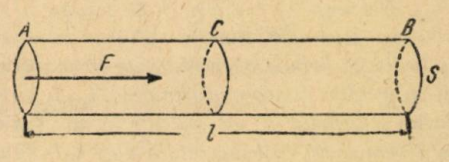


Fig. 1

Prin urmare: $\frac{F}{M_{AB}} = \frac{F_c}{M_{CB}}$; $F_c = \frac{M_{CB}}{M_{AB}} \cdot F$, *unde:*

F — *forța care acționează asupra secțiunii C,*

M_{AB} — *masa întregului corp,*

M_{CB} — *masa părții CB a corpului.*

Dacă cilindrul este omogen atunci $F_C = \frac{CB}{AB} \cdot F$ *și dacă* $CB = \frac{AB}{2}$, *atunci* $F_C = \frac{F}{2}$.

Forța aplicată bazei B a cilindrului este egală cu zero.

3. La mijlocul unui lac foarte mare se face o copcă, grosimea gheții fiind de 9 m. Ce lungime trebuie să aibă o frînghie pentru a scoate apa din copcă cu găleata?

Soluție. — *Știind că gheața are densitatea* 0,9, *iar apa* 1, *putem considera că* 0,9 *din volumul gheții e cufundat în apă, iar deasupra apei se găsește numai* $\frac{1}{10}$ *din el, adică* 0,9 *Aceasta trebuie să fie și lungimea frînghiei.*

4. Un sac mare de cauciuc plin cu aer este pus în legătură cu un manometru printr-un tub. În ce caz presiunea indicată de manometru va fi mai mare: cînd omul stă așezat sau cînd e culcat pe sac?

Soluție. — *Presiunea va fi mai mare în cazul cînd omul stă așezat pe sac deoarece suprafața de reazim va fi acum mai mică.*

5. După ce un bazin a fost umplut cu apă, în unele locuri s-au găsit sub apă rămășițe de pietre de construcție. De ce gheața deasupra acestor locuri s-a dovedit a fi mai puțin trainică decît în alte locuri ale bazinului?

Răspuns. *In bazinele de apă care au o adîncime mare, după cum se știe, cînd apa îngheață ea nu îngheață pînă la fund. Straturile inferioare de apă au temperatura de* $+4°$. *Temperatura straturilor aflate deasupra acestora din urmă descrește pe măsura apropierii de suprafață și straturile superioare se transformă în gheață.*

Conductibilitatea termică a pietrei (în special a cărămizii) este mai mare decît conductibilitatea termică a apei, de aceea curenții calzi se deplasează pe lîngă pereții de piatră, de la straturile inferioare de apă către cele superioare și de la fundul bazinului de apă se ridică în sus. Acești curenți încălzesc straturile de apă superioare și de aceea temperatura apei deasupra cărămizilor este ceva mai ridicată decît temperatura din locurile vecine.

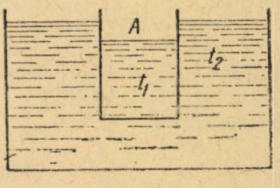


Fig. 2

In legătură cu aceasta, grosimea gheții deasupra cărămizilor (pietrelor) este mai mică decît în locurile vecine.

6. Într-un cilindru de sticlă A se toarnă lichid avînd temperatura t, nivelul lichidului fiind marcat pe cilindrul de sticlă. Cilindrul este cufundat în apă (fig. 2) avînd tempera-

tura t_2 ($t_2 < t_1$). Cum se va modifica nivelul lichidului față de semnul de marcare știind că: a) coeficientul de dilatare în volum al lichidului este egal cu coeficientul de dilatare în volum a sticlei; b) coeficientul de dilatare al lichidului este mai mic decît coeficientul de dilatare al sticlei; c) coeficientul de dilatare al lichidului este mai mare decît coeficientul de dilatare al sticlei?

Răspuns. *a) Coeficienții de dilatare ai lichidului și sticlei sînt egali* $\alpha_l = \alpha_s$.

In acest caz, cilindrul cufundat în apă care are o temperatură mai joasă decît cilindrul cu lichid, în primul moment începe să se răcească cilindrul de sticlă, iar lichidul pe care-l conține își va menține temperatura inițială, t_1. *Răcirea sticlei va provoca reducerea dimensiunilor cilindrului și lichidul se va ridica ceva mai sus de semnul de marcare. Cînd temperatura lichidului va deveni egală cu temperatura apei* t_2 *lichidul din cilindru se va găsi la nivelul inițial, adică nivelul ei va coincide cu semnul de marcare*

b) $\alpha_l < \alpha_s$. *La început procesul va decurge ca și în primul caz, însă datorită coeficientului mai mare de dilatare al sticlei, nivelul lichidului din cilindru la temperatura stabilită, va fi mai ridicat decît semnul de marcare.*

c) $\alpha_l > \alpha_s$. *In primul moment, de asemenea ca și în cazurile precedente, nivelul lichidului va fi ceva mai ridicat decît semnul de marcare. Apoi el va coborî sub semnul de marcare.*

Observație. *In toate cele trei cazuri se presupune că, cantitatea de apă în care este cufundat cilindrul cu lichid este suficientă, iar ridicarea temperaturii ei, datorită cufundării unui cilindru cu lichid care are o temperatură mai mare, este neînsemnată și nu se ține seamă de ea.*

7. La suprafața apei plutește un vas cilindric, fundul lui avînd aria s. În vas se toarnă apă pînă la înălțimea h_0. În acest caz pescajul vasului va fi de H_0 (fig. 3) Cum variază h_0 și H_0 dacă în interiorul vasului se așează un corp plutitor de greutate Q și de formă cubică.

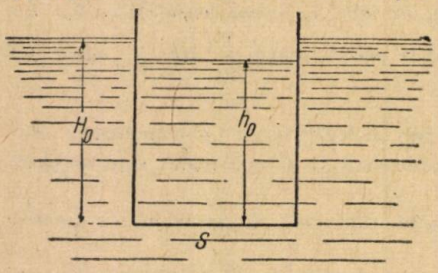


Fig. 3

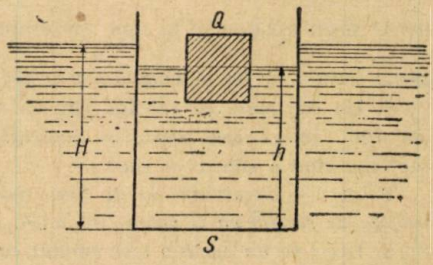


Fig. 4

Răspuns. Schimbarea greutății cilindrului care plutește pe apă trebuie să fie egală cu schimbarea forței de împingere a lui Arhimede, atunci cînd este mult cufundat în apă. Cînd în cilindru este cufundat un corp de greutate Q (fig. 4) cilindrul coboară. Se poate scrie:

$$(H - H_0)\,\rho\, gS = Q,$$

sau $H - H_0 = \dfrac{Q}{\rho g S}$ *de unde* $H = H_0 + \dfrac{Q}{\rho g S}$.

de asemenea

$$(h - h_0)\,\rho\, g\, S = Q \quad \text{și} \quad h = h_0 + \frac{Q}{\rho g S}.$$

Aceasta este valabil dacă nu se ține seamă de grosimea pereților vasului.

REZULTATUL ÎNTRECERII ÎNTRE CERCURILE DE MATEMATICI ŞI FIZICĂ DIN ŞCOLILE MEDII PE ANUL 1955

În urma chemării la întrecere între cercurile de matematică şi de fizică din ţară pornită din iniţiativa cercului din Oraşul Stalin după cum se arată în G.M.F. seria B anul V Nr. 12 din decembrie 1954, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. a publicat în G.M.F. — B Nr. 3, anul VI, martie 1955 obiectivele unei întreceri care să curpindă toate cercurile de matematică şi fizică, pe şcoli medii. Astfel se fixează *modul de clasificare al şcolilor medii* pentru activitatea elevilor din cercurile organizate în şcoli medii, modul de înscriere a şcolilor la această întrecere, precizîndu-se că şcolile ce se vor înscrie şi vor obţine rezultate bune în întrecerea pe ţară prin participarea activă a cercurilor de matematică şi de fizică la această acţiune, vor primi ca premii cărţi de matematică şi de fizică pentru biblioteca şcolii respective.

S-au primit înscrieri la această întrecere de la Şcoala medie de băieţi din Oraşul Stalin, Şcoala medie de băieţi din Dorohoi, Şcoala medie de băieţi nr. 4 Raionul Griviţa Roşie Bucureşti, Şcoala medie tehnică de metrologie Bucureşti, Şcoala medie de băieţi nr. 1 din Ploieşti, Şcoala medie de băieţi Roman, Şcoala medie de băieţi din Dej şi Şcoala medie de băieţi din Slatina.

În vederea clasificării pe şcoli potrivit punctajului pe obiectivele fixate, redacţia G.M.F. — B a primit fişele de la şcolile înscrise la întrecere din localităţile Bucureşti, Ploieşti, Roman.

Cu toate că nu s-au primit înscrieri de la alte şcoli medii, care au dat un număr apreciabil de rezolvitori de probleme după cum se arată în listele de rezolvitori publicate în cursul anului 1955, la propunerea redacţiei G. M.F. B, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice a hotărît publicarea rezultatului întrecerii pe anul 1955.

Cărţile ce se dau ca premiu la întrecere, sînt trecute prin numărul lor de ordine în dreptul fiecărei şcoli.

1. *In locul de frunte* s-a situat Şcoala medie de băieţi «I. L. Caragiale» din Ploieşti, primind ca premiu cărţile cu numărul de ordine: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13.

2. *Locul al doilea pe ţară* a revenit Şcolii medii de băieţi nr. 4 «Aurel Vlaicu» din Bucureşti, obţinînd ca premiu cărţile cu numărul de ordine, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

3. *In al treilea rînd* s-a evidenţiat Şcoala medie de băieţi din Roman, acordîndu-i-se cărţile cu numărul de ordine: 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13.

Se mai acordă menţiuni pentru activitate susţinută, Şcolii medii de băieţi nr 1. din Oraşul Stalin, primind cărţile cu numărul de ordine: 2, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, şi Şcolii de băieţi din Slatina, cărţile cu numărul de ordine: 2, 6, 7, 8, 9, 10, 12 şi 1ç.

LISTA CĂRŢILOR CU NUMĂRUL LOR DE ORDINE ACORDATE PENTRU ACTIVITATEA CERCURILOR DE ELEVI LA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ:

1. Aritmetică de M. K. Grebencea. Curs litografiat, Trad. l. rusă.
2. Calcule numerice de Haralamb Ionescu
3. Culegere de probleme de mecanică de N. Bucholtz, I. Voronkov şi I. Minacov.
4. Cercetări geometrice cu privire la teoria liniilor paralele de N. I. Lobacevski.

5. Probleme de mecanică și rezistență de A. Stan și M. Grumăzescu
6. Metoda inducției matematice de I. S. Sominski
7. Realizări noi în ultra acustică de E. Bădărău
8. Concepția filozofică a lui M. V. Lomonosov de G. Vaseţki
9. Maxime și minime geometrice de Ion Ionescu
10. Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi de A. O. Ghelfand
11. Appendix de Ianoș Bolyai.
12. Arii și logaritmi de A. I. Marcușevici
13. Cometele de F. I. Zighel

Rezultatul acestei întreceri ar fi putut fi mai bun dacă ar fi răspuns la întrecere și alte școli din țară unde s-au remarcat rezolvitori de probleme sau evidențiați la Olimpiadele de matematică și fizică din 1955, cum ar fi școlile medii de băieți din localitățile Pitești, Oradea, Constanța, Piatra Neamț, Iași, Giurgiu, R. Vîlcea, Școlile medii nr. 17 și 20 din București, Tîrgoviște, Buzău, Brad, Galați, Craiova, Focșani, Curtea de Argeș, etc.

O activitate mai slabă la G.M.F. — B continuă încă să aibă școlile medii din unele localități, cum sînt: Timișoara, Cluj, Arad, Turnu Severin, Bîrlad, Suceava, Sibiu, Deva și altele.

PUNCTAJUL LA OBIECTIVELE ÎNTRECERII PE ȚARĂ ÎNTRE CERCURILE DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ DIN ȘCOLILE MEDII, PE ANUL 1956

a) Cîte un punct de fiecare problemă trimisă de elevii școlii în intervalul 1 ianuarie — 1 iulie 1956 și publicate în numerele G. M. F. — B la rubrica rezolvitorilor;

b) cîte 10 puncte de fiecare evidențiere a elevilor școlii pentru același interval: 1 ianuarie — 1 iulie 1956;

c) cîte un punct de fiecare elev participant la etapa II locală a Olimpiadei de matematică sau fizică 1956;

d) cîte 5 puncte de fiecare elev participant la etapa III-a a olimpiadelor;

e) cîte 15 puncte de fiecare elev participant la etapa finală pe țară;

f) cîte 25 de puncte de fiecare elev reușit la etapa finală a Olimpiadelor de matematică sau de fizică;

g) cîte 30 de puncte pentru fiecare elev care obține premiu sau mențiune pentru activitatea sa la « Gazeta Matematică și Fizică », seria B, pentru anul 1955;

h) cîte 3 puncte pentru fiecare ședință a unui cerc de matematică sau de fizică din școală ținută între 1 ianuarie — 1 iunie 1956;

i) cîte 1 punct de fiecare elev abonat la G.M.F. — B pe anul 1956.

Participă la această întrecere, școlile care își trimit adeziunea prin direcția școlii, pînă la data de 15 aprilie 1956, indicînd și numărul de clase de învățămînt mediu care funcționează în școală în acest an școlar.

Fișa cu punctajul obținut de fiecare școală purtînd viza direcției și ștampila școlii, va fi semnată de profesorii care au condus aceste cercuri ale elevilor și înaintată redacției G.M.F. — B între 1 și 15 iunie 1956. Ea va cuprinde totalizarea punctelor obținute de elevii rezolvitori de probleme publicate la Rubrica rezolvitorilor din numerele 1, 2, 3, 4, și 5 ale G.M.F. — B 1956.

Completarea punctajului se va face de G.M.F. — B care va cuprinde toate soluțiile bune ce s-ar mai primi pînă la data de 1 iulie 1956.

Punctajul final al întrecerii va fi obținut prin împărțirea totalului de puncte obținute conform aliniatelor de mai sus la numărul de clase al școlii.

Școlile care se vor distinge în această întrecere vor primi ca premii cărți de matematică și fizică pentru biblioteca școlii respective, iar rezultatele se vor publica în G.M.F. — B.

Redacția G.M.F. — B solicită profesorii de matematică și fizică din învățămîntul mediu și pe responsabilii de cercuri, să popularizeze această întrecere în școlile lor și să determine participarea activă a cercurilor respective la această acțiune.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN BUCUREŞTI LA 15 AUGUST 1955 (TOATE CHESTIUNILE OBLIGATORII; TIMP DE LUCRU 3 ORE)

1915. — Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care admite ca rădăcini pe

$$x_1^3 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2^3 + \frac{1}{x_1},$$

unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$.

1916. — Se consideră priamida regulată $VABC$, avînd ca bază un triunghi echilateral ABC înscris în cercul O de rază r. Se notează cu θ măsura unghiului AVB. Se cere:

1. Să se calculeze, în funcţie de r, latura bazei, muchia laterală, apotema şi aria laterală a piramidei, pentru valorile $\theta = 60^\circ$ şi $\theta = 90^\circ$.

2. În cazul general, se notează cu α măsura unghiului OAV. Să se calculeze în funcţie de rapoartele trigonometrice ale lui α, valorile $\sin\frac{\theta}{2}$ şi $\cos\theta$.

3. Se notează $\cos\theta = y$ şi $\cos 2\alpha = x$; se cere să se exprime $\cos\theta$ în funcţie de $\cos 2\alpha$, adică y în funcţie de x şi să se reprezinte grafic variaţia lui y în funcţie de x, cînd α creşte dela 0° la 90°.

1917. — Să se calculeze $\sin(3 \operatorname{arc\,tg} x)$.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL DE MINE, BUCUREŞTI, AUGUST 1955

1918. — Într-un con circular drept, cu înălţimea egală cu diametrul bazei, să se înscrie o piramidă a cărei bază este un triunghi dreptunghic înscris în cercul de bază al conului astfel ca raportul dintre aria laterală a conului şi aria laterală a piramidei să fie egal cu $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

1919. — Dacă între unghiurile unui triunghi există relaţia:

$$3\sin^2\frac{C}{2} = \sin A \cdot \sin B,$$

între laturile sale există atunci relaţia

$$2c = a + b.$$

Să se cerceteze dacă reciproca este adevărată.

1920. — Care sînt valorile parametrului m pentru care trinomul

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6$$

este pozitiv, oricare ar fi x?

1921. — Se consideră ecuaţia:

$$2(2m+3)x^2 + (2m^2 + 5m + 5)x + m + 1 = 0$$

a) Să se arate că are rădăcini raţionale şi să se rezolve.

b) Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia de mai sus admite soluţii dacă $x = \sin y$.

c) Care sînt valorile lui y pentru $m = -2$.

1922. — Să se transforme în produs expresiile:

$$\sin\frac{5\pi}{24} + \cos\frac{11\pi}{24}$$

$$\sin\frac{5\pi}{24} + \cos\frac{11\pi}{24} + \sin\frac{\pi}{6}$$

și să se arate că prima expresie este egală cu $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})}{2}$.

1923. — Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N pe latura BC astfel ca

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAN = \sphericalangle NAC.$$

a) Să se demonstreze relația $AB \cdot AM \cdot NC = AC \cdot AN \cdot BM$

b) Fie R intersecția perpendicularei în M pe dreapta AM cu AC și S intersecția perpendicularei în N pe AN cu AB. Să se arate că triunghiurile ASM și ANR sînt echivalente.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC CLUJ ÎN AUGUST 1955

1924. — Se dă ecuația:

$$x^2 - mx + m - 1 = 0$$

și se cere:

a) pentru ce valori ale lui m o rădăcină este dubla celeilalte;

b) pentru ce valori ale lui m rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației verifică inegalitatea:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 x_2 .$$

1925. — Se dau expresiile:

$$A_1 = A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$B_1 = C\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha - A\sin 2\alpha$$

$$C_1 = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

Să se arate că avem:

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$$

1926. — Se dă un con în care raza bazei este 1 cm, iar generatoarea este egală cu diametrul cercului de bază. În el se înscrie o emisferă tangentă la con cu baza situată în planul bazei conului.

1. Să se calculeze raza emisferei.
2. Să se claculeze raza cercului de tangență dintre emisferă și con.
3. Să se afle raportul ariilor în care cercul de tangență împarte aria laterală a conului. De asemenea să se afle raportul ariilor în care cercul de tangență împarte emisfera.

PROBLEME REZOLVATE

Problema E: 534

Se consideră un triunghi isoscel $OAB(OA = OB)$ în care latura OA rămîne fixă. Să se afle locurile geometrice ale centrelor cercurilor exînscrise în unghiurile A și B.

Florin Constantinescu, elev, Cluj

Soluție. — Fie M și N centrele acestor cercuri. Se observă că $OM \parallel AB$ și $ON \parallel AB$. Cum AN, BM sînt bisectoarele exterioare ale unghiurilor A și B avem:

$$\sphericalangle OAN = \sphericalangle ONA \text{ și } \sphericalangle OBM = \sphericalangle OMB$$

Deci, triunghiurile OAN, OAM sînt isoscele, iar M și N descriu același cerc cu centrul O și raza OA.

Problema E: 536

Să se arate că:

$$\left(\frac{1+a^7}{1+a^4}-\frac{a^7-1}{a^4-1}\right)a^4=2-\left(\frac{1-a^7}{1-a^4}+\frac{a^7+1}{a^4+1}\right)$$

C. I. Ț.

Soluție. — Lăsăm numai pe 2 în partea a doua a egalității și avem succesiv:

$$\frac{1+a^7}{1+a^4}\cdot a^4-\frac{a^7-1}{a^4-1}\cdot a^4+\frac{a^7-1}{a^4-1}+\frac{a^7+1}{a^4+1}=\frac{1+a^7}{1+a^4}(a^4+1)-\frac{a^7-1}{a^4-1}(a^4-1)=$$

$$=1+a^7-a^7+1=2.$$

Problema E: 548

Pentru umplerea unui bazin cu apă de capacitate a, se folosesc 3 robinete.

Primul robinet cu cel de-al doilea umple bazinul în 2 ore.

Al doilea robinet cu al treilea, umple bazinul în 3 ore, iar primul cu al treilea robinet, umple bazinul în 4 ore.

Se întreabă: a) *în cît timp vor umple bazinul toate trei robinetele curgînd împreună?*

b) *Care dintre cele trei robinete uitat deschis 4 ore, face ca apa din bazin să se reverse? Cît la sută din capacitatea bazinului s-a revărsat?*

Ioan Mihail, elev, Alba Iulia

Soluție. a) Notăm cu x, y și z respectiv, cantitățile de apă care curg timp de o oră din primul, al doilea, al treilea robinet iar cu a capacitatea bazinului, avem sistemul:

$$2x+2y=a$$

$$3y+3z=a$$

$$4x+4z=a$$

Rezolvînd obținem

$$x=\frac{5a}{24};\ y=\frac{7a}{24};\ z=\frac{a}{24}$$

Am găsit deci, cantitatea de apă dată timp de o oră de fiecare robinet.

Notăm cu u orele în cît timp umplu toate trei, bazinul.

$$u\left(\frac{a}{24}+\frac{5a}{24}+\frac{7a}{24}\right)=a, \text{ de unde}$$

$$u=\frac{24}{13}\text{ ore}\cong 1\text{ oră și }50\text{ minute}$$

b) Primul robinet umple bazinul în $\frac{24}{5}$ ore, al doilea în $\frac{24}{7}$ ore, al treilea în 24 ore.

Al doilea robinet umple bazinul mai înainte de 4 ore. În $\frac{4}{7}$ ore va da o cantitate de apă:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{7a}{24}\cong 0{,}166\,a$$

Cantitatea vărsată este deci, 16,6 % din bazin.

Problema E: 610

Împărțind produsul a două numere întregi prin suma lor, restul e egal cu cel mai mic dintre ele; împărțind același produs prin diferența numerelor, restul este egal cu cel mai mare dintre numere. Notînd cu a și b cîturile respective, să se determine cele două numere în funcție de a și b. Caz particular: a = 2, b = 3.

N. C. Ciomu

Soluția. Ecuațiile problemei se obțin cu ajutorul identității fundamentale a împărțirii: $D = I \cdot C + R$. Avem:

$$xy = a(x + y) + y$$
$$xy = b(x - y) + x.$$

Prin comparație obținem:

$$ax + (a + 1)y = (b + 1)x - by$$

de unde:

$$y = \frac{b - a + 1}{b + a + 1} x.$$

Substituind în prima ecuație avem:

$$\frac{b - a + 1}{b + a + 1} x^2 = ax\left(1 + \frac{b - a + 1}{b + a + 1}\right) + \frac{b - a + 1}{b + a + 1} x.$$

Simplificăm cu x (căci $x = 0$ nu poate fi o soluție a ecuației, deoarece ne-ar da $x = y = 0$ independent de a și b) și avem:

$$x = \frac{(2a + 1)b + a + 1}{b - a + 1}$$
$$y = \frac{(2a + 1)b + a + 1}{b + a + 1}.$$

Pentru $a = 2$ și $b = 3$ avem $xy = 2x + 3y$; $xy = 4x - 3y$, de unde $x = 9$, $y = 3$.

Problema 1366

Să se demonstreze că aria unui patrulater inscriptibil și circumscriptibil este egală cu rădăcina pătrată a produsului laturilor.

* * *

Soluția. Notăm laturile AB, BC, CD, DA respectiv a, b, c, d. Patrulaterul fiind circumscriptibil, avem: $a + c = b + d = p$. De asemenea, patrulaterul fiind inscriptibil suprafața lui este dată de relația:

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

în care p este semiperimetrul patrulaterului.

Mai avem $p - a = c$; $p - b = d$; $p - c = a$; $p - d = b$. Deci $S = \sqrt{abcd}$.

Problema 1372

Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{x^2 + y + 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y}}{x^2 - y - 1 + 2\sqrt{y}}.$$

* * *

Soluție. Avem:

$$x^2 + y + 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y} = (x - \sqrt{y} + 1)^2$$
$$x^2 - y - 1 + 2\sqrt{y} = x^2 - (\sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + 1) =$$
$$= x^2 - (\sqrt{y} - 1)^2 = (x - \sqrt{y} + 1)(x + \sqrt{y} - 1).$$

Deci:

$$F = \frac{(x - \sqrt{y} + 1)^2}{(x - \sqrt{y} + 1)(x + \sqrt{y} - 1)} = \frac{x - \sqrt{y} + 1}{x + \sqrt{y} - 1} = \frac{x - \sqrt{y} + 1}{(x - 1) + \sqrt{y}};$$

sau

$$F = \frac{(x - \sqrt{y}) + 1}{(x - 1) + \sqrt{y}} \cdot \frac{(x - \sqrt{y}) - 1}{(x - 1) - \sqrt{y}} = \frac{(x - \sqrt{y})^2 - 1}{(x - 1)^2 - y} = \frac{x^2 + y - 1 - 2x\sqrt{y}}{x^2 - y + 1 - 2x};$$

unde $(x - \sqrt{y} + 1 \neq 0)$.

Problema 1406

Pe axa unei oglinzi sferice concave se află un punct luminat la distanța de 40 cm de vîrful oglinzii. Dacă punctul luminos se apropie de oglindă cu 7 cm, imaginea sa se formează la o distanță de două ori mai mare de oglindă. Care e distanța focală a oglinzii?

* * *

Soluție. Fie p' distanța la care se află imaginea de oglindă cînd obiectul e așezat la 40 cm de vîrful oglinzii, iar f distanța ei focală, avem:

$$\frac{1}{40} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. \tag{1}$$

Cînd obiectul se apropie cu 7 cm imaginea aflîndu-se la distanța $2p'$, avem:

$$\frac{1}{40 - 7} + \frac{1}{2p'} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Eliminînd pe p' între (1) și (2) obținem:

$$\frac{1}{33} - \frac{1}{80} = \frac{1}{f} - \frac{1}{2f};$$

$$\frac{47}{2640} = \frac{1}{2f}; \quad f = \frac{1320}{47} \approx 28{,}085 \text{ cm}.$$

Problema 1411

Să se determine valoarea expresiei:

$$E = \left[\frac{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

pentru $x = 2a^{\frac{1}{2}}(1 + a)^{-1}$, $a > 1$.

Egalînd rezultatul aflat cu $a + 4\sqrt{a} - 3$ *să se determine valoarea lui* a.

* * *

Soluție dată de **Oprea Berechet**, București. Avem:

$$\left[\frac{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 1}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}{1 - 1 + x^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{x(1 - \sqrt{1 - x^2})}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

Analog, obținem:

$$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

de unde rezultă

$$E=\frac{1+a}{\sqrt{a}}.$$

Deci trebuie ca:

$$\frac{1+a}{\sqrt{a}}=a+4\sqrt{a}-3;$$

$$1+a=a\sqrt{a}+4a-3\sqrt{a}$$

sau

$$1-3a=\sqrt{a}(a-3)$$

ridicînd la patrat:

$$1-9a^2-6a=a(a^2+9-6a)$$

sau

$$a^3-15a^2+15a-1=0$$

de unde

$$a_1=1 \text{ și } a_{2,3}=7\pm\sqrt{48}$$

a_3 nu convine deoarece $a_3=7-\sqrt{48}<1$.

Problema 1416

Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}=\frac{2}{3}.$$

Soluție. Avem:

$$\sin^4 x+\cos^4 x-1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-1-2\sin^2 x\cos^2 x=$$

$$=1-1-2\sin^2 x\cos^2 x=-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x-1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-$$

$$-3\sin^2 x\cos^2 x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)-1=1-3\sin^2 x\cos^2 x-1=-3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Și într-adevăr,

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}=\frac{-2\sin^2 x\cos^2 x}{-3\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{2}{3}.$$

Problema 1423

Se cere forma triunghiului în care:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}=1$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului.

Radu Stroe, elev, Ploiești

Soluție. Raționalizînd numitorii, relația din enunț se mai scrie:

$$\frac{\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}{\frac{a-c}{a+c}-\frac{a-b}{a+b}}-\frac{\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}{\frac{a+c}{a-c}-\frac{a+b}{a-b}}=1;$$

$$\frac{(a+b)\sqrt{a^2-c^2}-(a+c)\sqrt{a^2-b^2}}{2a(b-c)}-\frac{(a-b)\sqrt{a^2-c^2}-(a-c)\sqrt{a^2-b^2}}{2a(c-b)}=1;$$

$$(a+b)\sqrt{a^2-c^2}-(a+c)\sqrt{a^2-b^2}+(a-b)\sqrt{a^2-c^2}-(a-c)\sqrt{a^2-b^2}=2a(b-c);$$

$$\sqrt{a^2-c^2}(a+b+a-b)-\sqrt{a^2-b^2}(a+c+a-c)=2a(b-c);$$

$$2a\sqrt{a^2-c^2}-2a\sqrt{a^2-b^2}=2a(b-c);\quad \sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{a^2-b^2}=b-c \tag{1}$$

și cum:

$$(\sqrt{a^2-c^2})^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2=b^2-c^2;$$

$$(\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{a^2-b^2})(\sqrt{a^2-c^2}+(\sqrt{a^2-b^2})=(b-c)(b+c)$$

de unde:

$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}=b+c \tag{2}$$

sau împărțind (1) cu (2):

$$\frac{\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{b-c}{b+c}$$

și în virtutea unei proprietăți a proporțiilor avem:

$$\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{b}{c}$$

care ridicată la patrat dă:

$$\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}=\frac{b^2}{c^2};\quad a^2c^2-c^4=a^2b^2-b^4,$$

de unde:

$$a^2(c^2-b^2)=(c^2+b^2)(c^2-b^2)$$

egalitatea are loc pentru $b=c$ sau $a^2=b^2+c^2$.

Deci, triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

Problema 1429

Calculînd rădăcinile ecuației $x^2-2x-1=0$ *să se demonstreze egalitățile:*

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{4}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{8}=$$

$$=2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}=2.$$

G. Marinescu

Soluție dată de **I. Cristea** (Constanța) și **Radu Stroe** (Ploești). Avem, punînd $x=\operatorname{ctg}\alpha$,

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha-1=0 \tag{1}$$

de unde

$$\operatorname{ctg}\alpha=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$$

însă ecuația (1) scriindu-se sub forma

1°) $$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=1 \quad \text{sau} \quad \operatorname{ctg}2\alpha=1,$$

de unde

$$2\alpha=45;\quad \alpha=\frac{\pi}{8}$$

și corespunde $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$.

Avem:

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8} + 1} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{8} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

și într-adevăr, avem egalitățile:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2(2+\sqrt{2})} \cdot \sqrt{2(2-\sqrt{2})} = 2$$

$$2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = 2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2.$$

Problema 1480

În ce triunghi poate avea loc relația

$$b \sin B + c \sin C = \frac{a}{\sin A}$$

* * *

Soluție dată de **Corneliu Țurlea,** elev, Craiova. Înlocuind în relația dată pe $a = 2R \sin A$: pe $b = 2R$ din B și pe $c = 2R \sin C$ și apoi simplificînd cu $2R$, obținem:

sau:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 1$$

deci:

$$\sin^2 B = 1 - \sin^2 C$$

de unde:

$$\sin^2 B = \cos^2 C$$

$$\sin B = \pm \cos C$$

Vom avea:

I) $\sin B = \sin(90° - C)$ care ne dă

$B + C = 90°$ triunghiul este dreptunghic

sau

$B - C = 90°$

II) $\sin B = -\sin(90° - C)$

$\sin B = \sin(C - 90°)$ care ne dă:

$C - B = 90°$

sau

$B + C = 90°$ (triunghiul este dreptunghic)

Deci relația dată poate avea loc într-un triunghi dreptunghic sau într-un triunghi care îndeplinește una din condițiile: $B - C = 90°$ sau $C - B = 90°$.

Problema 1499

Se consideră triunghiul MFF' cu baza $FF' = 2c$ în care suma laturilor MF și MF' este egală cu $2a$. Notînd cu α și β unghiurile din F și F' ale triunghiului, să se demonstreze relația:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a-c}{a+c}.$$

Olimpiada Matematică, Timișoara

Soluții date de **I. I. Cristea** Constanța. — I Notînd cu p semiperimetrul triunghiului avem: $2p = MF + MF' + FF' = 2a + 2c$;

$$p = a + c \tag{1}$$

iar

$$p - 2c = a - c \tag{2}$$

Se știe că:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p - MF)(p - 2c)}{p(p - MF')}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p - MF')(p - 2c)}{p(p - MF)}}$$

care prin înmulțire duc la

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p - 2c)^2}{p^2}} \tag{3}$$

căci factorii $(p - MF)$ și $(p - MF')$ se simplifică. Ținînd seamă de (1), (2), relația (3) devine:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a - c}{a + c}.$$

II. Din formula lui Molweide avem:

$$\frac{a}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

deducem:

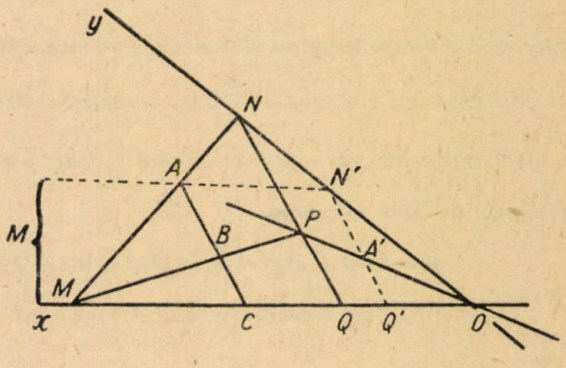
$$\frac{a - c}{a + c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

de unde rezultă relația din enunț.

Problema 1500

In planul unui unghi xOy se consideră două puncte fixe A și B și o dreaptă care se rotește în jurul punctului A, dreaptă care taie pe Ox în M și pe Oy în N. Paralela dusă prin N la AB taie pe MB în P. Să se afle locul lui P.

* * *



Soluție. — AB taie pe Ox în C, iar NP în Q. Știm că un fascicol de drepte determină pe două paralele segmente proporționale. Deci pentru fascicolul de drepte MN, MP, MQ avem:

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{AB}{BC} = \text{constant}$$

căci punctele A, B, C sînt fixe.

Întrucît NQ se deplasează paralel cu ea însăși, punctul P care împarte segmentul într-un raport constant descrie dreapta PO.

Problema 1504

Să se descompună în factori:

$$(x + a)^6 + (x - a)^6 - 2(x^6 + a^6)$$

. . .

fără a desface parantezele.

Soluție dată de **I. I. Cristea,** elev, Constanța. — Avem:

$$(x + a)^6 + (x - a)^6 = [(x + a)^2 + (x - a)^2][(x + a)^4 - (x + a)^2 (x - a)^2 + (x - a)^4] =$$

$$= 2(x^2 + a^2)\left[[(x + a)^2 - (x - a)^2]^2 + (x + a)^2 (x - a)^2\right] =$$

$$2(x^2 + a^2)[(4ax)^2 + (x^2 - a^2)^2] = 2(x^2 + a^2)[16a^2x^2 + x^4 - 2a^2x^2 + a^4] =$$

$$= 2(x^2 + a^2)[(x^4 + 14a^2x^2 + a^4);$$

$$2(x^6 + a^6) = 2(x^2 + a^2)(a^4 - a^2x^2 + x^4)$$

Deci.

$$(x + a)^6 + (x - a)^6 - 2(x^6 + a^6) = 2(x^2 + a^2)(x^4 + 14a^2x^2 + a^4) -$$

$$- 2(x^2 + a^2)(x^4 - a^2x^2 + a^4) = 2(x^2 + a^2)(x^4 + 14a^2x^2 + a^4 - x^4 + a^2x^2 - a^4) =$$

$$= 2(x^2 + a^2)(15a^2x^2) = 30a^2x^2(x^2 + a^2)$$

Soluția II, dată de **Adrian Preda,** elev, Curtea de Argeș. — Expresia se mai poate scrie:

$$E = [(x + a)^2]^3 + [(x - a)^2]^3 - 2[(x^2)^3 + (a^2)^3]$$

Dezvoltăm sumele a două cuburi:

$$E = [(x + a)^2 + (x - a)^2][(x + a)^4 - (x + a)^2 (x - a)^2 + (x - a)^4] -$$

$$- 2(x^2 + a^2)(x^4 - x^2a^2 + a^4)$$

Efectuînd ridicările la patrat și la puterea a patra, obținem:

$$E = (x^2 + 2ax + a^2 + x^2 - 2ax + a^2)(x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 - x^4 +$$

$$+ 2a^2x^2 - a^4 + x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4). - 2(x^2 + a^2)(x^4 - x^2a^2 + a^4)$$

Reducem termenii asemenea:

$$E = 2(x^2 + a^2)(x^4 + 14x^2a^2 + a^4) - 2(x^2 + a^2)(x^4 - x^2a^2 + a^4)$$

$$E = 2(x^2 + a^2)(x^4 + 14x^2a^2 + a^4 - x^4 + x^2a^2 - a^4)$$

sau

$$E = 30a^2x^2(a^2 + x^2)$$

PROBLEME PROPUSE

1927. Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un patrat și cu unghiul de la vîrful unei fețe laterale α. Să se afle: *a)* volumul piramidei înscrise; *b)* aria laterală și totală a piramidei; *c)* unghiul α cînd înălțimea piramidei este egală cu raza sferei.

(Examenul de maturitate 1955)

1928. Dacă x, y, z sînt numere pozitive subunitare avem:

$$xyz(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3) \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

Petre Șt. Simon

1929. Două forțe $\overline{F}$ și $-\overline{F}$ formează un cuplu. Ducem o dreaptă Δ care intersectează cele două forțe date și face cu direcția lor comună unghiul ascuțit θ. Să se aplice pe Δ două forțe de mărimi egale însă direct opuse, astfel încît să aibă ca efect rotirea cuplului cu unghiul $(180°-2\theta)$.

Alex. Stoenescu

1930. Într-un triunghi oarecare ABC, fie A_1, B_1 picioarele înălțimilor duse din A și B iar H ortocentrul; CX și CY simetricele lui CH în raport cu AC și BC; iar A_2, B_2 proiecțiile lui A și B respectiv pe CX și CY. Să se demonstreze că punctele $A_2A_1B_1B_2$ sînt colineare.

Șt. Musta

1931. Se consideră un triunghi dreptunchic OAC, cateta OA fiind egală cu unitatea. Pe AC se consideră punctele B și D, astfel încît $2 \sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC$. Să se arate că: $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC) = AD$.

Gh. Călugăriță

1932. Ce condiție trebuie să îndeplinească numerele a_i, b_i ca să avem

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

(Se poate întrebuința metoda inducției complecte.

Șt. Musta

1933. Fie M un punct variabil pe o parabolă cu focarul în F. Cercul care trece prin F și este tangent parabolei, retaie parabola în A și B. Să se demonstreze că dreapta variabilă AB trece printr-un punct fix.

Gh. Buicliu

1934. Se consideră umbra minimă (la amiază) a unui turn vertical și de lungime unitatea, la solstițiu de vară, echinoxul de toamnă și la solstițiu de iarnă respectiv egală cu u_1, u_2, u_3. Notăm cu φ latitudinea locului și ε înclinarea eclipticei. Să se stabilească relația:

$$u_1u_2 + u_2u_3 - u_1u_3 = \frac{\sin^2\varphi + \sin^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon - \cos^2\varphi}.$$

C. V. Costăchescu

1935. Fie a și b întregi pozitivi. Dacă $a > b$, iar m și d sînt respectiv cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun al celor două numere, să se stabilească inegalitatea

$$a^3 - b^3 > 3md^2.$$

D. I. Iordache, Constanța

1936. Se dă sistemul de ecuații

$$\frac{x}{\sin z} = \frac{a}{\sin 2z} = \frac{y}{\sin 3z}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x+y} = \frac{y}{(x+y)\cos z + a\cos 2z}.$$

Să se arate că este compatibil și să se rezolve.

C. Ionescu-Țiu

1937. Să se rezolve sistemul,

$$x + y + z = 1; \quad 2x + 3y + 2z = 3; \quad ax + by = 0$$

apoi să se discute și să se dea o interpretare geometrică.

* * *

1938. Să se afle pentru care valori reale ale lui x avem pe rînd identitățile:

$$\sqrt{x+2+\sqrt{6x+3}} + \sqrt{x+2-\sqrt{6x+3}} = \sqrt{6};$$

$$\sqrt{x+2+\sqrt{6x+3}} - \sqrt{x+2-\sqrt{6x+3}} = \sqrt{6};$$

$$\sqrt{x+2+\sqrt{2x+3}} + \sqrt{x+2-\sqrt{2x+3}} = \sqrt{2};$$

$$\sqrt{x+2+\sqrt{2x+3}} - \sqrt{x+2-\sqrt{2x+3}} = \sqrt{2}.$$

radicalii fiind considerați cantități *reale* cu semnul dinaintea fiecăruia.

C. Ionescu-Țiu

1939. Pe o tavă patrată orizontală împărțită în nouă pătrățele egale sînt așezate nouă greutăți dela 1 kgf la 9 kgf, fiecare greutate avînd axa centrului său de greutate în mijlocul pătrățelului corespunzător. Greutățile sînt așezate astfel că suma lor pe linii, pe coloane sau pe diagonale să fie mereu 15. Care este centrul de greutate al sistemului?

* * *

1940. Se împarte un diametru AB al unui cerc în trei părți egale și fie I punctul de diviziune mai apropiat de B; perpendiculara în I pe diametru taie, cercul în M. Să se arate că $MA^2 = 2 \cdot MB^2 = 3 \cdot MI^2$.

N. Mihăileanu

1941. Să se calculeze bazele unui trunchi de con, cunoscînd înălțimea h, generatoarea g și aria totală A.

Aplicație: $h = 12$, $g = 13$ și $A = 576$.

* * *

1942. Să se determine valorile lui m pentru care expresia

$$\frac{(x+y+mz)^2 + (x+my+z)^2 + (mx+y+z)^2}{(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}$$

este o constantă.

* * *

1943. Să se arate că:

$$\sin^2(A+30^\circ) + \sin^2(B+30^\circ) + \sin^2(C+30^\circ) +$$
$$+ \cos A\cos(A+60^\circ) + \cos B\cos(B+60^\circ) + \cos C\cos(C+60^\circ) = \frac{9}{4}.$$

Gorea Aristide, Ploiești

1944. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscînd înălțimea AA_1 distanța de la A_1 la mijlocul laturii BC și R raza cercului circumscris.

Kiss Elemer, Tg. Mureș

1945. Să se arate că

$$p^3 - 3(p-a)(p-b)(p-c) \geqslant 3abc$$

unde p este semiperimetrul și a, b, c laturile unui triunghi.

Radu Stroe, elev Ploiești

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 735. — Patru grupe de pionieri au strîns 272 kg. grîu. Prima grupă a strîns de 2,5 ori mai multe de cît grupa a doua; a treia a strîns cît grupa a patra plus $\frac{1}{4}$ din cît a strîns grupa întîia; iar grupa a patra a strîns cu 60 kg mai puțin decît grupa a doua. Cît grîu a strîns fiecare grupă?

M. St. Drăgan, București

E: 736. — Un tractorist are de realizat pe zi 3 hantri. În prima zi a realizat 20% din total iar în ultima zi 30% din cît a realizat în restul zilelor, adică în a doua, a treia, a patra și a cincea zi cînd în aceste 5 zile a lucrat deopotrivă. Se cere cît a realizat tractoristul în fiecare zi.

Al. Floareș, Laza (Vaslui)

E: 737. — O încăpere a unei infirmerii are 6,8 metri lățime, 12 metri lungime și 3,60 m înălțime. Ea se vopsește cu vopsea de ulei într-un strat de 0,25 mm. Cîți litrii de vospsea se vor consuma.

* * *

E: 738. — Patru muncitori s-au angajat să execute o lucrare pentru suma de 932 lei. La repartizarea sumelor ce li se cuvin fiecăruia s-a ținut seama de calificarea fiecărui muncitor, astfel că primul ia cu 80 lei mai mult decît al doilea, cu 212 lei mai mult decît al treilea și cu 248 lei mai mult decît al patrulea. Se cere cît a luat fiecare?

I. Munteanu, Zăpodeni

E: 739. — Nicușor cumpără dela librărie un carnețel cu 70 bani, 7 peniță și 14 caiete. Cînd vînzătorul îi spune că bonul cumpărăturii este 15 lei, Nicușor spune imediat: « ați greșit ». Vînzătorul refăcînd socoteala se convinge că greșise la prima socoteală. Să se justifice dece Nicușor a observat imediat că rezultatul era greșit fără a mai face vre-un calcul.

Gh. Bușilă, elev, Galați

E: 740. — Cineva a plecat de acasă cu o sumă de bani. Pe drum cheltuiește atîția lei cîți de 5 lei sînt în suma cu care plecase. La uzină el primește un premiu care împreună cu banii ce-i mai avea face atîtea sute cîți de 25 lei sînt în banii ce-i mai avea în buzunar. Depune la CEC 300 lei și se întoarce acasă cu dublul sumei cu care plecase la început. Să se afle a) cu ce sumă plecase; b) cît a fost premiul (Se cere soluție aritmetică).

* * *

---

*) (V: E: 735, 737, 738, 739; VI: E: 736, 740, 743, 744; VII: E: 741, 742, 745, 746).

E: 741. — Să se arate că dacă un număr este suma a două patrate, dublul său şi patratul său sînt de asemenea sumă de două patrate.

* * *

E: 742. — Într-un triunghi dreptunghic ABC, paralela dusă prin punctul D, mijlocul ipotenuzei BC, la cateta AB întîlneşte înălţimea dusă din vîrful A, în punctul E. Să se arate că dreptele AD şi CE sînt perpendiculare.

D. Donescu, Focşani

E: 743. — Ion spune lui Gheorghe: cînd te-ai născut tu, eu eram cu atîta mai mare decît eşti tu cu cît vei avea tu cînd vei avea $\frac{3}{5}$ din vîrsta mea, iar de cînd ai împlinit un an a trecut un timp egal cu o pătrime din vîrsta noastră de acum. Se cere vîrsta fiecăruia.

* * *

E: 744. — Să se calculeze latura celui mai mic cub, cu latura de un număr întreg de centimetri, a cărui capacitate să fie de cel puţin 1956 litri. Cît este suprafaţa totală a acestui cub? Cu cît scade volumul şi cu cît suprafaţa totală dacă latura s-ar micşora cu un decimetru?

C.I.Ţ.

E: 745. — Un trapez cu înălţimea de 15 metri are una din laturile paralele de 18 metri şi aria de 435 m². Un alt trapez are aria de 912 m², iar înălţimea, baza mică şi baza mare sînt cu aceiaşi lungime mai mari decît cele respective ale primului trapez. Cît este baza mare a celui de-al doilea trapez?

C.I.Ţ.

E: 746. — Elevii unei clase nu s-au putut aşeza în număr egal pe fiecare latură a unui patrat. Făcînd încercări de aşezare (la colţurile patratului fiind cîte un elev) odată au rămas 14 elevi în afară, iar altă dată, fiind aşezaţi cu doi mai mult pe fiecare latură a mai trebuit încă 6 elevi de la altă clasă. Cîţi elevi a avut clasa? (Se va arăta rezolvarea şi nu numai rezultatul).

Gh. Dobrotescu

POŞTA REDACŢIEI

Tov. *Octav Mihalcea Buzău* şi tov. *Antonescu Păun, Bucureşti* şi alţi corespondenţi. — Unele probleme de examen s-au publicat cu numere diferite din cauză că ele au fost date la admiterea în Institutul Politehnic Iaşi, precum şi la Institutul de Petrol şi Gaze Bucureşti; astfel problemele 1376, 1381, 1382 şi 1379 sînt respectiv aceleaşi cu problemele 1647, 1650, 1651 şi 1652.

— Problema E: 661 conţinînd în enunţ semnul egal în loc de semnul plus, a fost publicată corect cu numărul E: 670.

— Problemele 1057, 1184, 1202 şi 1765 semnate de un corespondent coincid cu problemele nr. 336, 645, 647 şi 737 din Exerc. de Trigonometrie de F.G.M.; desigur că acest lucru nu-i face cinste acestui corespondent. De altfel şi articolul aceluiaşi autor din G.M.F.-B nr. 5, 1955 este pregătit din volumul citat mai sus.

Semnalăm şi următoarele:

— Problema 1211 se află în Culegerea de probleme de geometrie de Alexandrov, cap. VII pag. 177.

— Problema 1258 mai este publicată de alt autor în R.M.T. vol. IV 1924 pag. 10.

— Problema 1312 este aceeaşi cu problema 861 din C. d. p. Fizică, cl. VIII-X.

— Problema 1448 este aceiaşi cu problema 247 din R.M.F. 1951.

— Tov. Dobre I. elev cl. IX s.m. 13 Bucureşti. Problemele ce aţi propus se găsesc în Culegerea de probleme de geometrie cl. VIII.

— Tov. *Brînzan P. Ştefan*, elev cl. VII din Goicea Mică, raionul Segarcea, regiunea Craiova. Cele 12 probleme ce aţi trimis spre publicare nu pot fi luate în seamă deoarece nu sînt însoţite de soluţii şi sînt cunoscute. Vă sfătuim să rezolvaţi cît mai multe probleme propuse, să vă evidenţiaţi la Olimpiade sau ca rezolvitor de probleme din G.M.F.B. şi apoi să încercaţi să propuneţi probleme noi.

— Tov. *Constantinescu Dan*, elev cl. IX s.m. 7 Bucureşti. Ceea ce ne trimiteţi cu titlul: «Centrul de greutate al suprafeţei trapezului» nu este publicabil.

— Tov. *Dumitrescu Aurel*, elev, Curtea de Argeş. Problema propusă în legătură cu progresia aritmetică este cunoscută, deci nu se poate publica.

Redacţia mulţumeşte tovarăşilor care semnalează probleme sau note semnate de corespondenţi, care au mai fost publicate indicînd volumul şi pagina unde s-au mai publicat.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENŢIAŢI

În cursul lunii iunie 1955 s-au evidenţiat următorii rezolvitori de probleme:

Stoian I. Gheorghe (clasa X-a, Tîrgovişte), *Stroe Radu* (absolvent, Ploieşti), *Roşianu Dragomir* (student Politehnică Bucureşti), *Torjescu Florin* (student facultatea de mecanică, Bucureşti), *Kupferberg Albert*, (clasa X-a Ploeşti), *Ţifui Vasile* (student Iaşi), *Pupăzan V. Nicolae* (U. M. Sibiu), *Motoc I. Ioan* (student electronică, Bucureşti), *Stănciuleacu M. Mihai* (clasa IX-a Tîrgovişte), *Focşeneanu Ion* clasa IX-a, Tîrgu Neamţ), *Cristea Aurel* (clasa IX-a R. Sărat), *Grosu C. Forin* (clasa IX-a Galaţi), *Melica Gheorghe* (clasa X-a Brăila), *Stănescu N. Emil* (clasa X-a Giurgiu), *Ioniţă Teodor* (anul IV şc. mecanizare Oraşul Stalin), *Bigan V. Stan* (clasa X-a Giurgiu), *Frecuş Nicolae* (absolvent Constanţa), *Băeşu Dumitru* (clasa X-a R. Vîlcea), *Botoran I. Petre* (clasa X-a Giurgiu), *Donescu St. Dragomir* (absolvent Focşani), *Miu Gh. Filipoiu* (student matematici Bucureşti), *Mergeani Stere* (an II hidrotehnică Constanţa), *Ene Aurel* (clasa X-a, C. de Argeş), *Alexa Dumitru* (clasa X-a Iaşi), *Bucur D. Gheorghe* (clasa IX-a Pucioasa, Prahova), *Antonescu Victor* (absolvent Reghin), *Murărescu Gheorghe* (clasa IX-a Roman), *Strugaru N. Crişan* (clasa X-a Turnu Severin), *Işfan Cornel* (student Timişoara), *Hegedus Attila* (clasa IX-a, Tg. Mureş), *Bogdan Mircea* (clasa IX-a, Ploeşti), *Mihailovici Sergiu* (absolvent Tecuci), *Bătineţu M. Dumitru* (absolvent Zimnicea), *Stănăşilă Octavian* (clasa X-a s. m. 4 *Bucureşti*), *Voinea C. Dorin* (clasa IX-a s. m. 2 Craiova), *Mitrofan I. Gheorghe* (absolvent Caransebeş), *Vasilescu Aurel* (absolvent Călăraşi) *Bogaciu Valeriu* (*clasa* X-a, Piteşti). *Butoi Mihaela* (clasa VIII-a, s. m. 22 Bucureşti), *Breban Mircea* (clasa X-a Oradea), *Manea Mihai* (absolvent s. m. 3 Bucureşti), *Rus A. Ioan* (clasa X-a Oradea), *Sandu Gh. Ion* (clasa X-a s. m. 4 Bucureşti, *Apetrii Gh. Nicolae* (clasa IX-a Botoşani)

* * *

Pînă la 1 iulie s-au mai primit cîte cel puţin zece soluţii bune la problemele propuse în numerele 3, 4, 5 şi 6 ale G.M.F.-B, de la următorii rezolvitori:

ADJUD. — *Şcoala elementară din Păuneşti.* Clasa V-a. Chiriac Maria (E: 594, 495, 601, 603, 608, 612, 614, 620, 624, 627, 628, 630, 638, 639, 640, 647, 653, 655), Novac Gh. Gheorghe (E. 559, 614, 627, 638, 640, 641, 643, 647, 648, 650), Pintilie Florica (E: 594, 595, 601, 603, 608, 612, 614, 620—624, 627, 630, 638, 639, 640, 647, 753, 655); clasa VI-a: Apostu C. Ioana (E: 529, 594, 607, 624, 625, 627, 628, 638, 640, 641, 643, 644, 647, 649, 650, 653, 656, 657, 663, 665, 668), Bostan Costică (E: 592, 594, 595, 601, 603, 608, 612, 620, 623, 624) Popa Mariana (E: 594, 595, 601, 603, 608, 612, 614, 620, 623, 627), Stoica V. Neculai (E: 594, 627, 628, 629, 630, 633, 638, 640, 641, 643, 644, 645, 647, 650, 653,

656, 657, 663, 665), Şerban Ligia (E: 591, 592, 594, 595, 601, 603, 608, 612, 614, 620, 624, 625, 627, 630, 631, 638, 640, 641, 647, 653, 655, 668), Şerbănescu Cornelia (E: 594, 595, 601, 603, 608, 612, 614, 620, 624, 625, 627, 628, 629, 630, 638, 640, 641, 647); clasa VII: Avădanei Steliana (594, 595, 625, 628, 638, 640, 641, 642, 643, 647), Ciobanu Artur (E: 593, 637, 638, 640, 643, 645, 646, 647, 649, 652). S-au mai primit şi soluţii greşite şi identice la problemele E: 591, 604, 619, şi 623.

AIUD (Cluj). — Clasa IX-a. Bratu Ion (520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 533, 540, 545).

ALBA IULIA. — Clasa IX-a. Voicu Virgil (1493, 494, 520, 526, 528, 532, 567, E: 592, 597, 600); absolvenţi: Georgescu I. Emil (1515, 527, 529, 540, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 577, 580, 582, 590, 592, 640, 644, 646, 649, 652, E: 614, 615, 618, 620, 621, 625, 626, 627, 634, 636, 638, 643, 644, 646, 647), Torsan Ilie (1523, 542, 570, 571, 577, 588, 594, 621, 622, 623, 632, 635, 636, 640, 647, 643, 649, 652, E: 610, 625, 629, 638, 640, 644, 646, 647, 650, 652). Alte soluţii primite au fost *scrise la maşină*; pentru a se lua în seamă, soluţiile să fie personale şi trebuie scrise de mînă.

ALEXANDRIA. — Clasa X-a. Ceampuru I. Stelian (1515, 520, 524, 526, 527, 528, 530, 531, 532, 541, 546, 564, 574, 580, 583, 588, 589, 592, 603, 621, 640, 641, E: 591, 592, 595, 597, 600, 601, 602, 605, 607, 608, 611, 612, 614, 618, 627, 634, P).

ARAD. — Clasa IX-a. Tudor Grigore (1475, 480, 486, 522, 524, 526, 532, E: 592, 597, 600, 602, 608). Absolvent Trif Miron (1472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 586, 493, 495, 497, 508, 512, 513, 518, 520, 521, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 536).

BACĂU. — Clasa IX-a. Vasiliu Monica (1566, 567, 574, 577, 579, 580, 640, 646, 658, E: 614, 615, 620, 623, 624, 625, 627, 630, 633, 634, 636, 637, 638, 644, 646). Clasa X-a. Hărăboi Mihai (1513, 516, 524, 526, 528, 529, 532, 533, 534, E: 592, 594, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 605, 607, 608), Vasilache Mihail (1520, 524, 529, 561, 562, 564, 575, 578, 594, E: 630).

BAIA MARE. — Clasa IX-a. Conţiu Ioan (1523, 561, 562, 564, 572, 577, 580, E: 625, 634, 636, 637).

BÎRLAD. — Clasa X-a. Pavel N. C. (1471, 485, 516, 517, 519, 521, 546, 560, 562, 563, 564, 565, 567, 568, 570, 574, 580, 581, 582, 599, P).

BOTOŞANI. — Clasa VII-a, Bucecea. Ionescu Doina (E: 592, 595, 601, 603, 608, 612, 625, 627, 630, 638, 640, 641, 643, 647, 650); clasa VIII-a. Nica Liliana (E: 592, 601, 608, 614, 620, 624, 638, 640, 643, 647, 650); clasa IX-a *Apetrei Gh. Nicolae* (1525, 562, 565, 566, 568, 574, 577, 578, 579, 580, 582, 588, 591, 592, 616, 625, 635, 640, 643, 645, 646, E: 594, 595, 596, 599, 600, 601, 602, 606, 608, 620, 621, 638, 639, 640, 641, 643, 644, 647, 650), Freiberg Ella (1518, 522, 525, 588, 640, E: 612, 638, 640, 643, 647), Vasiliu Monica (1494, 495, 496, E: 615, 618, 621, 625, 626, 634, 636).

BRĂILA. — Clasa X-a. *Melica Gheorghe* (1512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 534, 536, 541, 542, 550, 553, 554, 555, 558, 561, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 576, 577, 578, 582, 588, 585, 589, 590, 591, 592, 605, E: 592, 596, 597, 598, 600, 602, 603, 607, 608, P), *absolvent* Mocanu Şt. Gheorghe (1512, 515, 517, 518, 533, 534, 537, 542, 543, 546, 549, 551, 554, 584, 589, 590, 600, 603, 640, 641, 642, P).

BUCUREŞTI. — *Studenţi*: *Roşianu C. Dragomir* (Inst. Petrol şi Gaze) (1472, 474, 476, 479, 483, 485, 486, 490, 491, 508, 513, 515, 516, 517, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 530, 532, 534, 550, 555, 561, 565, 566, 567, 569, 570, 574, 579, 580, 587, 588, 590, 594, 597, 603, 607, 622, 635, 640, 641, 642, 643, 644, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, P), *Torjescu Florin* (Facultatea de mecanică) (1500, 501, 504, 506—518, 520—527, 529—538, 540, 542, 544—547, 550, 552, 553, 554, 555, P), Miu Gh. Filipoiu (1521, 560, 562, 563, 564, 565, 568, 569, 570, 573, 574, 575, 578, 582, 603, 618, 621, 622, 623, 628, 636, 638, 640, 641, 642, 643, 653), Drăgan St. Marin (1512, 514, 516, 518, 520, 521 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528,

529, 530, 532, 533, 534, 536 537, 538, 539, 540, 541, 542, 545, 546, 547, 548, 555, P), *Manea I. Mihai* (1527, 533, 536, 538, 544, 546, 555, 560—566, 568—570, 572, 574, 575, 578, 581, 582, 588, 590, 603, 618, 622, 623, 635, 636, 640, 641, 642, 648, 651);

Şcoala medie nr. 1 băieţi. Clasa V-a. Zamfirescu Tudor (E: 573, 580, 582, 591, 593, 594, 595, 601, 603, 604, 608, 624); clasa X-a. Lupaş T. (1517, 520, 521, 522, 532, 533, 534, 545, 555, 561, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 588, 589, 590), Prisadă Dac (1561, 567,569, 574, 640, 642, 644, 646, 649, E: 645), Schileru I. Dinu (1566, 567, 569, 570, 640, 641, 642, 643. 644, 646, 648, 649, 650, 651, 652, E: 638, 639, 640, 641, 643, 647, 650, 651).

Şcoala medie nr. 3 băieţi. Clasa X-a Mihăilescu C. Valeriu (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 581, 582, E: 624, 625, 634, 637).

Şcoala medie de băieţi nr. 4 « Aurel Vlaicu », Griviţa Roşie. Clasa VIII-a. Nicolau Virgil (E: 645, 650, 651, 652, 654, 659, 660, 663, 664, 665, 667); clasa IX-a. Ionescu Dumitru (E: 614, 615, 616, 618, 638, 640, 641, 643, 647, 650, 655, 658), Rădulescu D. Constantin (1591), 602, 603, 655, 668, 671, 673, 681, 697, E: 597, 610, 615, 616, 645, 652, 663, 665), Stamatoiu Petre (1591, 603, 655, 668, 671, 673, 681, 697, 707, E : 610, 645, 663, 664, 665). Zvorişteanu Alex. (1483, 1565, 1635, E: 604, 624, 625, 638, 640, 447, 650, 655); clasa X-a. Cristache Aurel (1520, 566, 567, 568, 569, 579, 635, 640, E: 592, 597, 608, 614, 615, 618, 638, 640), *Sandu Gh. Ioan* (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 577, 578, 580, 581, 582, 585, 588, 589, 590, 591, 594, 602, 603, 605, 606, 607), *Stănăşilă Octavian* (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, P).

Şcoala medie nr. 5 de fete. Clasa X-a. Cîmpu Demetra (1562, 565, 566, 568, 569,570, 572, 574, 577, 578, 579, 580, 616, 635, 640, 645, 646, 650, 653, 657, 697, 699).

Şcoala medie de băieţi nr. 7 « I. L. Caragiale. Clasa VIII-a. Constantinescu Dan (1527, 528, 529, 591, 592, 621, 640, E: 606, 608, 615, 618, 647, 650, P), Maftei C. Alexandru (1528, 588, 591, E: 595, 596, 597, 592, 600, 608, 618), Grofşoreanu G. Tudor (1562, 565, 568, 578, 582, E: 624, 625, 626, 629, 634, 636, 637,P). Clasa X-a. Maftei Nicolae (1616, 621, 622, 623, 632, 635, 636, 644, 646, 647, 649, 650, E: 603, 605, 607, 610, 638 640, 643).

Şcoala medie de fete nr. 8 Clasa VIII-a. Marinaş Liliana (1566, 569, 577, 602, 603, E: 611, 612, 614, 615, 616, 617, 618, 626, 621, 634, 636), Petrescu Anamaria (1566, 569, 577, 602, 603, E: 611, 612, 614, 615, 616, 617, 618, 621, 634, 636): clasa IX-a. Ganea V. Maria 1640, E: 638, 640, 541, 642, 643, 746, 650, 652). Clasa X-a. Lăzărescu Maria (1560, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 580, 582, 635, 636, 641, 643, 644, 645, 646, 649, 653).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa IX-a. Matheescu Anca (1471, 472, 474, 475, 478, 481, 482, 483, 484, 490, 493, 497, 498, 509), Nicoară Nirvana (1565, 566, 568, 568, 576, 580, 603, E: 610, 615, 619, 634, 637), Nicolaescu N. Silvia (1469, 471, 472, 474, 475, 478, 481, 482, 483, 484, 486, 490, 493, 496, 497, 498, 509).

Şcoala medie de băieţi nr. 11. Clasa IX-a. Corbu Ion (1522, 525, 546, 566, 567, 569, 570, 574, 578, 580, 598, 603, 615, 620, 621, 626, 637, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652, E: 598, 615, 620, 621, 626, 637, 638, 640, 643, 644, Velculescu A. Silviu (1518, 520, 521, 525, 529, 561, 562, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 577, 578, 580, 588, 594, 603, 621, 640, 646, E: 610, 613, 615, 618, 625, 626, 628, 638, 640, 650).

Şcoala medie nr. 13. Clasa VIII-a. Tudor Gh. (1562, 565, 566, 568, 569, 570, 577, 578, 585, 592, 601, E: 610, 612, 614, 615, 616, 618, 621, 624, 637, 630, 634, 636). Clasa IX-a. Bărăitaru F. Cristian (1524, 526, 640, E: 592, 597, 600, 602, 608, 610, 615, 636, 638, 640, E: 592, 644, 647)., Dobre Ion (1485, 508, 530, 560—569, 571, 574, 575, 578, 579, 580, 582, E: 614, 615, 634), Flueraşu Cezar (1561, 562, 566, 567, 569, 570, 572, 574, 578, 580, 582, 584, 585, 594, 602, 605), Lerner Emil (1518, 528, 529, 558, 562, 565, 568, 627, 628, 635, 640, P).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa VI-a. *Popa D. Doina* (E: 629, 634, 642, 644, 649, 656, 657, 658, 668, 669, 676, 678). Clasa IX-a. Delcescu Rodica (1474, 475, 477, 478, 480, 485, 486, 496, E: 597, 601, 603, 608, 612, 615, 621).

Şcoala medie de băieţi nr. 17. Clasa VIII-a. Adam Gheorghe (1635, 640, E: 597, 601, 603, 640, 643, 647, 649, 650), Dinu Florin (E: 638 640, 641, 643, 647, 649, 651, 652). Clasa IX-a. Nacev Ion (1520, 522, 525, 529, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 579, 591, 592, E: 625, 626), Păunescu I. Lucian (1497, 527, 558, 565, 566, 567, 569, 570, 591, 630, 640, E: 594, 610).

Şcoala medie de băieţi nr. 18. Clasa VIII-a. Filotti Ion (1566, 568, 569, 578, 588, 591, 592, 614, 621, 624, 625, 627, 630). Clasa X-a. Popovici I. Radu (1565, 568, 572, 618, 622, 623, 635, 640, 642, 644, 647, 650, 652, 653, E: 638, 640, 641, 643, 644, 647, 649, 650, 652.

Şcoala medie nr. 20. Clasa VIII-a. Iordănescu R. Sorin (1592, 621, 635, 640, 646, E: 597, 600, 601, 603, 607, 608, 614, 615, 625, 626, 638, 639, 640, 643, 644, 647, 650). Clasa IX-a. Grigorescu Stefan (1578, 579, 585, 640, E: 610, 612, 614, 615, 627, 630, 634, 637, 639, 640, 643, 644, 647, 650). Clasa X-a. *Drăghicescu C. Inocenţiu* (1560—569, 572, 574—580, 582, 603, P), *Motoc T. Ioan* (1455, 457, 469—483, 485, 486, 489, 491, 493—499, 501, 503, 506, 508, 510, 511, 513, 515—518, 520, 522—534, 536, 545, 554, 555, E: 615, 616, 618, 622).

Şcoala medie de fete nr. 21. Clasa IX-a. Demayo B. Adriana (1603, E: 614, 615, 618, 620, 638, 639, 640, 643, 644, 646 , 647, 649, 650, P), Dogaru D. Viorica (1522, 526, 532, 558, 565, 567, 568, 574, 580, 640, 644, E: 591, 592, 595, 597, 599—603, 608, 614, 618, 621, 630, 641).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa VIII-a. *Butoi Mihaela* (1562, 565, 566, 591, 592, 596, 610, 611, 614, 615, 616, 618, 620, 621, 627, 629, 634, 635, 636, 640).

Şcoala medie nr. 25. Clasa VII-a. Repciuc Rodica (1648, 653, E: 638, 639, 640, 641, 643, 650, 652).

Şcoala medie de măsurători terestre. Anul III. Popescu Paul (1519, 534, 539, 542, 564, 571, 576, 577, 578, 579, 580, 582, 585, 589, 590, 594, 600, 602, E: 609, 610, 620, 610, 622, 634, 636, 638, 640, 641, 643, 644).

Şcoala de 7 ani nr. 11 *de fete.* Clasa VI-a. Pădureţ Victoria (E: 591, 592, 593, 594, 597, 600, 601, 602, 603, 604, 608, 610, 611, 612, 619, 621).

Şcoala de 7 ani nr. 171. Clasa VII-a. Nicolau Gh. Virgil (1602, 603, 607, E: 610, 613, 626, 628, 631, 637).

Fără indicaţie de şcoală. Anonim. (1627, 628, 635, 640, 644, 645, 646, E: 591, 595, 601, 638, 639, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652, P).

BUZĂU. — *Şcoala medie de mecanizarea agriculturii.* Anul II. Nae Niculae (1474, 475, 476, 481, 494, 519, 521, 522, 525, 526, 531, 567, E: 592).

Şcoala medie de băieţi. Clasa IX-a. Cucu Paul (1566, 569, 580, 581, 582, 640, 646, E: 634, 647, 650); clasa X-a. Mihalache Traian (1513, 515, 516, 518, 519, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 532, 533, 536, 546, 551, 553, 558, E: 592, 596, 597, 600, 602, 606, 608), absolvenţi: Dumitraşcu Valeriu (1561, 566, 562, 567, 572, 573, 574, 575, 577, 635, 636, 640, 644, 649, 650 651, 652), Bîcă Nicolae (1534, 636, 540, 542, 546, 554, 555, 560, 561, 588, 589, 590, 594, 600). *Şcoala medie de fete.* Clasa X-a. Radu Lucia (1472, 473, 474, 475, 479, 483, 513, 515, 520, 522, 524, 526, 528, 532, 534, 567, E: 618).

CALAFAT. *Absolvent* Mitroaica I. Gheorghe (1560, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 575, 576, 578, 579, 580, 581, 582, E: 626, 627, 628, 637).

CĂLĂRAŞI. Clasa VIII-a. Onuţă N. Ion (1562, 565, 568, 577, 640, 646, E: 636, 638, 644, 646, 648, 649). Clasa IX-a. Simionescu I. Dumitru (1486, 513, 516, 520, 521, 523, 527, 540, 541, 545, 546, 567, 592, 596, E: 592, 596, 606, 621, 526, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649), absolvenţi: Elefterescu V. Mihail (1513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 528, 529, 531, 532, 533, 562, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 575, 576, 578, 580, 582). *Vasi-*

lescu Aurel (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 581, 582, 585, 590, 601, 618, 622, 623, 628, 633, 634, 635, 636, 640, 642, 646, 648, 651, P).

CARANSEBEŞ. Clasa X-a. Tornescu Petru (1520, 522, 525, 540, 553, 554, 561, 564, 567, 574, 576, 578, 579, 590, 591, E: 611, 612, 614, 615, 616, 618, 619, 620, 624, 625, 627, P). Absolvenţi: Mateescu Teodor (1471, 472, 474, 475, 476, 478, 480, 486, 491, 566, 567, 568, 569, 570, 577, 578, 580, 589, 590, 591, 592, 594, 601, 602, 603, 606, E: 611, 614, 618, 619, 620, 621, 624, 625, 626, 630, 636, 637), *Mitrofan I. Gheorghe* (1537, 538, 540, 551, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 599, 600, 601, 602, 603, 606, 607, P).

CERNAVODA. Clasa IX-a. Tănase Vasile (1528, 567, 580, E: 592, 597, 600, 614, 621, 644, 646).

CIMPULUNG (Muscel.) Clasa IX-a. Beloiu Daniel (1472, 474, 475, 476, 477, 478, 482, 483, 486, 520, 521, 522, 524, 525, 528, 531, 533, 536, 550, 556, 558, E: 602).

CLUJ. — *Şcoala de băieţi nr.* 4 Clasa IX-a. Bîrzan Romanel (1569, 635, 636, 640 646, 648, E: 592, 599, 600, 644). *Şcoala medie de fete.* Clasa X-a. Mohi Sofia (1524, 526, 532, E: 592, 598, 600 ,602, 607, 611, 644, 646, 647, 649).

CONSTANŢA. — *Şcoala hidrotehnică.* Anul II. *Mergeani Stere* (1472, 474, 475, 477, 478, 480, 482, 481, 483, 485, 486, 487, 491, 495, 498, 499, 506, 508, 517, 519, 520, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 531, 534, 536, 537, 538, 539, 540, 542, 545, 546). Anul III. Costache Teodor (1516, 519, 520, 521, 524, 526, 528, 529, 531, 532, 564). *Şcoala medie.* Clasa VIII-a. Uzunov M. Gheorghe (1474, 476, 485, E: 592, 594, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 608, 611, 612, 615, 621), Ianuş I. Stere (1525, 527, 566, 569, 592, E: 588, 592, 593, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 610, 612, 613, 614, 615, 618, 621). Clasa IX-a. Vlaicu Margareta (E: 610, 611, 614, 615, 634, 615, 634, 636, 637, 638, 640, 643, 644, 645, 646, 647, 649, 650, 652, P), absolvent Andreşoiu Glauco (1512, 515, 516, 518, 522, 528, 534, 536, 540, 545, 546, 555, 558, E: 592, 597, 599, 602, 605, 606), *Frecuş Nicolae* (1472, 473, 474, 475, 476, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 513, 515, 517, 520, 526, 528, 532, 534, 538, 539, 540, 542, 543, 544, 545, 546, 548, 551, 552, 555, 557, 558, 585, 586, 588, 591, 592, 594, 597, 606), Popa Ion (1566, 567, 569, 588, 646, 647, E: 615, 634, 635, 640, 641,649).

CORABIA. — Clasa IX-a. Florescu Mihai (1516, 520, 567, 568, 580, 602, E: 597, 608, 615).

CRAIOVA. — *Şcoala medie de băieţi nr.* 1. Clasa IX-a. Stănculescu Adrian (1516, 520, 526, 527, 532, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 588, 592, 594, 601, 603, 635, 641, 648, E: 592, 597, 600, 502, 607, 615, 618, 621, 634). Clasa X-a. Chitucea Eugen (1532, 566, 567, 575, 580 , 589, 622, 623, 641, 644, 646, 650, 651, 652, 653), *absolvent* Chimoiu I. Dumitru (1560 561, 562, 563, 566, 567, 568, 570, 572, 574, 575, 577, 578, 580, 581, 582, 616, 622, 623, 628, 631, 635, 636, 638, 640, 641, 646, 647, 648, 650, 651, 652, 653, E: 636, 637, 644, 646, 652). *Şcoala medie de băieţi nr.* 2. Clasa IX9-a. Bărboi D. Mircea (1635, 640, 646, E: 640, 643, 652), Lăban Mircea (1546, 561, 565, 566, 568, 569, 572, 574, 575, 580, 582, 594, E: 600, 603, 606, 607, 610 611, 612, 613, 615, 616, 617, 618, 619, 621, 622, 626, 634, 636), *Voinea C. Dorin* (1513, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 533, 534, 536, 540, 542, 544, 545, 546, 547, 550, 552, 553, 555, 558, E: 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 607, 608, 609). *Absolvenţi*: Clim Lorin (1469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 489, 493, 494, 498, 499, 503, 504, 506, 508). Lazăr Stelian (1512, 513, 516, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 537, 540, 541, 545, 546, 551, 553, 562, 565, 568).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa X-a. Dumitrescu I. Aurel (1512, 514, 534, 536, 538, 540, 542, 544, 546, 547, 548, 549, 558, 565, 566, 568, 569, 570, 577, 579, 580, 583, 585, 588, 589, 590, 591, 594, 600, 601, 603, 605, 606, P), *Ene Aurel* (1523, 528, 529, 530, 534, 536—

542, 544—547, 553—555, 558, 559, 583, 585, 586, 588—592, 594, 600—604, 606, 607, E: 591—593, 596—608, 610—612, 614—622, 625—628, 630, 631, 634, 636, 637, P).

DARABANI (Suceava). *Absolvent* Tudose Cosmin (1515, 520, 560, 561, 563, 564, 566, 569, 571, 572, 575, 585, 635, 636, 640, 641, 443, 644, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 653).

DEJ. — *Şcoala medie nr. 2.* Falub Leontina (1441, 442, 459, 461, 462, 468, 472, 474, 475, 478, 480, 483, 485, 486, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 575, 580, 582).

DOROHOI. — Grigore Viorel (1478, 499, 525, 560, 560, 561, 562, 563, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 578, 580, 582, 585, 588, 618, 621, 622, 623, 635, 640, 644, 647, 649, 651, 652, 653, E: 626).

GIURGIU. Clasa VII-a. *Gogoşari.* Stăncescu Virgil (E; 610, 611, 615, 616 618, 619, 620, 621, 625, 634), *Clasa IX-a.* Ciobanu. N. Marin (1520, 523, 525, 526, 527, 531, 537, 539, 540, 546, 555, 561, 564, 566, 599, 580, 589, 591, 604, 640, 642, E: 592, 601, 602, 603, 604, 606, 607, 608, 611, 615, 619, 620, 625, 638, 640, 643, 644, 647, 650), Florea I. Alex. (1516, 518, 520, 521, 525, 526, 531, 537, 540, 546, 565, 566, 567, 568, 569, 577, 580, 621, 622, 635, 636, 640, 642, E: 596 599, 601, 602, 603, 606, 619, 625, 636, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652), Mărgărit I. Radu (1532, 568, 580, 621, 622, 635, 640, E: 601, 608, 638, 643, 644, 646, 647), Clasa X-a *Botoran I Petre* (1471, 472, 491, 516, 520, 523, 532, 537, 540, 546, 555, 560, 561, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 579, 580, 582, 589, E: 594, 596, 601—608, 610, 611, 615, 618—623, 632, 634, 635, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 647, 649, 650, 652), *Bigan V. Stan* (1512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 531, 532, 533, 534, 536, 537, 540, 542, 546, 547, 548, 553, 554, 560—572, 574, 575, 578, 580, 581, 582, 585, 588, 589, 590, 592, 594, 595, 603, E: 619), *Stănescu N. Emil* (1471, 472, 481, 516, 518, 520, 521, 522, 525, 529, 531, 532, 534, 536, 537, 542, 546, 554, 555, 560, 561, 562, 563, 564, 566, 567, 570, 572, 579, 580, 582, 585, 588, 589, 590, 591, 600, 602, 604, 610, 622, 625, 634, 635, 636, 638—647, 649, 550, 652, E: 610, 611, 615, 616, 618, 619, 620, 621, 622, 625, 634, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 652), Stănescu St. Nelu (1515, 518, 520, 521, 525, 531, 537, 539, 540, 546, 555, 561, 564, 565, 566, 568, 569, 580, 588, 589, 591, 604, 621, 635, 640, 642, E: 601, 606, 608, 611, 614, 615, 619, 620, 625, 638, 640, 643, 644).

HÎRLĂU (IAŞI). Clasa VIII-a, Ţibuleac Florin (1474, 478, 481, 482, 484, 486, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 503, 509, E: 591, 592 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 610, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609).

HUNEDOARA. S.M.T.M. elev coreean Pion-Re-Hoan (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 577, 578, 581, 582).

IAŞI. *Absolvenţii*: *Alexa Dumitru* (1498, 504, 509, 510, 518, 527, 533, 534, 542, 558, 560, 561, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 594, 602, 603, 604, 605, 606, 625, 641, 644, 649, P), *Ţifui Vasile* (1486, 490, 518, 520, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 530—534, 552, 562—572, 574, 575, 576, 578, 580, 582, 590, 591, 600, 602, 603, 607, 635, 636, 638, 640, 641, 642, 645, 647, 653, P), Hogaş. C. Constantin (1521, 525, 530, 536, 538, 542, 545, 546, 554, 555, 558, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 585, 589, 590, 594, P), Ispas Smion (1442, 464, 515, 516, 521, 527, 533, 543, 574, E: 578, 584, 592), Raport Paul (1521, 527, 529, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 578, 580, 582, 589, 591, 622, 623, 635, 636, 640, 644, 646, 647, 648, 652, 653, E: 592, 602, 634, 638, 643, 647, 650), G.A.S. *Laza*, Floareş Alexandru (1528, 541, 622, 635, 636, 640, 646, E: 638, 639, 640, 641, 643, 647, 650).

MEDIAŞ. — Jilăveanu Gheorghe (513, 515, 516, 534, 560, 563, 567, 569, 571, 574, 580, 601, 618, 621, 635, 636, 647, E: 596, 600, 606, 616, 625, 630, 639, 640, 643, 644, 646, 649, 650), Stănescu Dumitru (1524, 526, 528, 532, 561, 563, 567, 602, E: 603, 608, 615, 618).

NĂSĂUD. — Roman Fabian (1561, 562, 564, E: 622, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 633, 634).

ORADEA. — Clasa VI-a. Gal Iuliana (E: 591, 593, 595, 601, 603, 604, 608, 609, 610, 620, 625, 638, 640, 643, 650), *S.M.T. Construcții*. Anul IV. Găbrian Cornelia (1516, 518, 521, 522, 520, 530, 533, E: 604, 608, 609). *Clasa X-a. Breban Mircea* (1525, 530, 535, 542, 544, 561, 563, 564, 570, 573, 575, 578, 579, 602, 616, 618, 622, 623, 625, 628, 632, 633 635, 638, 640, 642, 643, 644, 645, 646, 649, 650, 651, 652, 653, P), Chelebeu Traian (1527, 528, 535, 561, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 582, 585, 589, 590, 602, 603, 640, 643, 644, 647, 649, 651, 652, 653), *Rus A. Ioan* (1544, 552, 553, 558, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 596, 606, 640, 641, 642, P).

ORAȘUL STALIN. — *Școala medie nr. 1*, calsa VIII-a. Dragomir Adrian (1513, 516, 517, 518, 529, 536, 542, 545, 552, E: 599, 595, 598, 600, 602, 605), 602, 605), Vitican Ladislau (1565, 568, 570, 578, 592, 635, E: 614, 618, 620, 621, 625, 637), Clasa IX-a. Dudaș Nicolae (1562, 567, 574, 580, 584, 600, 603, E: 615, 635, 636, 650). Clasa X-a. Barbu Ion (1516, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 532, 533). *Școala medie tehnică de mecanică*. Anul II. Cenţu Ioan (1516, 517, 520, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 534, 543, E: 597, 599). Anul IV. *Ioniță Tudor* (1470—472, 474—483, 585—488, 490, 491, 494, 495, 497, 499, 514, 516—533, 536, 538, 546, 554, 555, 558).

PIATRA NEAMȚ. — Mitu S. Ion (1455, 477, 478, 481, 484, 486, 493, 494, 495, 497).

PETROȘANI. (Hunedoara). — Gurgulescu Felix (1472, 475, 522, 641, 642, 644, E: 640, 643, 643, 647, 650).

PETROȘANI (Zimnicea). — *Absolvent Bătineţu M. Dumitru* (1512, 513, 515—518, 520—522, 524, 534, 536, 540, 543—547, 550—555, 559, E: 591—610, 612, 614, 615, 618—621).

PITEȘTI. — Clasa IX-a. Marin Ion (1518, 520, 522, 524, 525, 526, 528, 529, 532, 534 535, 545). Clasa X-a. *Bogaciu Valeriu* (1488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 498, 499, 501—509, 511—518, 520—534,, P). Școala de 7 ani *Glimbocata* (Topoloveni). Clasa VII-a. Păun N. Ioana (E: 610, 612, 618, 626, 638, 640, 641, 643, 647, 650).

PLOEȘTI. — Clasa VII-a. Marinescu Mihai (E: 601, 607, 611, 612, 620, 621, 627, 638, 640, 643, 644, 646, 652). Clasa VIII-a. Delibaș Constantin (1560, 562, 563, 565, 566, 568, 569, 570, 577, 578, 580, 582, 592, 616, 621, 627, 628, 635, 640, 643, 645, 646, E: 638, 639, 640, 643, 644, 644, 645, 646, 647, 650, 652), Lungu N. Liviu (1524, 527, 528, 529, 534, 565, 565, 566, 568, 569, 570, 577, 578, 585, 592, 602, 621, 635, 640, E: 597, 599, 608, 615, 637), Stere N. Gheorghe (1566, 569, E: 594, 597, 603, 607, 608, 615, 622, 626, 638, 640, 643, 644, 647, 650). *Clasa IX-a. Bogdan Mircea* (1469, 470, 471, 473, 474, 476, 477, 478, 479, 480, 543, 485, 491, 497, 498, 499, 511, 513, 517, 518, 521, 521i 533, 534, 536, 540, 545, 546, 550, 553, 554, 555), Damian Serban (1453, 464, 472, 474, 475, 478, 480, 483, 493, 494, 495), Costeanu I. Sorin (1525, 526, 528, 529, 531, E: 592, 595, 597, 601, 602 603, 608, 614, 618, 621, 624), Georgescu Ovidiu (1520, 528, 566, 569, E: 592, 593, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 607, 608, 611, 614, 615, 618, 619, 620, 627, 634), Georgescu Sorin (1520, 528, 566, 570, E: 592, 593, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 607, 608, 611, 615, 618, 619, 620, 621, 624, 626, 629, 634, 638, 640, 641), Teodorescu Stefan (1512, 513, 514, 515, 516, 518, 520, 521, 523, 524, 526, 527, 530, 532, 533, 534, 536, 538, 539, 540, 542, 545, 547, 549, 553, 554, 555, 556, P), Văgăunescu Gheorghe (1469—477, 479—484, 486, 491, 493, 494, 497, 498, 499, 503). *Clasa X-a. Kupferberg Albert* (1470, 472, 473, 474, 475, 476, 478—483, 485, 486, 491, 493, 494, 497, 498, 499, 511, 513, 515, 516, 517, 518, 510, 521, 522, 525—530, 532, 533, 534, 536, 544, 546, 553, 554, 555, P), Opriș Cristache (1560—570, 572, 574 — 576, 578, 580, 582, 618, 622, 623, 625, 633, 634, 635, 636, 638, 639, 640, 646, 647, 648, 649, 651, 652, 653). *Școala medie de fete*. Clasa IX-a. Cioltei Anca (1540, 640, E: 592, 597, 608, 618, 638, 640, 644, 647), Chirilescu Caliopo (1521, 526, 566 567, 568, 569, 574, 580, 640, 643), Grecul Viorica (1472, 474, 475, 494, 521, 522, 526, 528, 532, E: 597, 600), Ionescu N. Mihaela (1472, 474, 475, 481, 486, 550, 521, 522, 524, 526, 528, 532, 567, 568, 569, 570, 580,

635, 640, 643, 650, E: 597, 610, 615, 618, 621), Petrovici Viorica (1472, 474, 475, 494, 521, 522, 526, 528, 532, E: 597), *Absolvent Stroe Radu* (1496, 501, 506, 508, 544, 552, 561, 562, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 582, 622, 623, 624, 627, 628, 629, 632, 635, 636, 640, 641, 643, 644, 645, 646, 649—653, P, «Punctul lui Lemoine»).

PUCIOASA. — Clasa IX-a *Bucur D. Gheorghe* (1610, 611, 616, 621, 628, 631, 634, 635, 636, 637, 638, 640, 641, 642, 643, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 652, 653, E: 591—622, 624, 630, 633, 634), Stan N. Dumitru (1516, 525, 528, 529, 536, 550, E: 640, 642, 647, 650).

RIMNICUL SĂRAT. — Asanache Horia (1493, E: 614, 620, 625, E: 638, 640, 641, 643, 647). Clasa IX-a. Voicu Marcela (1520, 522, 526, 532, 592, 597, 602, 615, 516, 618, 620), *Cristea Aurel* (1476—485, 419, 496, 506, 508, 513—526, 528—533, 536, 537, 537, 539, 540, 544, 545, 546, 548, 550, 552, 555, 558, 585—592, 594, 600—607, E: 634), Voicu Marcela: (1520, 522, 526, 532, 592, 597, 602, 615, 616, 618, 620). Clasa X-a. Apostol Liliana (1580, E: 620, 624, 625, 627, 638, 640, 643, 647, 650), Curscichin Veronica (1520, 522, 524, 526, 528, 532, E: 592, 620, 624, 625), *Absolvent* Tudor Sergiu (1525, 560, 561, 563, 564, 566, 569, 571, 572, 575, 582, 606, E: 635, 636, 640, 646, 650).

RIMNICU-VÎLCEA. — Clasa VIII-a Bulucea D. Constantin (1566, 569, E: 612, 614, 620, 621, 623, 624, 625, 634, 638, 640, 644, 652). Clasa IX-a. Enescu Nicolae (1561, 566, 567, 569, 574, 578, 580, 635, 642, 646). Abagiu Dorel (1520, 525, 574, 580, 587, 594, 602, 64, 643, 646, E: 614, 615, 618, 619, 621, 625, 626, 633, 636, 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652, P), *Băeşu Dumitru* (1419, 431, 442, 443, 451, 453, 469, 470, 472—476, 478—483, 485, 486, 488, 489, 493 — 495, 498, 499, 513, 515 — 518, 520, 521, 522, 524, 526—528, 532, 536, 538—542, 545, 546, 553, 554, E: 592, 594, 597, 602, 603, 606, 608, P), Băiaşu D. Nicolae (1578, 641, 635, 640, 647, E: 628, 629, 631, 633, 638, 640, 643, 644, 647), Ţugulea Eugen (1472, 474, 476, 479, 480, 508, 517, 520, 528, 550, 567, 587, 594, 603, 607, 640, E: 592, 615, 640, 643, 647).

REŞIŢA. — *Şcoala medie mixtă.* Clasa IX-a. Schweinert Ioan (1562, 567, 579, 581, 583, 585, 588, 590, 592, 600, 602, 614, 616, 621, 622, 623, 626, 632, E: 636, 638, 639, 640, 644, 647, 649, 650, 651, 652), Marchis F. Ioan (1472, 476, 483 509, 569, 574, 580, 603, 607, E: 622), Bagherea Ion (1522, 524, 526, 528, E: 592, 602, 607, 611, 615, 638, 646). Clasa X-a. Weiss Adolf (1484, 493, 512, 513, 516, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 540, 542, 544, 545. 546, 552, 554, 555, 558).

REGHIN. *Absolvent. Antonescu Victor* (1560—582, 604, E: 624—626, 628, 629, 634, 636, 637—644, 646—652).

ROMAN. — Clasa IX-a. *Murărescu Gheorghe* (1466, 467, 469, 471, 491, 497, 502, 504, 508, 512—518, 520—523, 525—534, 536, 540, 512, 545, 550, 585, 587, 588, 591, 592, 594, 595, 601—607, P). Clasa X-a. Gavriluţ Mihai (1425, 434, 436, 440, 442, 443, 449, 459, 460, 461, 465, 467, 470, 472—475, 477—486, 494, 495, 497, 498), absolvent Căluianu Nicolae (1471—479, 481, 482, 485, 486, 493—496, 512, 516, 521, 523—529, 531—534, 536, 537, 540, 545, 546, 554, 584, 588, 591, 592).

ROŞIORII DE VEDE. — *Absolvent* Mircea I. Petre (1564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 582).

SATU MARE. — Clasa IX-a. Benea A. Cornel (1474, 475, 486, 493, 494, 508, 516, 520, 521, 523, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 534).

SIBIU. — Alexa Ion (1513, 516, 518, 520, 521, 524, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 551, 558, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 589, 590, 594, 603, 605, 607, 635, 642, 543, 644), Alexandrescu Gh. (1513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 526, 527, 528, 529, 532, 635, 552, 553, 554, 555, 558, 560, 561, 62, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 575, 577, 578, 579, 580, 582, 585, 594, 603, 605, 607), *Pupăzan V. Nicolae* (1513, 515—518, 520—522, 524—534, 536, 542, 546, 548, 551—555, 558, 610, 621—623, 628, 629, 632—653).

SIGHET. — Clasa X-a. Cincu I. Adrian (1516, 517, 520, 522-524, 526—529, 531, 532, E: 591—609), Ivasiuc Constantin (1516, 520, 522, 524, 526, 527, E: 591, 592, 593, 599), SINAIA. *Anul II construcții fără frecvență*, Ionescu N. Mircea (1588, 589, 599, 591, 592, 604, E: 614, 619, 647, 650).

SLATINA. Clasa IX-a. Nițu N. Marin (1565, 566, 567, 568, 569, 574, 580, 628, E 647, 650, P), Șerbănescu N. Tiberiu (1565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 578, 580, E: 614). Clasa X-a. Antonescu Păun (1560—565, 567—570, 572, 574—581).

TIRGOVIȘTE. Clasa IX-a. *Stănciulescu M. Mihai* (1518, 516, 521, 522, 523, 525, 526, 530, 531, 534, 541, 542, 551, 555, 560, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 597, 598, 602, 605), Tudor N. Constantin (1520, 525, 527, 558, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 578, 580, 582, 588, 589, 591, 592, E: 597, 600, 615, 619, 620, 627, 631). Clasa X-a Galatky George (1560—572, 574, —581), *Stoian I. Gheorghe* (1474—483, 485, 486, 498, 491, 493—499, 504, 508—512, 514, 516, 517, 518, 522—524, 526—529, 531—534, 536—538, 540, 545, 546, 547, 650, 554, 560—575, 577—582, 584, 585, 588—592, 594, 602, 603, 606, P), *Școala medie tehnică de petrol. Absolvent* Stoica M. Gheorghe (1561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 580).

TIRGU-JIU,. — Clasa X-a. Amzulescu Liana (1570, 628, 536, 640, 641, 645, 646, 648, E: 640, 643, 647), Floroiu Gabriel (1512, 513, 515, 518, 520, 521, 524, 526, 527, 529, 529, 534, 536, 540, 553, 554, 558).

TIRGU MUREȘ. — Clasa VIII-a. Dascălu Stefania (1574, 579, 585, 588, 592, E: 588, 597, 600, 602), Nichescu Elena (1517, 527, 516, 585, E: 592, 596, 597, 600, 606, 607, 615), Tudor S. Tiberiu (1523, 527, 534, 535, 566, 569, 583, 588, 594, 606, E: 618, 622, 636, 637, 648). Clasa IX-a. *Hegedus Attila* (1473, 478, 480, 495, 499, 513, 515, 531, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 568, 570, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, E: 604, 608, 614, 616, 618, 626, 634, 637), Matei Aurel (1472, 473, 744, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 490, 493, 494, 495, 520, 521, 522, 524, 525, 532), Sasu Aurel (1472, 475, 478, 481, 493, 494, 508, 518, 525, 536, E: 592, 597). Clasa IX-a. Pașca Magdalena (1474, 475, 476, 520, 527, E: 581, 592, 597, 602, 608, 619). Clasa X-a. Matei Ioan (1472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 492, 494, 506).

TIRGU NEAMȚ. — Clasa IX-a. *Focșeneanu I. Ion* (1470—476, 478—486, 491, 493—495, 516, 520—534, 540, 541, 545, 555).

TECUCI. — Clasa IX-a. Ilea Valeriu (1526, 532, 540, 566, 567, 569, 574, E: 597, 600, 606, 608). Clasa X-a. Marin Stefan (1471, 472, 473, 474, 475, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 493, 494), Munteanu A. Constantin (1472, 473, 478, 474, 481, 483, 484, 485, 486, 493, 512), Popa Ecaterina (1561, 564, 567, 574, 575, 602, E: 600, 606, 608, 618), Purcaru George (1471, 472, 474—486, 491, 571). *Absolvenți*: Mihailovici Sergiu (1520, 529, 550, 560, 561, 563, 566, 567, 569, 570, 574, 575, 576, 577, 582, 587, 589, 594, 603, 605, 625, 628, 633, 634, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 648, 651, E: 592, 597, 600, 608, 618), Stoica Radu (1532, 589, 635, 640, 642, 643, 644, 646, 650).

TIMIȘOARA. — *Școala medie de băieți nr. 1.* Clasa VIII-a. Mihăileanu N. Constantin (1561, 564, 566, 567, 569, 585, 602, 646, 688, E: 558, 630, 638, 655, 660, 662, 664, 665, 666). Clasa IX-a. Kory Egon (1562, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 580, E: 634), Popa Laurențiu (1530, 594, 602, 603, E: 592, 597, 599, 601, 602, 605, 608, 615, 617), Asenovici Tiberiu (1513, 516, 518, 522—529, 531, 532, 534, 535, 540, 545, E: 592—594, 596—598, 600—609). *Școala medie de fete nr. 3.* Clasa IX-a. Cismariu Ionica (1479, 482, 512, 533, 534, 567, 568, E: 599, 603, 608, 615, 621). *Școala pedagogică mixtă.* Anul II. Chelu Ștefan (1545, 568, 606, E: 597, 603, 604, 608, 614, 620, 623), Radu Dorel (1493, 494, 568, 580, E: 594, 597, 600, 608, 627, 628, 631, 634, 637). *Școala mecie de băieți nr. 5.* Clasa IX-a. Nerodea Tiberiu (1516, 520, 522, 524, E: 593, 594, 595, 598, 604, 605, 607, 611, 630). Clasa X-a. Vasilievici

Alex. (1520, 528, 579, 640, E: 595, 599, 604, 605, 611, 630, 636, 638, 640, 642, 643, 644, 646, 647, 649), *absolvent* Verguleţ Lev (1512, 513, 516, 518, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 536, 540, 546, 552, 553, 554, 555), student Işfan S. Cornel (1560, 561, 563, 564, 566, 567, 569, 571, 572, 574, 578—582, 585, 588—592, 599, 601, 603, 606, 622, 623, 635, 636, 638, 640, 641, 642, 643, 644, 647, 649, 650, 651, 652, E: 620, 612, 614, 614, 616, 618, 619, 620, 621, 622, 625, 634, 637, 638, 639, 640, 643, 647, 650).

TULCEA. — *Absolvent* Repcaru Petre (1560, 561, 565—570, 574, 575, 581, 582, 634, E: 625, 626, 634, 636, 637, 644, 646).

TURDA. — *Cîmpia Turzii*, Aldea Simion (E. 594, 603, 608, 614, 620, 625, 634, 638, 640, 643, 647, 650).

TURNU MĂGURELE. — Clasa VIII-a. Săcianu Tudor (1562, 566, 568, 588, 591, 592, E: 600, 612, 620, 625). Clasa IX-a. Niculescu M. Iulian (1567, 574, 580, 588, 591, 621, 626, 640, E: 613, 614, 615, 619, 625, 638, 640, 643, 647, 650).

TURNU SEVERIN. — Clasa V-a. Ionescu Angela (E: 592, 601, 602, 603, 608, 612, 614, 618, 620, 625, 638, 640, 643, 647, 650). Clasa X-a. *Strugaru N. Crişan* (1560, 561, 563, 568, 570, 571, 576, 582, 585, 590, 604, 622, 635, 636, 640, 643, 644, 647, 648, 650, 651, 652, E: 610, 612, 613, 614, 615, 618, 619, 620).

URLAŢI. — Clasa X-a. Iorgulescu Alexandru (1536, 552, 555, 558, 562, 570, 575, 577. 580, 582, 601, 603, 606, 607, 635, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 651, 652, E: 591, 592, 597, 598, 609, 610, 614, 618, 626, 629, 634, 636, 637, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 650, 652, P).

ZALĂU. — (Reg. Cluj). Clasa VIII-a. Mastan I. Ionel (E: 591, 592, 597, 598, 600, 602, 607, 608, 636, 638, 640, 643, 644, 646, 647).

* * *

— La exerciţiile şi problemele propuse *pentru şcoala de 7* ani se primesc rezolvări numai de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, sau de la elevii anului I ai şcolilor tehnice de maiştri sau din anul I şi II ai şcolilor profesionale sau pedagogice de învăţători. Nu se iau în seamă soluţiile problemelor propuse pentru şcoala de 7 ani dacă sînt trimise de elevii claselor a IX-a, a X-a sau de studenţi şi nici soluţiile trimise în număr mai mic de *zece* sau necorect redactate. Nu se mai primesc rezolvări de probleme după trecerea a *trei luni* de la publicarea enunţurilor problemelor respective sau de la publicarea eratei, dacă a fost cazul.

În cazul unor probleme propuse care sînt mai dificil de rezolvat sau la care nu am primit soluţii bune, termenul de primirea soluţiilor se poate prelungi; astfel *se mai primesc soluţii* la problemele: 1387, 1393, 1422, 1435, 1438, 1450, 1455, 1505, 1613, 1615, 1617, 1618, 1626, 1630, 1660, 1661, 1676, 1700, 1702, 1708, 1716, 1723, 1756, 1757, 1762, 1764, 1767, 1769, 1771, 1777, 1779, 1783, 1789, 1797, 1804, 1805, 1807, 1808, 1815, 1823, 1828 şi următoarele, iar de la elementar. E: 657, 659, 677, 690, şi următoarele.

Erată. La problema 1414 sub ultimul radical în loc de $x - 1$ se va scrie $1 - x$. La pag. 508 curba între 180° şi 360° este simetrică cu cea dintre 0° şi 180° faţă de punctul notat cu 180° de pe axa ox; iar perioada este 360°. La problema 1828 în loc $AD + BD$ se va scrie $AD + \text{arc } BD$. La problema E: 712, pag. 478 în loc de BD se va scrie CD şi DA.

* * *

ANUNŢĂM cititorii Gazetei Matematice şi Fizice Seria B că pentru a primi numărul 1 din 1 ianuarie 1956 şi a nu rămîne cu anul VII (1956) descomplectat, *să se aboneze* de îndată pe anul 1956, costul abonamentului fiind de 10 lei pe an. Corespondenţii G.M.F., B sînt rugaţi să arate revista şi acest anunţ şi colegilor lor, îndemnîndu-i să se aboneze din vreme.

TABLA DE MATERII

A « GAZETEI MATEMATICE ŞI FIZICE » SERIA B, ANUL VI (1955)

I. ARTICOLE

Pag.

1. ATANASIU VIRGIL, lector univ. Bucureşti: Energia atomică şi ultilizarea ei paşnică 118
2. BOIANGIU ANA, asist. univ. Bucureşti: Bazele fizice ale metodelor pentru controlul fabricatelor metalurgice. Defectoscopia magnetică 304
3. COTARIU MARCEL, asists. Inst. Politehnic Bucureşti: Despre numărul π .. 53
4. DAIMACA VICTOR, astronom Observatorul Astronomic 1 ucureşti: Cerul în martie 69
5. DUMITRESCU MARIN, conf. univ. Inst. Politehnic Bucureşti: Condiţii de mărime ale rădăcinilor ecuaţiei de gradul II 202
6. FRIEDLÄNDER ERWIN, cercetător Inst. de Fizică Bucureşti: Despre radiaţiile cosmice 11
7. GHEORGHIU TRAIAN. prof. univ. Bucureşti, membru corespondent al Academiei R.P.R.: Folosirea paşnică a energiei atomice şi perspectivele ce se deschid ştiinţei puse în slujba poporului 3
8. IONESCU-BUJOR CONSTANTIN, prof. univ., Director General în Ministerul Învăţămîntului: 60 de ani de la infiinţarea Gazetei Matematice 389
9. IONESCU-ŢIU C. asistent univ. Bucureşti: Asupra unor sume trigonometrice 356
10. IOSIFESCU MARIUS, student Bucureşti: Rezolvarea ecuaţiei de gradul al III-lea 293
11. KISS ERNEST, conf. univ. Cluj: Cîteva proprietăţi ale poligoanelor regulate 5
12. KOCH F., lector univ. Cluj: Similitudinea fizică 208
13. MARINESCU ACHIM, asistent univ. Bucureşti: Difracţia luminii 448
14. MYLLER ALEXANDRU, Acad. prof. univ. Iaşi: Din istoria dezvoltării matematicii şi a metodelor ei de lucru 486
15. MIHĂILEANU N. N., prof. univ. Inst. Pedagogic Timişoara: Gheorghe Ţiţeica 341
16. MORŢUN EMIL, prof. emerit, Piteşti: Rezolvarea şi discuţia geometrică a ecuaţiei $a \sin x + b \cos x = c$ 491
17. POPA ILIE, prof. univ. Iaşi: Profesorii Vera şi Alexandru Myller 101
18. POPESCU I. MIHAIL, student Bucureşti: Despre tetraedru 255
19. POPOVICI CĂLIN, prof. univ. Bucureşti: Radioastronomia..... 351
20. RIMER D., lector univ. Iaşi: « Elementele » lui Euclid 438
21. ROMAN TIBERIU, conf. univ. Bucureşti: Noţiunea de grup în matematica elementară 102
22. ROMAN TIBERIU, conf. univ. Bucureşti: Elemente de teoria grupurilor finite în matematica elementară 151

Pag.

23. SACTER O., conf. univ. Bucureşti: Funcţia lui Euler 344
24. STĂNESCU NICOLAE, conf. univ. Bucureşti: Aspectul electronic al fenomenelor electrice principale 165
25. STOENESCU ALEXANDRU, prof. univ. Bucureşti: Ion Ionescu 245
26. ŢINO N. OVIDIU, prof. univ. Bucureşti: Amintiri din trecutul «Gazetei Matematice» 397
27. TÓTH ALEXANDRU. Transformarea afină 537
28. VOGEL A., preparator Inst. Politehnic Bucureşti: Ultrasunetele şi aplicaţiile lor 495
29. TĂNASE D. prof. Bucureşti. Cîteva aplicaţii ale legii lui Avogadro 545

II. EDITORIALE

— Sesiunea Biroului Consiliului Mondial al Păcii. Apelul către popoarele lumii....
— V. I. Lenin, marele geniu al omenirii progresiste 141
— Academicianul Ştefan Vencov 437
— Pe drumul deschis de Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie 481
— Al doilea Congres al Partidului Muncitoresc Romîn 533
— Din realizările matematicii şi fizicii în perioada dintre cele două Congrese ale Partidului Muncitoresc Romîn 538

III. PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

— O teoremă de aritmetică de *D. Pompeiu* 1
— Cercuri adjuncte de *Gh. Dobrotescu*, profesor Predeal 178
— Sume de sinusuri şi cosinusuri de arce în progresie aritmetică de *Fl. Torjescu*, student Bucureşti 218
— O problemă de la «Olimpiada de Matematică 1954—55 de *A. Şaichin*, conf. univ. Bucureşti 360
— Probleme date la olimpiada de fizică din Moscova 552

IV. NOTE MATEMATICE

1. O teoremă de artimetică de *D. Pompeiu* (extras din G.M.) 19
2. Asupra problemei 1062 de *N. N. Mihăileanu* prof. univ. Inst. Pedagogic Timişoara 73
3. Generalizarea problemei 1301 de *I. I. Cristea*, elev Constanţa 74
4. Cercuri adjuncte de *Gh. Dobrotescu*, profesor Predeal 178
5. Cîteva aplicaţii ale antiparalelelor de *Fl. Constantinescu* elev, Cluj 220
6. Asupra operaţiilor cu puncte de *Gh. Bercea*, student Timişoara 253
7. Generalizarea problemei 796 de *Mihail I. Popescu*, student Bucureşti 255
8. Asupra unor sume trigonometrice de *C. Ionescu-Ţiu*, asistent univ. Bucureşti .. 356
9. Teorema lui Pitagora de *Ion Ionescu* (extras din G. M. 1895) 400
10. Extrase din *Gazeta Matematică* cu rezolvări de probleme publicate în Gazeta Matematică în anii 1895 şi următorii 404
11. O extindere în spaţiu a problemei 1215 de *Mihail I. Popescu* student Bucureşti 463

V. SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

— Aparat pentru verificarea legii Boyle-Mariotte de *N. Rădulescu*, prof. înv. mediu Bucureşti 23
— Dispozitiv pentru demonstrarea teoriei cinetice a gazelor (din Fizica v şcole) 132
— Simple experienţe privind legea lui Arhimede (din Fizica v. şcole) 180
— Vibratorul cu frecvenţă standardizată pentru studiul undelor de *D. Tănase*, prof. înv. mediu Bucureşti 258

Pag.

— Construcția unui refractometru pentru lichide de *V. Pavlu*, conf. univ. București 314
— Montaj pentru demonstrarea proprietăților tuburilor electronice de *Laszlo Tihomir* 333
— Construirea prin mijloace proprii a unei lentile astronomice Kepler de *A. Bordeianu*, prof. înv. mediu Rădăuți 458

VI. CALEIDOSCOP MATEMATIC ȘI FIZIC

— Caleidoscop matematic 20, 129, 256, 549
— Caleidoscop fizic 75, 222, 363

VII. DIVERSE

— Din experiența cercului de matematică și fizică a elevilor din Capitală 93
— Întrecerea între cercurile de matematică și fizică a elevilor din școlile medii .. 141
— Olimpiada de Matematică și Fizică 1955 197
— În atenția cititorilor 260
— Poșta redacției 45, 570
— Consfătuirea din București cu cititorii G.M.F. — B. 333
— Articole și probleme rezolvate din « Gazeta Matematică » 1895—1896 și alți ani 400
— Olimpiada de matematică și fizică 1955—56. Programa analitică 516
— Olimpiada Tinerilor Matematicieni și Fizicieni 1955—56. Probleme propuse pe clase 520
— Rezultatul întrecerii între cercurile de matematică și fizică pe școli în anul 1955 și obiectivele întrecerii pe anul 1956 555

VIII. CHESTIUNI DE EXAMEN

1. Probleme date la admiterea în Facultate de Matematică și Fizică (cursul de zi) București, august 1954 25
2. Probleme date la admiterea în Facultatea de Matematică și fizică (curcul seral) București, august 1954 26
3. Probleme date la admiterea în Facultatea de Matematică și Fizică (cursul fără frecvență) București, septembrie 1954 26
4. Din problemele date la admiterea în Facultatea de Matematică și Fizică Iași, august 1954 26
5. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic Iași, august 1954 27
6. Din problemele date la admiterea în Institutul Politehnic Cluj. august 1954.. 27
7. Din problemele date la « Olimpiada Matematică 1954, etapa III..... 28
8. Probleme date la admiterea în Institutul de Mașini și aparate electrice, Craiova, august 1954 78
9. Probleme date la admiterea în Facultatea de Matematică și Fizică din Cluj, au-agust 1954 79
10. Din problemele date la admiterea în Institutul de Mecanică, Orașul Stalin, august 1954 79
11. Probleme date la admiterea în Facultatea de Mecanizare și Electrificare a agriculturii Craiova, august 1954 80
12. Probleme date la admiterea în Institutul Forestier Orașul, Stalin august 1954 186
13. Probleme date la admiterea în Institutul Pedagogic Timișoara, 1954..... 187
14. Probleme date la admiterea în Facultatea de Chimie de la Universitatea din București în anii 1952, 1953, 1954 187

Pag.

15. Probleme date la admiterea în Facultatea de Matematici din Iaşi în anii 1952 şi 1953 225
16. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic Iaşi, 1953 şi 1954 226
17. Din problemele date în scris şi oral la admiterea în Institutul de Petrol şi Gaze din Bucureşti, august 1954 265
18. Probleme date la admiterea în Institutul de Arhitectură « Ion Mincu » Bucureşti, august 1954 266
19. Probleme date la Olimpiada Matematică, etapa locală, centrul Bucureşti, 20 februarie 1955 318
20. Din problemele date la « Olimpiada de Fizică », etapa raională Bucureşti, 27 februarie 1955 320
21. Probleme date la Olimpiada Matematică, etapa locală, centrul Iaşi, 20 februarie 1955. 321
22. Probleme date la admiterea în Academia Tehnică Militară Bucureşti, iulie 1955 464
23. Probleme date la examenul de admitere în Istitutul Politehnic Bucureşti, august 1955 465
24. Din problemele date la examenul de admitere în Institutul de Construcţii Bucureşti, august 1955 465
25. Probleme date la examentul II de admitere în Facultatea de Fizico-Matematici Bucureşti, august 1955 466
26. Din problemele date la admiterea în Facultatea de Electrotehnică şi mencanizarea agriculturii din Institutul Tehnic Craiova 1955 506
27. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic Timişoara 1955 507
28. Probleme date la admiterea în Facultate de Fizică-Matematici Bucureşti 1955 557
29. Probleme date la admiterea în Institutul de Mine, Bucureşti, august 1955 557
30. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic, Cluj. august 1955 558

IX. PAGINA CERCURILOR

— Din problemele propuse la cercul de matematică din Capitală 40
— Obiectivele întrecerii între cercurile de matematică şi de fizică pe şcoli medii din toată ţara pe anul 1955 141
— Rezultatul întrecerii între cercurile de matematică şi fizică pe şcoli în anul 1955 şi obiectivele întrecerii pe 1956 555

X. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

1. **Probleme prapuse.** Nr. 1469—1499 (pag. 25); 1500—1511 (pag. 40); 1512—1534 (pag. 78); 1434—1559 (pag. 88); 1560—1582 (pag. 186); 1583—1607 (137); 1608—1634 (pag. 234); 1635—1653 ((pag. 225); 1654—1680 (pag, 261); 1681—1699 (pag. 265); 1700—1724 (pag. 276); 1725—1754 (pag. 318); 1755—1778 (pag. 328); 1779—1803 (pag. 374); 1804—1828 pag. 425); 1829—1847 (pag. 464); 1848—1873 (pag. 475); 1874—1894 (pag. 506); 1895—1914 pag. 512); 1915—1926 (pag. 557); 1927—1945 (566).

2. **Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani.** Nr. E: 591—609 (pag. 91); 610—623 (pag. 140); 624—637 (pag. 188); 638—652 (pag. 237); 625—668 (pag, 280); 669—678 (pag. 331); 679—692 (pag. 377); 693—707 (pag. 427); 708—722 (pag. 478); 723—734 (pag. 514), 735—746 (568).

3. **Rubrica rezolvitorilor de probleme.** Pag. 46, 94, 146, 189, 239, 282, 334, 279, 428 478, 524, 570.

4. **Redactarea soluţiilor.** Pag. 148, 196, 244, 292, 340, 388, 436, 484.

5. **Premierea rezolvitorilor.**

— Premiile Gazetei Matematice și Fizice « seria B, pe anul 1954. Numele premianților și lista cărților date cu premii 142
— Evidențiații la etapa finală (pe țară) a « Olimpiadei de Matematică 1955 201
— Evidențiații la etapa finală (pe țară) a « Olimpiadei de Fizică » 1955 201
— Rezultatul « Olimpiadei Tinerilor Matematicieni și Fizicieni 1955 » lista premiaților 248
— Rezultatul întrecerii pe 1955 între cercurile de matematică și fizică pe școli medii și lista cărților date ca premii 555

6. **Probleme propuse repartizate pe autori *)** *Alexa Ion* (1712), *Alexandrescu Al.* (1629, 1705), *Alexandru St. N.* (1809), *Atanasiu Virgil* (1810), 1811), 1924, 1930) *Badea Gh.* (1909), *Bărbuică N.* (1),163 *Barcolenco C.* (1817), *Bătineţu D.* (1857), *Bazacov Gh.* (1605, 1758) *Bercea I. Gh.* (1544, 1604, 1704, 1789, 1862), *Bocu Mircea* (1596), *Botea N.* (1633), *Buicliu Gh.* (1724, 1933) *Călugăriţa Gh.* (1931), *Cetăţeanu C* (1709), *Chilinţan Octavian* (1545), *Ciomu C. N.* (1542, 1587, 1619, 1718, 1796, 1826), *Cocos Emanuel* (1554, 1614), *Colibaba Tiberiu* (1540, 1806 1850), *Costăchescu V. C.* (1778, 1934), *Constantinescu Florin* (1627), *Cristea I. Ion* (1606, 1713, 1717, 1795, 1825, 1898) *Dobrotescu Gh.* (1613, 1722, 1780), *Donescu Şt. Dragomir* (1856). *Floareş Al.* (1867). *Galaţky Gheorghe* (1763), *Georgescu Cornel* (1556), *Georgescu Emil* (1870) *Gheorghiu Adrian* (1723), *Gheorghiu N.* (1620), *Gorea Aristide* (1943), *Gotlieb Ioan* (1813), *Guiaşu Silviu* (1869). *Hamzin H.* (1535). *Ionecu-Bujor C.* (1634) *Ionescu-Ţiu C.* (1539, 1549, 1586, 1607, 1615, 1708, 1716, 1763, 1771, 1777, 1783, 1790, 1802, 1804, 1807, 1808, 1853, 1854, 1871, 1872, 1900, 1903, 1936, 1938, *Ionescu V. Savin* (1756, 1842), *Iordache I. Dan* (1935), *Iosifescu V. Marius* (1798). *Kiss Elemer* (1773) 1944), *Laico N.* (1612), *Lambă Stelian* (1866), *Loziciu I. I.* (1707), *Lupuţiu Ion* (1632, 1812), *Mănescu Lucian* (1767, 1779, 1899) *Mărculescu D. Stelian* (1536, 1766, 1914) *Mateescu Ion* (1781, 1865), *Mihăilă Ieronim* (1541), *Mihăileanu N. N.* (1603, 1610, 1709, 1779, 1772, 1816, 1861, 1873, 1901, 1903, 1940), *Mitrofan Gh.* (1784), *Musta Şt.* (1700, 1930, 1932), *Necşoiu C.* (1736, 1764, 1912). *Olteanu Ştefan* (1584), *Oprea I. Miron* (1902), *Opriş A. Ion* (1767), *Orşivschi Claudiu* (1559). *Panu C. Dan* (1595, 1624, 1719), *Popescu I. Mihail* (1551, 1769, 1797, 1805). *Rus A. Ion* (1628). *Şaichin A.* (1626, 1710), *Sălan N.* (1791) *Şerb Gabriel Adrian* (1551) *Simion St. Petre* (1550, 1585, 1711, 1721 1928), *Stanciu E. M.* (1720), *Stănciulescu Mihail* (1895), *Stelian Toma* (1557), *Stepan I.* (1896), *Stroe Radu* (1558, 1625, 1641, 1907, 1945), *Stoenescu Alex.* (1617 1905, 1929), *Stoian Ggeorghe* (1602), *Suciu Nicolae* (1703). *Tănase D.* (1785, 1930). *Tiţa Nicolae* (1593), *Torjescu Florin* (1765). *Uşvat Cornel* (1706 *Valer Gh.* (1609), *Voinea I. A.* (1868). *Waldmann A.* (1755). *Zaharias Ştefan* (1770), *Zigulescu D. Marin* (1594).

7. **Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani repartizate pe autori.** *Andronescu V.* (E: 665), *Aurel L.* (E: 652). *Baieră I. Boris* (E: 693, 710) *Bălinescu M. D.* (E: 721), *Brezeanu I.* (E: 660, 671), *Buşilă Gh.* (E: 739). *Caloianu Armand* (E: 642, 711), *Călugăriţa Gheorghe* (E: 697, 698), *Ciomu C. N.* (E: 610), *Constantinescu N. Ilie* (E: 611), *Cristea I. Ion* (E: 600, 613, 660, 670). *Dinu Gh.* (E: 688), *Dobrotescu Gh.* (E: 647, 682, 746), *Domide Leontin* (E: 707), *Donescu Şt. Dragomir* (E: 667, 712, 716, 742), *Drăgan Şt. Marin* (E: 687, 735), *Draica Constantin* (E: 731), *Dragomir Adrian* (E: 689). *Filipoiu Gh. Miu* (E: 724). *Floareş Al.* (E: 736), *Galaţky George* (E: 640), *Grigore Viorel* (E: 732), *Grofşoreanu T. Gelu* (E: 656), *Grosu C. Gh.* (E: 609). *Hodar D. Ct.* (E: 703). *Ionescu-Ţiu C.* (E: 597, 598, 616, 623, 636, 645, 649, 651, 659, 663, 664, 684, 691, 699, 702, 706, 708, 714, 734, 741, 744, 745), *Ionescu V. Savin* (E: 629), *Iordache I. Dan* (E: 599). *Jaşcanu M.* (E: 662). *Loziciu I. I.* (E: 635, 681). *Mărculescu D. Stelian* (E: 733), *Mihăileanu N. N.* (E: 644, 652, 720),

---

*) În paranteză este trecut numărul de ordine al problemei propuse.

Munteanu N. Ion E: 612, 620, 693, 738), *Niculescu Stelian* (E: 643), *Nikitin V.* (E: 677). *Oprea I . Miron* (E: 728). *Petrică Zamfira* (E: 654, 673), *PopescuI. Mihail* (E: 621), *Popescu Paul* (E: 686). *Rotaru C.* E: 701), *Rusu A. Ioan* (E: 602, 690). *Şerb Gabriel Adrian* (E: 607, 705, 726), *Stepan I.* (E: 718), *Stoica M.* (E: 618). *Stroe Radu* (E: 723) *Weszelly Tiberiu* (E: 626). *Zaharescu Marius* (E: 665, 668, 669, 672, 727), *Zigulescu D. Marin* (E: 638, 730) *Zimmermann N.* (E: 694, 715).

8. **Probleme rezolvate.** În parenteza e trecută pagina unde s-a publicat soluţia problemei: 1015 (83; 1096 (82); 1101 (88); 1104 (84) 1105 (85); 1107 (85); 1129 (86); 1135 (86); 1129 (87); 1164 (135); 1197 (133); 1214 (31); 1215 (31); 1216 (32); 1218 (32); 1221 (266); 1225 (134); 1233 (134); 1236 (33); 1240 (33); 1257 (34); 1259 (35); 1260 (37); 1263 (323); 1265 (36); 1266 (37); 1268 (37); 1270 (38); 1271 (39); 1273 (136); 1274 (136); 1276 (183); 1283 (267); 1286 (186); 1294 (39); 1297 (227); 1301 (184); 1302 (227); 1306 (185); 1309 (185); 1311 (185); 1312 (228); 1314 (228); 1323 (267); 1328 (268); 1330 (269); 1332 (269); 1346 (270); 1348 (324); 1349 (229); 1350 (271); 1351 (325); 1352 (272); 1355 (272); 1363 (230); 1364 (325); 1365 (230); 1366 (560); 1367 (323); 1368 (327); 1372 (560); 1373 (231); 1374 (231); 1376 (232); 1377 (327); 1378 (273); 1379 (274); 1380 (274); 1381 (367); 1382 (275); 1383 276); 1384 (328); 1385 (367); 1386 (368); 1388 (368); 1391(368); 1392 (370); 1394 (370); 1395 (423); 1396 (424); 1397 (371); 1398 (466); 1399 (466); 1406 (561); 1411 (561); 1416 (562); 1417 (509); 1418 (467); 1419 (509); 1421 (371); 1423 (562); 1429 (563); 1441 (468); 1445 (510); 1456 (511); 1457 (468); 1462 (511); 1467 (468); 1480 (564); 1489 (470); 1491 (471); 1492 (471); 1496 (473); 1497 (473); 1498 (474); 1499 (564); 1500 (565).

9. **Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani** rezolvate la pagina indicată în paranteze. E: 479 (81); E: 508 (51); E: 510 (81); E: 511 (82); E: 534 (558); E: 536 (559); E: 537 (232); E: 538 (472); E: 540 (233); E: 546 (233); E: 547 233); E: 548 (559); E: 558 (372); E: 568 (372); E: 571 (373); E: 574 (373); E: 586 (373); E: 587 (421); E: 588 (422); E: 609 (374); E: 610 (560); E: 620 (422).

XI. EVIDENŢIAŢI*)

1. **Albăstroiu Petre**, student, Bucureşti, (286); 2. Alexa Dumitru, cl. X, Iaşi (146, 479, 571); 3. Alexa Ion, absolvent Arad (94), 380); 4. Alter Moise, cl. X Tecuci (380, 522); 5. Alexandru Gheorghe, absolvent Sibiu (146); 6. Andricioaiei I. Gheorghe cl. VIII, Botoşani (522); 7. Antonescu Păun, cl, X, Slatina (380); 8. Antonescu Victor, absolvent Reghin (94, 146, 380, 530); 9. Apetrei Gh. Nicolae, cl X, Botoşani (522, 580); 10. Arion Adrian, cl. VIII, Botoşani (239); 11. Arsenovici Tiberiu, cl. IX, Timişoara (146); 12. Bacalul Ion, Roman (94); 13. Bădescu E. Marcel, cl. X S. m. 4, Bucureşti (286, 429, 522); 14. Băeşu D., X, R. Vîlcea (380 571); 15. Bărbuică Nicolae, An III Sc. electrotehnica, Craiova (94, 286); 16. Basarab Şerban, cl. IX, Slatina 522); 17. Bătineţu M. Dumitru, absolvent, Zimnicea (146, 522, 571); 18. Bercovici Izu, Focşani (286); 19. Berechet M. Oprea, cl. X, Bucureşti (146, 522); 20. Bigan V. Stan, cl. X, Giurgiu (46, 239, 286), 571; 21. Bogaciu Valeriu, cl. X, Piteşti (146); 22. Boghian Dragoş cl. X, Suceava (380); 23 Bogdan Mircea, cl. IX, Ploieşti (94, 146, 370 571); 24. Boloca Ioan, An II, Cîmpulung Moldovenesc (239); 25. Bostan Emil, absolvent, Vuţcani (46, 239); 26. Botoran I. Petre, cl. IX, Giurgiu (479, 571); 27. Breban Mircea, cl. X, Oradea (286, 522, 571); 28. Brebente Corneliu, cl. IX Tîrgovişte (146, 479); 29. Brînduş Lucian, cl. X, Oraşul Stalin (522); 30. Brozici Mircea, cl. X, Ploieşti (479); 31. Bucur D. Gheorghe, cl. IX, Pucioasa (94, 239, 380); 32 Buruiană Gh. student, Galaţi (286); 33 Bușilă Gheorghe, cl. X, Galaţi (522); 34. Buţă D. Titus, cl. X, Turnu Severin (379); 35 Butoi Mihaela, cl. VIII, s.m.22 Bucureşti (380); Buzea Radu cl. X Brăila (522); **Căluianu Nicolae** an IV. s. m. tehnica, Roman (239); 38 Caraman M. Alexandru cl. X, Brăila (429); 39 Cătărig T. Alex.

*) În paranteză este trecută pagina unde a fost evidenţiat.

cl. X, Tîrgu Mureş (522); 40 Ceauşel I. Gheorghe, Vadul Poştii Buzău (286, 479, 522); 41. Chelebeu Traian, cl. X, Oradea (286); 42 Chimoiu I. Dumitru cl. X, Balş, Craiova (286); 43 Chirică Andrei cl. IX, Ploieşti (146, 380, 522); 44. Cimponerescu Valeriu, Făget (522); 45. Ciurdea Eugen, cl. X, Galaţi (286, 479); 46. Colibaba Tiberiu, cl. X, Galaţi (94, 479, 522); 47 Colţea Valeriu, cl. X, Cîmpina (522); 48 Constantin Ion, cl. X, Bucureşti (146); 49. Constantin I. Nicolae, cl. X, Ploieşti (522); 50. Conţiu Ioan cl. IX, Baia Mare (522); 51. Cososki Florin, cl. X, Botoşani (286); 52 Crăcană Petrea, an II s. m. pedagogică Iaşi (146); 53 Cristea Aurel, cl. IX, Focşani (94, 428, 571); 54. Cristea I. Ion, cl. X, Constanţa (46, 146, 239, 286, 428, 522); 55 Cristea Ròdica, Bordeşti-Rîmnicu Sărat (94, 479); 56. Cuperman Vladimir cl. X, Bucureşti (286, 429). 57. Damian Şerban cl. IX, Ploieşti (94); 58 David Gheorghe, cl. X, Ploieşti (380); 59. Delibaş Constantin, cl. VIII, Ploieşti (522); 60. Delu Gh. Stefan, cl. IX, Corabia (146); 61. Desculţu Traian, Alexandria (286); 62 Dinu Gh. Gheorghe, an III s.m.electrotehnică Craiova (239, 286); 63. Doboş Maria, Cîmpina (46); 64. Donescu St. Dragomir, absolvent, Focşani (146, 428, 571); 65. Drăgan Şt. Marin, student, Bucureşti (146); 66. Drăghicescu Inocenţiu, cl. X, Curtea de Argeş (429); 67 Draica Constantin, cl. VIII s.m.4, Bucureşti (94, 146, 429, 522); 68. Duduică Radu, cl. IX. s.m. 17. Bucureşti (239, 286, 522); 69. Dumitrescu I. Aurel, cl. X, Curtea de Argeş (428); 70. Dumitrescu Badea Ovidiu, s.m.4 cl. X, Bucureşti (146, 239, 286, 428). 71. Ellenberg Manfred, cl. X, s.m.12, Bucureşti (46, 146, 522); 72. Ene C. Aurel, cl. IX, Curtea de Argeş (522, 580). 73. Fildan Mircea, cl. IX, Petroşani (380); 74. Filipoiu Gh. Miu, student, Bucureşti (146, 286, 429, 571); 75. Focşeneanu Ion, cl. IX, Tîrgu Neamţ (580); 76. Frecuş Nicolae, absolvent Constanţa (580). 77. Gagu. R. Valeriu, cl X, Brăila (429); 78. Galaţki Gheorghe, cl. X, Tîrgovişte (146, 380); 79. Gălbenuş Eugeniu, cl. X, Slatina (380); 80. Garnadt Valter, cl. VI Reşiţa (380); 81. Gavriluţ. P. Mihai, Roman (94); 82. Georgescu Sorin, cl. IX, Ploieşti (94); 83. Gervescu M. Ion, cl. VII, Roznov (239, 522); 84. Gheorghiu V. Gheorghe, cl. X, Ploieşti (522); 85. Ghinea Constanţa, cl. IX, Tîrgu Ocna (380); 86. Graure I. Gheorghe, absolvent, Sibiu (94, 379); 87. Grăjdeanu I. Petre, an IV s.m. pedagogică, Iaşi (146); 88. Grigore I. Viorel, absolvent Suceava (429); 89. Grofşoreanu I. Gelu, cl. VII s.m. 7, Bucureşti (286); 90. Grosu A. Florin, cl. IX, Giurgiu (286, 479, 571); 91. Guiaşu I. Silviu, cl. X, Oradea (146, 286); 92 Gurman Gabriel cl. X, s.m. 20, Bucureşti (429); 93. Hegedüs Attila, cl. IX, Tîrgu Mureş (146, 479, 571); 94. Hodor Constantin cl. VII, Roznov, Piatra Neamţ (46, 380, 522); 95. Hogaş C. Constantin, c.l X, Iaşi (239, 286). 96. Ionescu Mircea, cl. IX, Ploieşti (94, 380); 97. Ionescu Radu, cl. IX, Turnu Severin (380); 98. Ionescu V. Savin, student, Bucureşti (46); 99. Ioniţă Aurelia, cl. X, Buzău (429); 100. Ioniţă Tudor, Oraşul Stalin (46, 286, 479, 571); 101 Iordache I. Dan, cl. X, Constanţa (46, 286, 522); 102. Işfan Cornel, student Timişoara (380, 571); 103. Ivănceanu Tatiana, cl. X s.m. 19 Bucureşti (286). 104. Kupferberg Albert, cl. X, Ploieşti (146, 571). 105. Lambă Stelian, an IV s.m. hidrotehnică, Constanţa (239, 429); 106. Lazăr Edith, studentă, Bucureşti (286); 107 Leaţ Gh. Mihai, cl. VII, Roznov, Piatra-Neamţ (146); 108. Leonte N. Ion cl. X, Iaşi (239); 109. Lupei Voicu, cl. X, Brad (428); 110. Lupuţiu I. Ion, cl. X, Ploieşti (46, 146, 380, 552). 111. Manea Gh. Mihai, absolvent, Bucureşti (571); 112. Marinescu Aida, studentă, Bucureşti (94); 113. Marinescu Gheorghe, cl. X, Ploieşti (522); 114; Maşek Corneliu, cl. VI, Gurabarza Brad (239); 115. Matei Aurel, cl. IX, Tîrgu Mureş (380); 116.Mateescu Ion, cl. X, Rîmnicul Vîlcea (379) 522); 117 Matic Corneliu cl. IX, Tîrgu Mureş (380); 118. Mazilu M. Constantin, cl. X Călăraşi (286); 119. Megeani Stere, an II s.m. hidrotehnică Constanţa (571); 120. Melica Gheorghe cl. X, Brăila (571); 121. Mettler Martin, an IV s.m. pedagogică Timişoara (146); 122 Mihăileanu N. Constantin. cl. VIII s.m.1 Timişoara (46, 479); 123. Mihailovici Sergiu absolvent Tecuci (479, 580); 124. Mihalache Gheorghe, cl, X, Craiova (429); 125. Mitroaică I. Gheorghe, cl. X, Calafat (46, 146, 286); 126. Mitrofan Gheorghe, absolvent, Caransebeş (146, 286, 429, 571); 127. Mişcol N. Mirea. cl. X, Giurgiu (94, 286); 128. Mocanu Gheorghe, cl. X, Brăila (428); 129. Moroşan Dumitru, cl. X, Suceava (380); 130. Motoc I. Ioan, student, Bucureşti (571); 131. Murărescu Gheorghe, cl. IX, Roman (239,

479, 571); 132 Mureşan Tr. Augustin student Cluj (286). 137. **Nedelcu Mihai, cl. X, Ploieşti** (380); 134. Neguţ Nicolae, absolvent, Cîmpulung Moldovenesc (46, 286); 135. Negoescu Emil, cl. X, Tecuci (380); 136. Nicolescu Claudiu, cl. IX, Tîrgu Mureş (522). 137. **Opriş Cristache,** cl. X, Ploieşti (522); 138. Opriş A. Ioan, Cîmpulung Muscel (46, 429). 139. **Panaitessu Gheorghe** cl. X Iaşi (522); 140. Panaitopol V. Laurenţiu, cl. VIII, Giurgiu (522); 141. Paraschiv Elena, cl. VII, Bezdead, Ploieşti (94); 142. Parepa Grigore, absolvent Ploieşti (146 239, 286, 522) 143. **Pătraşcu Victor, cl. X, Ploieşti** (380); 144. Pescaru Nicolae, an II s.m.t. mecanică 2, Bucureşti (239); 145. Petre I. Petre, cl. X, s.m.4 Bucureşti (286); 146. Petrescu M. Răzvan cl. IX, Ploieşti (94, 380); 147. Pieleanu I. Dumitru, cl, IX, Giurgiu (146); 148. Pigli Traian, Timişoara (239); 149. Pitucea Eugen, an III s.m. electrothehnică, Craiova (286); 150. Pivniceru Radu, cl. X, Galaţi (286); 151. Pleniceanu Ion, cl. X, Calafat (286); 152. Podeanu Corneliu, cl. IX, Oraşul Stalin (239, 479); 153. Popa Gh. Stancu, cl. X, Corabia (46, 94, 286, 428); 154. Popescu A. Dan, student, Bucureşti (46); 155. Popescu Dumitru, cl. X, Ploieşti (380, 479); 156 Popescu Paul an II s.m. măsurători, terestre, Bucureşti (146, 286, 522); 157. Popovici Gh. Iulian, cl. X, Ploieşti (146, 239); 158. Popovici Radu, cl. X s.m.18, Bucureşti (286); 159. Porţeanu Mircea, cl. X, Oradea (286); 160. Preda Traian Adrian, cl. X, Curtea de Argeş (286, 522) 161; Pupăzan Nicolae, absolvent, Sibiu (46, 146, 380, 571). 162. **Rădoi D. Mircea,** cl. X, s.m.4, Bucureşti (286); 163. Radu V. Constanţa, cl. X, Tecuci (239); 164. Răducanu V. Gheorghe, an II s.m. drumuri, Craiova (286); 165. Roşianu C. Dragomir, student, Bucureşti (239, 571); 166. Rotaru V. Alexandru, cl. X, Tecuci (479); 167. Rotaru N. Constantin, cl. X, Suceava (146, 379, 522); 168. Rus A. Ioan, cl. X, Oradea (46, 146, 286, 522, 580). 169. **Sălăceanu Adriana,** cl X, S.m.10, Bucureşti (429); 170. Sămărescu F. Dan cl. X, Piteşti, (46, 146, 380); 171. Sandu Gh. Ion, clasa X, s.m. 4, Bucureşti (46, 239, 580); 172. Şarpe I. Dumitru, cl. IX, Craiova (522); 173, Schileru I. Dinu, clasa X, Bucureşti (286); 174. Scutelnicu Radu, cl. X, Botoşani (239); 175. Şerb Gabriel Adrian, clasa X, Piteşti (46, 239, 379, 522); 176. Serdeşnic Aurel, cl. X, Lugoj 522); 177. Sgăvîrdea D., absolvent Caransebeş (522); 178. Sofron Gavril, an I s.m. mecanizarea agriculturii, Piteşti (380); 179. Sorescu Victor, cl. X, Piteşti (379, 479, 522); 180. Stănăşilă Octavian, clasa X, s.m.4, Bucureşti (146, 239, 286, 571); 181. Stăncescu Mihail, cl. X, s.m.11, Bucureşti (429); 182. Stăncescu Viorel, cl. VI, Giurgiu (479; 183. Stanciu Alexandru; cl. X, s.m.20, Bucureşti (286); 184. Stănciulescu M. Mihai cl. IX, Tîrgovişte (146, 379, 571); 185. Stănescu N. Emil, cl. X, Giurgiu (571); 186. Stănescu I. Viorel, cl. IX, Vaslui (94, 239, 371); 187. Stefanelli C. Dorin, cl. X, Tîrgu Mureş (522); 188. Stepan Ionel, an III s.m. hidrotehnica, Constanţa (239, 286, 522); 189 Stoian I. Gheorghe, cl. X, Tîrgovişte (380, 571); 190. Stroe Radu, cl. X, Ploieşti (94, 239, 380, 479, 522, 571); 191. Stroescu Elena, cl. X, Craiova (522); 192. Strungaru N. Crişan, cl. X Turnu Severin (380, 571). 193. **Tănase Dumitru,** an IV măsurători terestre Bucureşti (146); 194. Ţeculescu S. Vasile, absolvent, Slatina (479); 195, Teodorescu Ioan, cl. X, Buzău (522); 196. Teodorescu Victor, cl. X, Ploieşti (479); 197. Ţibuleac Florian, cl. VII, Hîrlău (286); 198. Ţifui Vasile, student. Iaşi (571); 199. Ţigănuş Mircea, cl. IX, Focşani (239); 200. Ţîru Emil, cl. IX, Focşani (239, 286 522); 201. Tofan V. Dumitru, cl. VII, Bîrlad (239); 202. Tofan C. Mihai, cl. X, Oraşul Stalin (479); 203. Tomescu C. Dan, cl. X, s.m.13. Bucureşti (239); 204. Torjescu Florin, student, Bucureşti (46, 239, 429, 571); 250. Torsan Iilie, cl. X, Alba Iulia (239, 286); 206. Trif Miron, cl. VII, Bordeşti Brad (286; 207. Trifan Vasile, cl. X, Craiova (239, 429); 208. Tudor C. Gheorghe, cl. X, Rîmnicul Vîlcea (380); 209. Tudor Sp. Tiberiu, cl. VIII, Tîrgu Mureş (522); 210. Tudosie Constanţa, cl. X, Turnu Severin (380); 211. Ţugulea Eugen, cl. IX, Rîmnicul Vîlcea (239); 212. Ţurlea I. Corneliu cl. X, Craiova (146, 239, 522). 213. Ursoiu Vasile, cl. X, Roman (380); 214. Ursu Gh. Mihai, cl. X, Piteşti (94); 215. Uţă Marin, absolvent, Sibiu (46, 94, 239, 522); 216. **Văgăunescu Gheorghe,** cl. IX, Ploieşti (94); 217. Vaida Alexandru, cl. X, Brad (428); 218. Vasilache M. Catrina, cl. X, Ploieşti (479); 219. Vasilescu Aurel, cl. X, Călăraşi (94, 286, 429, 571); 220. Vasiliev Lucia, an II s.m. hidrotehnică, Constanţa (239, 522); 221. Vasiliu Monica, cl. VII, Bacău (239); 222. Velicescu Mircea cl. VI, Rîmnicul Vîlcea (380); 223. Vladu Viorel, cl. X, Turnu Severin (371); 224. Vlagiu Ion, absolvent, Arad (94); 225. Voicu I. Traian an II s.m. electrotehnică Craiova (146); 226. Voinea L. Alexandru, cl. X, Craiova (522); 227 Voinea C. Dorin, cl. IX, Craiova (571); 228. Vrăjitoru Dan, cl. X, Aiud (94), 146); 229. Vrăjitoru Mihai, cl. VII, Aiud (46, 286, 429). 230 Zaharescu Marius, student, Bucureşti 286); 231. Zvorişteanu Alexandru, cl. VIII Bucureşti (239), (239 evidenţiaţi).

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi* de **A. O. Ghelfond** (lei 1,75)
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter** (lei 5,65)
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu** (lei 6)
12. *Cometele* de **F. I. Zighel** (lei 2,35)
13. *Radioastronomia* de **S. Şklovski** (lei 6,85)
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu** (lei 6,55)
15. *Soarele şi observarea lui* de **V. V. Şaronov** (lei 7,10)

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1956

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORI POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

c. 1529. Intreprinderea Poligrafică nr. 4

Preţul Lei 1 exemplarul